MICHEL HACQUE

Triples et exactitudes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1974, tome 11, fascicule 1
, p. 89-100
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1974__11_1_89_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1974 t. 11-1

TRIPLES ET EXACTITUDES

Michel HACQUE

Dans une catégorie abélienne, tout triple [1] [2] exact à gauche détermine une localisation [3] et si le triple est exact, la cohomologie de son complexe est étroitement liée aux satellites du foncteur section de cette localisation (Prop. 1.2.2.), ce qui conduit en particulier à un résultat général applicable aux méthodes standard (Cor. 1.2.4.).

Ces résultats sont appliqués aux homomorphismes d'anneaux, ce qui donne en particulier divers critères, dont un de nature cohomologique, permettant de reconnaître qu'un homomorphisme plat à gauche, admet une "factorisation canonique" au moyen d'un homomorphisme fidèlement plat à gauche et d'un épimorphisme plat à gauche (Th. 2.2.3.).

1. - PROPRIETES GENERALES.

1-1. Préliminaires.

Tout triple $\mathbb{T} = (\Gamma,k,p)$ dans une catégorie $\mathcal{A}$, détermine la sous-catégorie pleine $\mathcal{A}[\mathbb{T}]$ de $\mathcal{A}$, caractérisée par les objets M de $\mathcal{A}$, pour lesquels la suite :

$$M \xrightarrow{k(M)} \Gamma M \underset{d_0^1(M)=\Gamma k(M)}{\overset{d_0^0(M)=k\Gamma(M)}{\rightrightarrows}} \Gamma^2 M$$

est *exacte*.

En supposant désormais que $\mathcal{A}$ est *avec limites projectives finies*, il existe un *noyau* (L,j) caractérisé par la suite exacte :

$$L \xrightarrow{j} \Gamma \underset{d_0^1=\Gamma k}{\overset{d_0^0=k\Gamma}{\rightrightarrows}} \Gamma^2$$

et un *couple* (L,λ) caractérisé par la relation : $k = j\circ\lambda$.

1-1-1. LEMME :

Si le triple $\mathbb{T} = (\Gamma,k,p)$ *est* exact à gauche, *il existe un foncteur exact* $T' : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L} = \mathcal{A}[\mathbb{T}]$, *coadjoint au foncteur canonique pleinement fidèle* $S' : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{A}$ *et il peut être caractérisé par la condition :* $L = S'T'$.

En montrant d'abord que $\lambda\Gamma$ et $\Gamma\lambda$ sont des isomorphismes fonctoriels et que $j\Gamma$ et Γj sont des monomorphismes fonctoriels, il est facile de vérifier que λL et $L\lambda$ sont des *isomorphismes fonctoriels égaux*, ce qui entraîne l'existence d'un triple idempotent et exact à gauche $\mathbb{L} = (L,\lambda,\mu)$. Tout résulte alors facilement du fait que les objets de $\mathcal{L}$ sont les objets M de $\mathcal{A}$, qui sont $\mathbb{L}$-*invariants*, c'est-à-dire pour lesquels $\lambda(M) : M \to LM$ est un isomorphisme.

1-1-2. <u>REMARQUES</u> :

(a). Si le triple $\mathbb{\Gamma} = (\Gamma,k,p)$ est *exact à gauche*, en considérant l'adjonction :

$$a' = (\alpha',\beta')(T' \dashv S')(\mathcal{A},\mathcal{L})$$

qui vérifie : $\mathbb{L} = \nabla(a')$, il existe un triple *fidèle* et *exact à gauche* $\mathbb{\Gamma}' = (\Gamma',k',p')$ dans $\mathcal{L}$, tel qu'en posant :

$$\nabla(a';\mathbb{\Gamma}') = [S'\Gamma'T',(S'k'T')\alpha',(S'p'T')(S'\Gamma'\beta'\Gamma'T')]$$

il existe un isomorphisme de triple :

$$\varepsilon : \mathbb{\Gamma} \xrightarrow{\sim} \nabla(a',\mathbb{\Gamma}').$$

