

IBRAHIM RIHAOUI

Intégration non archimédienne

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1974, tome 11, fascicule 1
, p. 23-87

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1974__11_1_23_0

© Université de Lyon, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTEGRATION NON ARCHIMEDIENNE

par Ibrahim RIHAOUI

INTRODUCTION. - Ce travail constitue une contribution à l'élaboration d'une théorie de l'intégration où le corps des scalaires K est un corps valué non-archimédien (n.a.). L'idée d'une telle étude remonte à MONNA et SPRINGER et l'on trouve dans leur article (5) l'essentiel de la théorie de l'intégration n.a. dans le cas d'un espace éparpillé localement compact et dénombrable à l'infini, développé à partir des conditions et définitions analogues à celles qu'on trouve dans BOURBAKI (1).

En vue de généraliser ces résultats, on se place ici dans le cadre plus vaste des espaces éparpillés, donc en supprimant la condition de compacité locale. De plus, on aborde ce problème selon une approche qui utilise à la fois les méthodes ensemblistes et les méthodes fonctionnelles de la théorie, en essayant d'établir la liaison entre ces deux aspects.

Ainsi, le 1er chapitre est consacré à la caractérisation des fonctions d'ensembles σ -additives définies sur une tribu \mathcal{C} de parties d'un ensemble X et à valeurs dans K . A cet égard, on peut noter que l'inégalité triangulaire forte de la valeur absolue n.a. nous conduit à un résultat remarquable que l'on ne trouve pas dans le cas classique : en effet, pour toute fonction d'ensembles σ -additive μ , X est réunion d'une suite de

μ -atomes deux à deux disjoints et d'un ensemble T tel que la restriction de μ à T soit nulle (Théorème 1.2.10).

Cette question étant réglée, on voit que dans le cas n.a. il faut plutôt s'intéresser aux fonctions d'ensembles définies sur un clan Ω de parties de X , ce qui nous amène, au 2ème chapitre, à définir la notion de mesure μ sur Ω , et à établir quelques résultats dépendant à la fois de la mesure μ et de la topologie $T(\Omega)$ engendrée par Ω .

La notion d'intégrale est introduite au chapitre (3) à partir des données suivantes. Soit E un espace vectoriel de fonctions définies sur X à valeurs dans K . On pose, pour $f \in E$, $S(f) = \{x \in X \text{ tels que } |f(x)| \neq 0\}$, ensuite $S(E) = \{U \subset X ; \exists f \in E ; U \subset S(f)\}$ et $\Omega(E) = \{U \in S(E); \phi_U \in E, \forall f \in E\}$.

On dit que E est un W -espace si :

(a) $\Omega(E)$ recouvre X .

(b) La topologie $T = T(\Omega(E))$ engendrée par $\Omega(E)$ coïncide avec la topologie initiale associée aux fonctions $f \in E$.

Alors si E est un W -espace, on appelle intégrale sur E une forme linéaire $I : E \rightarrow K$ vérifiant la condition suivante :

(I) Si $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ est un net de fonctions de E tel que $f_\alpha \downarrow 0$ (i.e. $\forall x \in E$ $\lim_{\alpha} f_\alpha(x) = 0$ et $|f_\alpha(x)| \leq |f_\beta(x)|$ si $\alpha \succ \beta$) alors $I(f_\alpha) \rightarrow 0$.

Dans cette situation générale, on retrouve comme cas particulier le travail de MONNA (5).

Pour étendre la définition de l'intégrale à un ensemble contenant E , on utilise les résultats du chapitre 2 pour définir une fonction $N_I : X \rightarrow \mathbb{R}_+$, T -semi-continue supérieurement (3.3.5) ce qui permet de définir sur E la semi-norme n.a. $\|\cdot\|_I : f \rightarrow \|f\|_I = \text{Sup} |f(x)| N_I(x)$ et d'introduire les ensembles $X_n = \{x \in X; N_I(x) \geq \frac{1}{n}\}$ ($n \in \mathbb{N}$) et l'espace $F(I) = \{f: X \rightarrow K ; \|f\|_I < +\infty\}$. $F(I)$ est un espace semi-normé contenant E et l'intégrale I peut se prolonger de façon unique en une forme linéaire I^* sur l'espace $L(I)$ des fonctions intégrables, qui n'est autre que l'adhérence de E dans $F(I)$.