(b). Pour toute adjonction :

$$a = (\alpha,\beta)(T \dashv S)(\mathcal{A},\mathcal{B})$$

dans laquelle le coadjoint T est *exact*, en posant $\mathbb{\Gamma} = \nabla(a)$ et avec les notations précédentes, il existe une adjonction :

$$a'' = (\alpha'',\beta'')(T'' \dashv S'')(\mathcal{L},\mathcal{B})$$

dans laquelle le coadjoint T'' est *exact* et *fidèle*, de sorte que :

$$T \simeq T''T' \quad \text{et} \quad S \simeq S'S'' \quad \text{avec} \quad T'' \simeq TS' \quad \text{et} \quad S'' \simeq T'S.$$

De plus, la catégorie $\mathcal{L} = \mathcal{A}[\mathbb{\Gamma}]$ est alors équivalente à la catégorie des *coalgèbres* [1], associée au cotriple $\mathbb{C} = \Delta(a)$.

1-2. <u>Etude du cas abélien.</u>

En supposant désormais que $\mathcal{A}$ est une catégorie *abélienne*, le lemme 1-1-1 entraîne que tout triple *exact à gauche* $\mathbb{\Gamma} = (\Gamma,k,p)$, détermine une *localisation* $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbb{\Gamma}}$ dans $\mathcal{A}$, caractérisée [3] [6] par l'une des données suivantes :

- La sous-catégorie *localisante* $\mathfrak{A}'$ de $\mathfrak{A}$, définie par :

$$\mathfrak{A}' = \mathrm{Ker}\,\Gamma = \mathrm{Ker}\,T' = \mathrm{Ker}\,L\ .$$

- La sous-catégorie *locale* $\mathcal{L} = \mathfrak{A}[\mathbb{T}]$ de $\mathfrak{A}$, qui est la catégorie abélienne caractérisée par les objets $\mathfrak{A}'$-fermés.
- Le système *localisant* (L,λ), dans lequel $L = S'T'$ est un *foncteur localisation*.

Il convient de noter que ce résultat constitue une généralisation de la proposition 5 (p.374) de [3] et que,par suite, la "nature" recèle encore beaucoup plus de localisations que ne le laissait prévoir cette proposition.

De même, tout triple $\mathbb{T} = (\Gamma,k,p)$ détermine un foncteur *complexe* C^* caractérisé par les conditions :

$$C^n = \Gamma^{n+1} \qquad (n \geq 0)$$

et $d_n = \sum\limits_{i=o}^{i=n+1} (-1)^i d_n^i$ avec $d_n^i = \Gamma^i k \Gamma^{n-i+1}$ pour $0 \leq i \leq n+1$.

1-2-1. LEMME :

Si le triple $\mathbb{T} = (\Gamma,k,p)$ *est* exact, *les foncteurs*

$$H^n = H^n[C^*]$$

sont les composantes d'un foncteur cohomologique H^*, *nul en degrés strictement négatifs et vérifiant* : $L \simeq H^0$.

C'est immédiat.

1-2-2. PROPOSITION :

Dans une catégorie abélienne $\mathfrak{A}$, *pour tout triple exact* $\mathbb{T} = (\Gamma,k,p)$ *qui détermine une localisation* $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbb{T}}$ *dans* $\mathfrak{A}$, *alors* :

(a). *Les satellites du* foncteur section $S' : \mathcal{L} \to \mathfrak{A}$ *sont caractérisés par les composantes du* foncteur cohomologique universel :

$$\check{H}^* = H^* S'$$

pour lequel il existe un isomorphisme fonctoriel :

$$\lambda S' : S' \xrightarrow{\sim} LS' = \check{H}^0\ .$$

(b). Il existe un isomorphisme fonctoriel de ∂-foncteurs :

$$H^*\lambda : H^* \xrightarrow{\sim} H^*L = \check{H}^*T' .$$

(c). En posant $(F,i) = \operatorname{Ker} k$ *et* $(Q,q) = \operatorname{Coker} k$, *il existe des isomorphismes fonctoriels :* $H^0 \simeq L$ *et* $H^n \simeq FQ^{n+1}$ *pour* $n \geqslant 1$.

Tout d'abord, en posant $(R,k') = \operatorname{Im} k$ et $(R,\rho) = \operatorname{Coim} k$, ce qui donne un diagramme commutatif et exact de la forme :

(I).

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
 & F \arrow[d, "i"'] & & & \\
 & I \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\rho"'] \arrow[dr, "k"' near start] & L \arrow[d, "j"] & & \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "k'"'] \arrow[d] \arrow[ur, "\lambda'"' near end] & \Gamma \arrow[r, "q"] & Q \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

et, en supposant simplement que le triple $\mathbb{T}$ est exact à gauche *ou* exact à droite, il est possible de vérifier que le couple (L,λ) peut être caractérisé par un diagramme commutatif et exact de la forme :

(II).

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[d, "1_R"'] & L \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(III)}"] & FQ \arrow[r] \arrow[d, "iQ"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "k'"] \arrow[d] & \Gamma \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\sigma"'] & Q \arrow[r] \arrow[d, "\rho Q"] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & RQ \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

c'est-à-dire par un carré cartésien (III).

\- Comme la relation : $\mathcal{A}' = \operatorname{Ker} \Gamma$ montre que C^* et par suite H^* s'annulent sur $\mathcal{A}'$, les suites exactes de cohomologie associées à la première colonne de (I) et à la première ligne de (II), entraînent *(b)*.

En posant $\check{C}^* = C^*S'$, ce qui entraîne d'ailleurs $\check{H}^n = H^n[\check{C}^*]$, comme $\Gamma\lambda$ est un isomorphisme fonctoriel, il existe un isomorphisme fonctoriel :

$$C^*\lambda : C^* \longrightarrow C^*L = \check{C}^*T' .$$

En remarquant que toute suite exacte courte dans $\mathcal{L}$ est équivalente à l'image par T' d'une suite exacte courte dans $\mathcal{A}$, il en résulte alors facilement que $\check{H}^* = H^*S'$ est un foncteur cohomologique.

En vérifiant que le complexe $(I \xrightarrow{k} C^*)\Gamma$ est homotope à zéro, ce qui entraîne :

$$H^n\Gamma = 0 \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant 1 \ ,$$

la remarque 1-1-2 (a) donne la relation $S'\Gamma' \simeq \Gamma S'$ et montre que le monomorphisme fonctoriel $k' : I_{\mathcal{L}} \longrightarrow \Gamma'$ vérifie

$$\check{H}^n\Gamma' = 0 \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant 1 \ ,$$

c'est-à-dire que les foncteurs $\check{H}^n$ sont *effaçables* pour $n \geqslant 1$ et par suite la proposition 2-2-1 de [4] entraîne que $\check{H}^*$ est un foncteur cohomologique *universel*.

La caractérisation de $\mathcal{L}$ entraîne que $\lambda S'$ est un isomorphisme fonctoriel, ce qui achève la démonstration de *(a)*.

La relation $H^1\Gamma = 0$ entraîne le diagramme commutatif et exact :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\lambda L"'] & \Gamma \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\lambda\Gamma"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "\lambda P"] & 0 & \\
0 \arrow[r] & L^2 \arrow[r, "Lj"] & L\Gamma \arrow[r, "L\sigma"] & LP \arrow[r] & H^1L \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dans lequel λL et $\lambda\Gamma$ sont des isomorphismes fonctoriels.