Ce procédé permet d'éviter le recours aux recouvrements spéciaux de MONNA et l'on obtient en même temps un certain nombre de résultats originaux et des caractérisations plus satisfaisantes de certaines notions.

Ainsi si l'on note E_{β_0} l'espace E muni de la topologie stricte (c'est-à-dire la topologie localement K -convexe définie par les semi-normes $\|f\|_{\phi} = \sup_{x \in X} |f(x)|\phi(x)$ où ϕ parcourt l'ensemble des fonctions

T -s.c.s. telles que, pour tout $\delta > 0$ et tout $f \in E$, l'ensemble $\{x \in X ; |f(x)|\phi(x) \geq \delta\}$ est T -compact), le théorème (3.3.10) montre que I est une intégrale sur E si et seulement si $I \in E'_{\beta_0}$.

D'autre part le théorème (4.1.2) établit qu'une fonction f est élément de $L(I)$ si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes :

- (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction de f à X_n est T -continue.
- (b) $\forall \delta > 0$, $\{x \in X ; |f(x)| N_I(x) \geq \delta\}$ est T -compact contenu dans un X_n .

De plus $L(I)$ est un W -espace, ce qui permet d'introduire la topologie T^* engendrée par $\Omega(L(I))$. Le théorème (4.1.6) montre que I^* est une intégrale sur $L(I)$ mais l'on ne peut pas de nouveau prolonger I^* puisque $L(I^*) = L(I)$.

Quant aux fonctions mesurables, définies d'une façon analogue à celle de BOURBAKI, elles sont caractérisées comme étant les fonctions T^* -continues (4.3.3), ce qui montre, qu'en général, une limite simple de fonctions mesurables n'est pas mesurable et l'on est amené à définir la convergence selon Egoroff qui conserve la mesurabilité (4.3.5). On donne ensuite la version n.a. du théorème de Lebesgue (4.3.8) qui constitue une généralisation du théorème (7.6) de (5).

Pour un espace éparpillé X , la liaison entre mesures et intégrales est fournie par le théorème (5.2.2) où l'on établit une correspondance biunivoque entre les intégrales sur $C(X, K, b)$ et les mesures définies sur l'algèbre des ensembles à la fois ouverts et fermés de X .

Signalons aussi les résultats suivants, non valables dans le cas classique :

- 1° Il existe dans X un plus grand ensemble négligeable (4.2.2).
- 2° Le dual de l'espace normé $L(I)$ (espace des classes des fonctions intégrables) n'est pas égal à l'espace $L^\infty(I)$ des classes des fonctions mesurables essentiellement bornées, même si X est compact (4.4.7).
- 3° Les compacts de X ne sont pas tous intégrables et ils le sont si et seulement si la topologie T^* est discrète (5.4).

Au chapitre 6, on introduit par analogie avec le travail de BUCHWALTER (3), la notion de parties K -bornées de X , et l'on démontre que $C'_\beta(X)$ ($C_\beta(X)$ étant l'espace des fonctions continues $f : X \rightarrow K$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties K -bornées) s'identifie à l'espace des intégrales sur $C(\delta^P X, K)$ ($\delta^P X$ étant le compact étudié dans (4)) dont le support est contenu dans l'adhérence dans $\delta^P X$ d'une partie K -bornée de X .

CHAPITRE 1. - FONCTIONS D'ENSEMBLES σ -ADDITIVES A VALEURS DANS UN CORPS VALUE NON ARCHIMEDIEN.

1.1. CORPS VALUE NON ARCHIMEDIEN.

(1.1.0) Dans ce paragraphe on donne sans démonstrations quelques propriétés classiques des corps valués n.a. dont on aura besoin pour la suite :

(1.1.1) DEFINITION. - On appelle corps valué n.a. un corps K muni d'une valeur absolue n.a. , c'est-à-dire d'une application $x \rightarrow |x|$ de K dans \mathbb{R}_+ satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) $|x| = 0 \iff x=0$; (2) $|xy| = |x||y|$; (3) $|x+y| \leq \max(|x|, |y|)$
pour tout x et tout y dans K .

Un corps valué est toujours considéré comme muni de la topologie définie par la distance $d(x,y) = |x-y|$ qui en fait un corps topologique. De plus la valeur absolue est toujours supposée être non triviale. Enfin, on suppose que le corps valué K est complet.

(1.1.2) PROPOSITION. - Soit K un corps valué n.a. complet et soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de points de K . Pour que la famille (x_i) soit sommable, il faut et il suffit que $\lim x_i = 0$ suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I .

(1.1.3) COROLLAIRE. -

(a) Soit (x_n) une suite de points de K . La série (x_n) est convergente si et seulement si $\lim x_n = 0$.

(b) Dans K toute série convergente est commutativement convergente.

(1.1.4) LEMME. -

(a) Soit $\sum x_n$ une série convergente dans K , alors $|\sum x_n| \leq \text{Sup} |x_n|$.

(b) Soient x et y deux points de K . Si $|x| < |y|$ alors $|x+y| = |y|$.

(1.1.5) PROPOSITION. - *Tout point de K possède un système fondamental dénombrable de voisinages à la fois ouverts et fermés.*

1.2. FONCTIONS D'ENSEMBLES σ -ADDITIVES.

(1.2.1) Soient X un ensemble, \mathcal{C} une tribu de parties de X , K un corps valué n.a. complet, et μ une application de \mathcal{C} dans K vérifiant :

(1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) Si (A_n) est une suite d'ensembles de \mathcal{C} deux à deux disjoints

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

On va dans la suite caractériser les fonctions d'ensembles de ce type ; donnons-en d'abord quelques propriétés :

(1.2.2) PROPOSITION. - *La fonction μ définie ci-dessus vérifie les propriétés suivantes :*

(a) Soient $A, B \in \mathcal{C}$ alors $\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B)$.

En particulier si $B \subset A$ on a $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.

(b) Soit (A_n) une suite de parties dans \mathcal{C} deux à deux disjointes alors $\lim \mu(A_n) = 0$.

(c) Si (A_n) est une suite monotone de parties dans \mathcal{C} alors $\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n)$.

Preuve. - Elle est classique et ne présente pas de difficultés.

(1.2.3) On va définir en quelque sorte la valeur absolue de μ de la manière suivante :

Soit m l'application de \mathcal{C} dans \mathbb{R}_+ définie comme suit :

$$\text{Pour } A \in \mathcal{C} \quad m(A) = \text{Sup}\{|\mu(B)| ; B \in \mathcal{C}, B \subset A\} \quad (1).$$

Les propriétés de m sont rassemblées dans la proposition suivante

(1.2.4) PROPOSITION. - L'application m vérifie les propriétés suivantes :

(a) $m(\emptyset) = 0$; $|\mu(A)| \leq m(A) \quad \forall A \in \mathcal{C}$.

(b) $A \subset B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$ (croissance de m).

(c) Si (A_n) est une suite quelconque de parties de C on a

$$m(\bigcup A_n) = \text{Sup } m(A_n) .$$

(d) Si (A_n) est une suite décroissante de parties de C telle que

$$\bigcap A_n = \emptyset \text{ alors } m(A_n) \rightarrow 0 .$$

(e) Si (A_n) est une suite monotone de parties de C on a

$$m(\lim A_n) = \lim m(A_n) .$$

(f) Si (A_n) est une suite de parties de C deux à deux disjointes alors $\lim m(A_n) = 0$.