Comme λR est un monomorphisme fonctoriel, il en est de même pour λP et par suite il en résulte une suite exacte de la forme :

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{\lambda P} LP \longrightarrow H^1L \longrightarrow 0 \ .$$

D'après *(b)*, elle donne une suite exacte de la forme :

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{\lambda P} LP \longrightarrow H^1 \longrightarrow 0 \ ,$$

Compte tenu de la relation $P \simeq RQ$ et de la relation $(L\rho)\lambda' = \lambda R$, dans laquelle $L\rho$ est un isomorphisme fonctoriel, il en résulte que H^1 peut être caractérisé par une suite exacte de la forme :

$$0 \longrightarrow RQ \xrightarrow{\lambda' Q} LQ \longrightarrow H^1 \longrightarrow 0 \ .$$

Comme (II) donne une suite exacte de la forme :

$$0 \longrightarrow RQ \xrightarrow{\lambda' Q} LQ \xrightarrow{q' Q} FQ^2 \longrightarrow 0 ,$$

il en résulte bien que le foncteur H^1 peut être caractérisé par :

$$H^1 \simeq FQ^2 .$$

Compte tenu des relations :

$$H^n F = 0 \quad (n \geqslant 0) \quad \text{et} \quad H^n \Gamma = 0 \quad (n \geqslant 1) ,$$

les suites exactes de cohomologie associées à la première colonne de (I) et à la seconde ligne de (II) donnent des isomorphismes fonctoriels

$$H^n \simeq H^n R \quad (n \geqslant 0) \quad \text{et} \quad H^n Q \simeq H^{n+1} R \quad (n \geqslant 1)$$

qui déterminent des isomorphismes fonctoriels :

$$H^{n+1} \simeq H^n Q \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1 .$$

L'isomorphisme fonctoriel $H^1 \simeq FQ^2$ détermine alors des isomorphismes fonctoriels :

$$H^n \simeq FQ^{n+1} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1 ,$$

ce qui achève la démonstration de (c).

1-2-3. <u>COROLLAIRE</u> :

Dans une catégorie abélienne $\mathfrak{A}$, *pour tout triple exact* $\mathbb{T} = (\Gamma, k, p)$, *il y a équivalence des conditions suivantes :*

(*a*). *Le foncteur localisation* L *est exact.*

(*b*). *Le foncteur section* $S' : \mathscr{L} \longrightarrow \mathfrak{A}$ *est exact.*

(*c*). *Le foncteur cohomologique* H^* *vérifie :* $H^1 = 0$.

(*d*). *Le foncteur cohomologique* H^* *vérifie :* $H^n = 0$ *pour tout* $n \geqslant 1$.

(*e*). *Le complexe* C^* *est acyclique en degré un.*

(*f*). *Le complexe augmenté* $(I \xrightarrow{k} C^*)$ *est acyclique.*

(*g*). *Les foncteurs* F *et* Q *vérifient :* $FQ^2 = 0$.

Cela résulte immédiatement de la proposition 1-2-2.

1-2-4. COROLLAIRE :

Etant données deux catégories abéliennes $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$, *pour tout foncteur* exact à gauche $E : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *et pour tout triple* exact $\mathbf{T} = (\Gamma, k, p)$ *dans* $\mathcal{A}$, *tel que le foncteur* $E\Gamma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *soit* exact, *alors* :

(*a*). *Les foncteurs*

$$H^n(\cdot, E)_{\mathbf{T}} =^{\ell} H^n[EC^*]$$

sont les composantes d'un foncteur cohomologique $H^*(\cdot, E)_{\mathbf{T}}$, *nul en degrés strictement négatifs, vérifiant* :

$$H^0(\cdot, E)_{\mathbf{T}} \simeq EL \quad \textit{et} \quad H^n(\Gamma\cdot, E)_{\mathbf{T}} = 0 \quad \textit{pour} \quad n \geqslant 1 .$$

(*b*). *De plus, si le triple* $\mathbf{T}$ *est* fidèle, *le complexe augmenté* $(I \xrightarrow{k} C^*)$ *est une résolution* E-*acyclique de* I *et* $H^*(\cdot, E)_{\mathbf{T}}$ *est un* foncteur cohomologique universel *dont les composantes caractérisent les satellites du foncteur exact à gauche* $E : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$.

La partie (*a*) est immédiate.

Le début de la démonstration de la proposition 1-2-2 entraîne que pour que $\mathbf{T}$ soit fidèle, c'est-à-dire pour que k soit un monomorphisme fonctoriel, ce qui équivaut à $F = 0$, il faut et il suffit que $\lambda : I \longrightarrow L$ soit un isomorphisme fonctoriel.