Preuve. -

(a) et (b) sont évidentes.

(c) 1°) Considérons d'abord une suite (A_n) de parties deux à deux disjointes et soit $A = \bigcup A_n$. D'après (b) on a $m(\bigcup A_n) \geq \text{Sup } m(A_n)$. D'autre part si $B \in \mathcal{C}$, $B \subset A$, alors $B_n = B \cap A_n \in \mathcal{C}$ et $B_n \subset A_n$. Les ensembles B_n étant deux à deux disjoints on a $\mu(B) = \sum \mu(B_n)$, d'où

$|\mu(B)| = |\sum \mu(B_n)| \leq \text{Sup } |\mu(B_n)| \leq \text{Sup } m(A_n)$ d'après (1.1.4) (a) et la relation (1) de (1.2.3), donc $m(A) \leq \text{Sup } m(A_n)$ et par suite

$$m(\bigcup A_n) = \text{Sup } m(A_n) .$$

2°) Si (A_n) est une suite quelconque, posons $B_1 = A_1$ et $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k < n} A_k$ pour $n \geq 2$.

(B_n) est une suite de parties de C deux à deux disjointes d'où $m(A_n) = m(\bigcup A_n) = m(\bigcup B_n) = \text{Sup } m(B_n) \leq \text{Sup } m(A_n)$. L'inégalité dans l'autre sens est vérifiée en vertu de la croissance de m d'où (c).

(d) Supposons que $m(A_n) \not\rightarrow 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$m(A_n) > \delta \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2) .$$

On va définir par récurrence 3 suites (A_{n_k}) , (B_{n_k}) et (E_k) comme suit :

Posons $n_1 = 1$. Comme $m(A_1) > \delta$, $\exists B_{n_1} \subset A_{n_1}$, $|\mu(B_{n_1})| > \delta$. Or la suite $(A_n \cap B_{n_1})$ est décroissante et $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \cap B_{n_1} = \emptyset$ donc $\mu(A_n \cap B_{n_1}) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, d'après (1.2.2)(c).

Donc $\exists n_2 > n_1$ tel que $|\mu(A_{n_2} \cap B_{n_1})| < \delta$. Soit $E_1 = B_{n_1} \setminus A_{n_2} \subset A_{n_1} \setminus A_{n_2}$.

On a $\mu(B_{n_1}) = \mu(E_1) + \mu(A_{n_2} \cap B_{n_1})$ et $|\mu(B_{n_1})| \leq \max\{|\mu(E_1)|, |\mu(A_{n_2} \cap B_{n_1})|\}$

d'où $|\mu(E_1)| > \delta$.

En continuant ainsi on construit la suite (A_{n_k}) et la suite (B_{n_k}) telles que

$$B_{n_k} \subset A_{n_k}, |\mu(B_{n_k})| > \delta \text{ et } |\mu(A_{n_{k+1}} \cap B_{n_k})| < \delta.$$

On pose $E_k = B_{n_k} \setminus A_{n_{k+1}} \subset A_{n_k} \setminus A_{n_{k+1}}$ (3)

et l'on trouve $|\mu(E_k)| > \delta \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (4).

D'après (3) (E_k) est une suite de parties dans C deux à deux disjointes donc $\lim \mu(E_k) = 0$ (1.2.2) (b), ce qui est en contradiction avec (4).

(e) 1°) Si (A_n) est une suite croissante on a d'après (b) et (c)

$$m(\lim A_n) = m(\bigcup A_n) = \text{Sup } m(A_n) = \lim m(A_n).$$

2°) Si (A_n) est une suite décroissante, posons $A = \lim A_n = \bigcap A_n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = A_n \setminus A$. La suite (B_n) est décroissante avec $\bigcap B_n = \emptyset$. donc $m(B_n) \rightarrow 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 | n \geq n_0 \Rightarrow m(B_n) < \varepsilon$. Or $A_n = B_n \cup A$, par suite : pour $n \geq n_0$, $m(A_n) = \text{Sup } \{m(B_n), m(A)\} \leq m(A) + \varepsilon$ donc $\lim m(A_n) \leq m(A) + \varepsilon$, comme ε est arbitraire $\lim m(A_n) \leq m(A)$. L'inégalité dans l'autre sens résulte de (b).

(f) Supposons que $m(A_n) \not\rightarrow 0$. Alors il existe $\delta > 0$ et une sous-suite (A_{n_k}) telle que $m(A_{n_k}) > \delta \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\exists B_{n_k} \subset A_{n_k}$ tel que $|\mu(B_{n_k})| > \delta \quad (5)$.

La suite (B_{n_k}) est formée d'ensembles deux à deux disjoints, ce qui montre que $(5)^k$ est en contradiction avec (1.2.2)(b).

Deux familles particulières de C retiennent l'attention : ce sont les parties négligeables et les atomes que nous allons définir dans ce qui suit :

(1.2.5) DEFINITION. - Soit $N(m) = \{A \in C ; m(A) = 0\}$. On appelle négligeable tout ensemble N appartenant à $N(m)$.

La notion d'ensembles négligeables va permettre de définir sur C la relation d'équivalence suivante :

Si $A, B \in C$, on pose $A \sim B \iff A \Delta B \in N(m)$.

Pour $A \in C$, la classe \bar{A} de A est donnée par la relation

$$\bar{A} = \{B \in C ; B = A \Delta N \text{ avec } N \in N(m)\}.$$

Quant aux atomes, on a la :

(1.2.6) DEFINITION. - On appelle atome tout ensemble $A \in C$ vérifiant :

(1) $m(A) > 0$.

(2) $B \in C \implies m(A \cap B) = 0$ ou $m(A \setminus B) = 0$.

A désignera par la suite l'ensemble des atomes.

On obtient alors les résultats suivants :

(1.2.7) PROPOSITION. -

(a) Si $A \in A$ alors $\bar{A} \subset A$ et $|\mu(A)| > 0$.

(b) Si nous appelons distincts deux atomes A et B tels que $\bar{A} \neq \bar{B}$, alors pour toute suite (A_n) d'atomes deux à deux distincts on a

$$\mu(\bigcup A_n) = \sum \mu(A_n).$$

en particulier $\lim \mu(A_n) = 0$.

Preuve. -

(a) résulte des définitions.

(b) Posons $B_1 = A_1$ et $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k < n} A_k$. La suite (B_n) est formée d'ensembles deux à deux disjoints avec $\bigcup B_n = \bigcup A_n$.

De plus $\mu(B_1) = \mu(A_1)$ et pour $n \geq 2$, $A_n = B_n \cup (\bigcup_{k < n} (A_n \cap A_k))$ d'où

$\mu(A_n) = \mu(B_n) + \mu(\bigcup_{k < n} A_n \cap A_k)$. Mais

$$|\mu(\bigcup_{k < n} A_n \cap A_k)| \leq m(\bigcup_{k < n} A_n \cap A_k) = \text{Sup}_{k < n} m(A_n \cap A_k) = 0.$$

D'où $\mu(A_n) = \mu(B_n)$ et $\mu(\bigcup A_n) = \mu(\bigcup B_n) = \Sigma \mu(B_n) = \Sigma \mu(A_n)$.

(1.2.8) PROPOSITION. - Soit $(\bar{A}_i)_{i \in I}$ la partition de A correspondant à la relation d'équivalence R . Alors I est au plus dénombrable.