La partie (*b*) résulte alors de (*a*), du corollaire 1-2-3 et de la proposition 2-2-1 de [4].

1-2-5. REMARQUE :

Le corollaire 1-2-4 et son dual sont à l'origine du "caractère absolu", lié à l'existence de satellites, de la plupart des théories cohomologiques ou homologiques obtenues par les méthodes standard .

2. — APPLICATIONS AUX HOMOMORPHISMES D'ANNEAUX.

2-1. Généralités.

Dans la suite, les anneaux considérés sont des anneaux avec élément unité et les homomorphismes sont des homomorphismes d'anneaux avec élément unité.

Pour tout anneau A, tout homomorphisme $f : A \longrightarrow B$, détermine une adjonction

$$a_f = (\psi,\Phi)(f^* \dashv f_*)(\mathcal{A},\mathcal{B})$$

dans laquelle $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont les catégories de modules à gauche sur A et sur B. Il en résulte un triple *exact à droite* $\Pi_f = (\Gamma_f, k_f, p_f)$ dans $\mathcal{A}$, défini par :

$$\Pi_f = \nabla(a_f)$$

auquel est associé un couple (L_f,λ_f) et un complexe C_f^* dont la cohomologie caractérise des foncteurs H_f^n.

Il est alors possible de montrer que tout objet M de $\mathcal{A}$ vérifie :

$$L_f M = \{y; y = \sum_i b_i \otimes x_i \in B_A \otimes M;\ \sum_i 1 \otimes b_i \otimes x_i = \sum_i b_i \otimes 1 \otimes x_i\} .$$

En particulier :

$$L_f A = \{b; b \in B\ ;\ 1 \otimes b = b \otimes 1\}$$

est muni d'une structure d'anneau et il coïncide alors avec le *dominion* [7] de f, qui est un sous-anneau $D = D(f)$ de B et $g = \lambda_f(A) : A \longrightarrow L_f A = D$ est un homomorphisme d'anneaux.

Il en résulte un diagramme commutatif d'homomorphismes d'anneaux de la forme :

(IV).
$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & B \\ & D \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

dans lequel D est le *dominion* de f et dans lequel h est *injectif*.

2-2. Cas des homomorphismes plats à gauche.

Un homomorphisme $f : A \longrightarrow B$ sera dit *plat à gauche* si le foncteur extension des scalaires $f^* : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est *exact*, c'est-à-dire si f fait de B un A-module à *droite plat*, ou encore si le triple Π_f est *exact*.

Il détermine alors une localisation $\tilde{\mathcal{L}}_f$ dans $\mathcal{A}$, dont la sous-catégorie localisante $\mathcal{A}_f^!$ de $\mathcal{A}$ est définie par :

$$\mathcal{A}_f^! = \operatorname{Ker} \Gamma_f = \operatorname{Ker} f^* .$$

En particulier, le *dominion* $D = D(f)$ de f est alors l'*anneau localisé* de A pour la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_f$ dans $\mathcal{A}$.

2-2-1. PROPOSITION :

Pour tout homomorphisme plat à gauche $f : A \longrightarrow B$, *alors* :

(a). Les foncteurs H_f^n *sont les composantes d'un foncteur cohomologique* H_f^* , *nul en degrés strictement négatifs et vérifiant* $H_f^0 = L_f$.

(b). Les satellites du foncteur section $S_f' : \mathcal{L}_f \longrightarrow \mathfrak{A}$ *sont caractérisés par les composantes du* foncteur cohomologique universel

$$\check{H}_f^* = H_f^* \, S_f'$$

pour lequel il existe un isomorphisme fonctoriel :

$$\lambda_f \, S_f' : S_f' \xrightarrow{\sim} L_f \, S_f' = \check{H}_f^0 .$$

(c). Il existe un isomorphisme fonctoriel de ∂*-foncteurs* :

$$H_f^* \, \lambda_f : H_f^* \xrightarrow{\sim} H_f^* \, L_f = \check{H}_f^* \, T_f' .$$

Comme le triple $\mathbb{T}_f$ est exact, cela résulte de la proposition 1-2-2.