Preuve. - Pour tout $i \in I$ on a $\mu(A_i) \neq 0$ (1.2.7)(a). Or tout point de K possède un système fondamental dénombrable de voisinages, donc si $\text{card}(I)$ n'était pas dénombrable, la famille $(\mu(A_i))_{i \in I}$ ne serait pas sommable. Alors il résulte de (1.1.2) que $\mu(A_i)$ ne tendrait pas vers zéro suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I . Par suite $\exists \delta > 0$; $\forall J_0$ partie finie de I , $\exists i \notin J_0$; $|\mu(B_i)| > \delta$.

Soit $i_0 \in I$ un indice quelconque; alors $\exists i_1 \neq i_0$; $|\mu(B_{i_1})| > \delta$. Pour la même raison $\exists i_2 \notin \{i_0, i_1\}$; $|\mu(B_{i_2})| > \delta$. On construirait alors une suite (B_{i_n}) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^2$, $i_n \notin \{i_0, i_1, \dots, i_{n-1}\}$ et $|\mu(B_{i_n})| > \delta$. Or la suite (B_{i_n}) est formée d'atomes deux à deux distincts ce qui implique, avec (1.2.7) que $\mu(B_{i_n}) \rightarrow 0$ et l'on aurait ainsi une contradiction.

(1.2.9) La proposition (1.2.8) nous permet de considérer une suite (A_n) de représentants des classes (\bar{A}_n) de A et on peut toujours supposer que la suite (A_n) est formée d'atomes deux à deux disjoints. Soient $S = \bigcup A_n$ et $T = X \setminus S$. Alors T ne contient aucun atome. En effet si $B \in A$ et $B \subset T$, alors $\exists k \in \mathbb{N}$; $B \in \bar{A}_k$ donc $m(A \Delta B) = 0$ mais comme $A \cap B = \emptyset$ alors $m(A \cap B) = 0$ d'où $m(A \cup B) = 0$ et par suite $m(A) = 0$ et $m(B) = 0$ ce qui est absurde.

On est maintenant en mesure d'établir le théorème principal qui caractérise les fonctions d'ensembles σ -additives définies sur une tribu C . Ce théorème est en fait intimement lié à la nature n.a. du corps K :

(1.2.10) THEOREME. - Soient X un ensemble, C une tribu de parties de X , K un corps valué n.a. complet et μ une application σ -additive de C dans K . Il existe une partition de X formée d'une suite (A_n) d'atomes et d'un ensemble négligeable T .

Preuve. - Il faut prouver que $m(T) = 0$. Montrons que si $m(T) > 0$ alors T contient un atome, ce qui contredit (1.2.9).

Soit $B_1 = T$. Posons $F(B_1) = \{E \in C ; E \subset B_1 \text{ et } m(E) = m(B_1)\}$
 $\alpha = \text{Sup}\{m(B_1 \setminus E) ; E \in F(B_1)\}$.

On construit une suite décroissante $(E_n) \subset F(B_1)$;
 $\forall n \in \mathbb{N}, m(B_1 \setminus E_n) \geq \alpha - \frac{1}{n}$. Soit $B_2 = \bigcap E_n$, on a $m(B_2) = \lim m(E_n) = m(B_1) = m(T)$ d'après (1.2.4)(e) donc $B_2 \in F(B_1)$ et $m(B_1 \setminus B_2) = \alpha$.

En répétant le même raisonnement, on construit une suite décroissante (B_n) telle que :

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, m(B_n) = m(T).$$

$$(2) \quad m(B_n \setminus B_{n+1}) = \text{Sup} \{m(B_n \setminus E) ; E \in F(B_n)\}.$$

Soit $B = \bigcap B_n$. Alors B est un atome, en effet $m(B) = \lim m(B_n) = m(T) > 0$.

D'autre part, s'il existait $F \in \mathcal{C}$; $F \subset B$ avec $m(F) > 0$ et $m(B \setminus F) > 0$; on pourrait supposer $m(F) = m(B)$. Or $\lim m(B_n \setminus B_{n+1}) = 0$ (1.2.4)(f).
Donc $\exists n_0$; $n \geq n_0 \Rightarrow m(B_n \setminus B_{n+1}) < m(B \setminus F)$.

Or $F \in \mathcal{F}(B_{n_0})$ d'où $m(B \setminus F) \leq m(B_{n_0} \setminus F) \leq m(B_{n_0} \setminus B_{n_0+1}) < m(B \setminus F)$ ce qui serait une contradiction et le théorème est démontré.

On voit ainsi que, dans les conditions du théorème (1.2.10), on peut toujours se ramener à supposer $X = \mathbb{N}$ ce qui n'est évidemment pas le cas si $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Pour avoir d'autres situations, on va donc s'occuper des fonctions d'ensembles définies sur un *clan* de parties de X , ce qui fera, entre autres, l'objet des chapitres suivants.

CHAPITRE II - MESURES A VALEURS DANS UN CORPS N.A.

2.0. NOTATIONS. - Compte tenu du chapitre précédent, on va considérer des fonctions d'ensembles définies sur un clan de parties d'un ensemble X.

Soit donc Ω un clan de parties de X. On suppose que Ω forme un recouvrement de X. On peut considérer Ω comme une base pour une topologie $T(\Omega)$ et on voit que pour cette topologie, tout $U \in \Omega$ est un ensemble à la fois ouvert et fermé (on écrit en abrégé : of).

Si $(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ est un net de parties de X, $U_\alpha \downarrow \emptyset$ signifie que le net est filtrant décroissant et que $\bigcap U_\alpha = \emptyset$.

On peut alors donner la définition suivante :

(2.1) DEFINITION. - On appelle mesure une application $\mu : \Omega \rightarrow K$ vérifiant les propriétés suivantes :

(a) $\mu(\emptyset) = 0$; $\mu(U_1 \cup U_2) = \mu(U_1) + \mu(U_2)$ si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

(b) Si $(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ est un net d'ensembles de Ω tel que $U_\alpha \downarrow \emptyset$

alors $\lim \mu(V_\alpha) = 0$ pour toute famille $(V_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de Ω telle que

$$V_\alpha \subset U_\alpha.$$

(c) Pour tout $a \in X$, il existe $U \in \Omega$ tel que $a \in U$ et $\{\mu(V) ; V \in \Omega \text{ et } V \subset U\}$ est borné pour la valeur absolue (μ est "localement" bornée).

2.2. EXEMPLE. - Soient X un espace localement compact éparpillé (c'est-à-dire dont la topologie admet une base formée d'of) et T sa topologie. Si on prend pour Ω le clan des parties ouvertes et compactes de X, on a $T = T(\Omega)$. Une fonction additive $\mu : \Omega \rightarrow K$ est alors une mesure si et seulement si pour tout $U \in \Omega$ l'ensemble $\{\mu(V) ; V \in \Omega \text{ et } V \subset U\}$ est borné pour la valeur absolue. La condition (b) est en effet satisfaite d'après la propriété d'intersection finie. Ces fonctions d'ensembles sont celles considérées dans (5) (3.2).

Le reste de ce chapitre est consacré à quelques résultats techniques concernant la mesure μ . L'introduction des fonctions à valeurs dans \mathbb{R}_+ étant indispensable, on a ainsi les définitions suivantes :

2.3. Soient μ une mesure sur un clan Ω et T la topologie engendrée par Ω . Pour tout T -ouvert G on pose $m(G) = \text{Sup}\{|\mu(U)| ; U \in \Omega, U \subset G\}$ (1).

Pour $A \subset X$, on pose $m^*(A) = \text{Inf}\{m(G) ; G \text{ } T\text{-ouvert}, G \supset A\}$ (2),

$$p(A) = \text{Inf}\{m(U) ; U \in \Omega, U \supset A\} \quad (3) \quad .$$

On a alors le lemme suivant :

(2.4) LEMME. -

(i) $m(\emptyset) = 0 ; U \in \Omega \Rightarrow |\mu(U)| \leq m(U) ; U, V \in \Omega$ et $U \subset V \Rightarrow m(U) \leq m(V)$.