2-2-2. PROPOSITION :

Pour tout homomorphisme plat à gauche $f : A \to B$ *qui détermine le diagramme commutatif* (IV), *si* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *et* $\mathfrak{D}$ *sont les catégories de modules à gauche sur* A, *sur* B *et sur* D, *alors* :

(a). L'homomorphisme injectif $h : D \longrightarrow B$ *est* plat à gauche.

(b). La localisation $\tilde{\mathcal{L}}_h$ *dans* $\mathfrak{D}$ *coïncide avec l'image par* g *de la localisation* $\tilde{\mathcal{L}}_f$ *dans* $\mathfrak{A}$.

La commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "i_1"] & \\ D \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "h"'] & & B \underset{A}{\otimes} B \\ & B \arrow[ur, "i_2"'] & \end{tikzcd}$$

permet d'envisager un morphisme $\nu'' : B \underset{D}{\otimes} B \longrightarrow B \underset{A}{\otimes} B$ défini par $\nu''(b \underset{D}{\otimes} b') = b \underset{A}{\otimes} b'$, ce qui permet de montrer que le morphisme canonique $\nu'(B) : B \underset{A}{\otimes} B \longrightarrow B \underset{D}{\otimes} B$ est un isomorphisme.

Le morphisme fonctoriel canonique $\nu : f^* g_* \longrightarrow h^*$ donne le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
f^*g_*D \arrow[r, "\nu(D)"] \arrow[d, "f^*g_*(h)"'] & h^*D \arrow[d, "h^*(h)"] \\
f^*f_*B=f^*g_*h_*B \arrow[r, "\nu h_*(B) = \nu'(B)"] & h^*h_*B
\end{tikzcd}$$

dans lequel $\nu(D)$ est toujours surjectif. Comme $f^*g_*(h) = B\otimes_A h$ est injectif, il en résulte que $\nu(D)$ est injectif et par suite bijectif.

Comme D est un générateur de $\mathfrak{D}$ et que f^*g_* et h^* commutent aux limites inductives, il en résulte que $\nu : f^*g_* \longrightarrow h^*$ est un isomorphisme fonctoriel.

D'une part, comme f^*g_* est exact, il en résulte que h^* est exact, ce qui prouve *(a)*.

D'autre part, comme la sous-catégorie localisante $\mathfrak{D}'$ de $\mathfrak{D}$ associée à l'image [6] par g de la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_f$ est caractérisée par : $\mathfrak{D}' = g_*^{-1}(\mathfrak{A}')$, il en résulte la relation :

$$\mathfrak{D}' = g_*^{-1}(\mathfrak{A}') = \mathrm{Ker}\ f^*g_* = \mathrm{Ker}\ h^* = \mathfrak{D}'_h \quad ,$$

ce qui prouve *(b)*.

2-2-3. <u>THEOREME</u> :

Pour tout homomorphisme plat à gauche $f : A \longrightarrow B$, *qui détermine le diagramme commutatif* (IV) *et la localisation* $\tilde{\mathcal{L}}_f$ *dans* $\mathfrak{A}$, *il y a équivalence des conditions suivantes* :

(a). La localisation $\tilde{\mathcal{L}}_f$ *dans* $\mathfrak{A}$ *est* plate [6].

(a'). La localisation $\tilde{\mathcal{L}}_f$ *dans* $\mathfrak{A}$ *est* exacte [6].

(b). L'homomorphisme $h : D \longrightarrow B$ *est* fidèlement plat à gauche.

(c). Le foncteur cohomologique H_f^* *vérifie* : $H_f^n = 0$ *pour tout* $n \geq 1$.

(c'). Le foncteur cohomologique H_f^* *vérifie* : $H_f^1 = 0$.

(d). L'homomorphisme $f : A \longrightarrow B$ *admet une factorisation de la forme*

(V).
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_1"'] & & B \\
& C \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

dans laquelle f_1 *est un* épimorphisme plat à gauche *et dans laquelle* f_2 *est un homomorphisme* fidèlement plat à gauche.

De plus, une telle factorisation est unique à un isomorphisme près.

Comme il est facile de vérifier que la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_f$ est de type fini, le théorème 3-6 de [5] ou de [6] entraîne l'équivalence de (*a*) et de (*a'*). De plus, compte tenu de la partie (*b*) de la proposition 2-2-2, la condition (*a*) se traduit également par la trivialité de la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_h$ dans $\mathfrak{D}$, ce qui prouve l'équivalence de (*a*) et de (*b*).

Le corollaire 1-2-3 entraîne alors l'équivalence des conditions (*a*), (*a'*), (*b*), (*c*), (*c'*) et, d'après le théorème 4-1 de [5] ou de [6], elles entraînent (*d*) en posant $f_1 = g$ et $f_2 = h$.

Réciproquement, (*d*) entraîne : $\mathfrak{a}_f^! = \text{Ker } f^* = \text{Ker } f_1^*$ et d'après le lemme 3-1 de [5] ou de [6] il en résulte un isomorphisme $u : D \longrightarrow C$, vérifiant $f_1 = ug$, ce qui prouve l'affirmation relative à l'unicité. Compte tenu de la relation $\mathfrak{a}_f^! = \text{Ker } g^*$, la proposition 2-2 de [5] ou de [6], montre alors que (*d*) implique (*a*), ce qui achève la démonstration.

2-2-4. <u>EXEMPLES</u> :

(a). Etant donnés un anneau commutatif noethérien A et un idéal $\mathfrak{m}$ de A, soit : $f : A \longrightarrow B$ l'homomorphisme canonique de A dans le séparé complété $B = \hat{A}$ de A pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Il est bien connu que f est un homomorphisme plat et il est possible de montrer que f vérifie les conditions équivalentes du théorème 2-2-3 en prouvant par exemple qu'il vérifie la condition (*d*), dans laquelle C est l'anneau de ZARISKI $S^{-1}A$, avec $S = 1+\mathfrak{m}$.

(b). Etant donné un corps commutatif K, pour l'anneau $A = K[X,Y]$ les indéterminés X et Y déterminent des épimorphismes plats $f' : A \longrightarrow A_X$ et $f'' : A \longrightarrow A_Y$ et en considérant l'anneau produit $B = A_X \times A_Y$, il en résulte un homomorphisme plat

$$f : A \longrightarrow B .$$

En montrant que $g : A \longrightarrow D$ est un isomorphisme et que la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_f$ n'est pas triviale, il en résulte que f ne vérifie pas les conditions équivalentes du théorème 2-2-3.

2-2-5. <u>REMARQUE</u> :

Les conditions équivalentes du théorème 2-2-3 entraînent que $g : A \longrightarrow D$ est un épimorphisme plat à gauche.

L'exemple (b) montre que la réciproque n'est pas vraie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Seminar on Triples and Categorical Homology Theory
Lecture Notes in Mathematics, 80 (1969).

[2] EILENBERG S. and MOORE J.C. Adjoint functors and Triples
Ill. J. Math., 9 (1965), 381-398.

[3] GABRIEL P. Des catégories abéliennes, *Bull Soc. Math. Fr.* 80
(1962), 323-448 (Thèse Sc. Math. PARIS. 1961).

[4] GROTHENDIECK A., Sur quelques points d'algèbre homologique
Tohoku. Math. 3, série 2-9 (1957), 111-221.

[5] HACQUE M., Remarques sur les épimorphismes plats d'anneaux.
C.R. Acad. Sci. PARIS t.268 (1969), 1447-1450.

[6] HACQUE M., Localisations exactes et localisations plates.
Publ. du Départ. de Math. Fac. Sci. de LYON t.6
fasc.2 (1969), 97-117.

[7] LAZARD D. et HUET P., Dominions des anneaux commutatifs.
Bull. Sci. Math. 2ème série. 94 (1970), 193-199.

Michel HACQUE
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard - LYON I
43, Bd. du 11 Novembre 1918
69621 VILLEURBANNE - FRANCE -