(ii) Si $(V_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une suite finie d'ensembles de Ω , alors

$$m(\bigcup_k V_k) = \max_k m(V_k) .$$

(iii) Si (U_α) est un net de Ω tel que $U_\alpha \downarrow 0$ alors $m(U_\alpha) \downarrow 0$.

(iv) m, m^* et p sont des fonctions croissantes et si $U \in \Omega$ on a

$$m(U) = m^*(U) = p(U) .$$

(v) Pour tout T -ouvert G , on a $m(G) = \text{Sup}\{m(U) ; U \in \Omega, U \subset G\}$.

(vi) Pour tout T -compact, A , on a $m^*(A) = p(A)$.

Preuve. -

(i); (iv) et (v) sont évidentes.

(ii) Voir (1.2.4) (c).

(iii) Pour tout α , soit $V_\alpha \in \Omega$ tel que $V_\alpha \subset U_\alpha$ et $m(U_\alpha) \leq 2|\mu(V_\alpha)|$.

D'après (2.1) (b), $|\mu(V_\alpha)| \rightarrow 0$, il en est donc de même de $m(U_\alpha)$.

(vi) On a $m^*(A) \leq p(A)$. Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$, il existe G , T -ouvert tel que $G \supset A$ et $m(G) \leq m^*(A) + \varepsilon$. Or $G = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ ($U_\alpha \in \Omega$) donc $A \subset \bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k}$.

D'où $p(A) \leq p(\bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k}) = m(\bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k}) \leq m(G) \leq m^*(A) + \varepsilon$.

L'introduction de la fonction suivante sera d'une grande utilité :

(2.5) Pour tout $x \in X$ on pose :

$$N_{\mu}(x) = p(\{x\}) = \text{Inf}\{m(U) ; U \in \Omega, x \in U\} \quad (4).$$

Il est clair que N_{μ} est une fonction T -semi-continue inférieurement.

On a alors la relation suivante :

(2.6) PROPOSITION. - Si G est un T -ouvert on a

$$m(G) = \text{Sup}_{x \in G} N_{\mu}(x) \quad (5).$$

Preuve. - D'après (2.4) (v) et la définition de T , il suffit de montrer la relation (5) pour $U \in \Omega$. On a évidemment $m(U) \geq \text{Sup}_{x \in U} N_{\mu}(x)$. Réciproquement soit $\epsilon > 0$ un nombre positif quelconque.

Posons $s = \text{Sup}_{x \in U} N_{\mu}(x)$. L'ensemble $\Lambda = \{V \in \Omega ; m(V) \leq s + \epsilon/2\}$ est un recou-

vrement de U . De plus, si $V_1, V_2 \in \Lambda$ alors $V_1 \cup V_2 \in \Lambda$ d'après (2.4) (ii).

Donc si on pose pour $V_1, V_2 \in \Lambda : V_1 \leq V_2 \iff V_1 \subset V_2$, alors $(U \setminus V)_{V \in \Lambda}$ est un net tel que $(U \setminus V) \neq \emptyset$. Donc $m(U \setminus V) \rightarrow 0$ d'après (2.4) (iii), par suite, il existe $V \in \Lambda$ tel que $m(U \setminus V) \leq \epsilon/2$, d'où

$$m(U) = \max\{m(U \cap V), m(U \setminus V)\} \leq s + \epsilon/2 + \epsilon/2 = s + \epsilon.$$

(2.7) COROLLAIRE. - Pour tout $A \subset X$

$$m^*(A) = \text{Sup}_{x \in A} N_{\mu}(x) \quad (6)$$

Preuve. - $\forall x \in A, p(\{x\}) = m^*(\{x\}) \leq m^*(A)$ d'où $m^*(A) \geq \text{Sup}_{x \in A} N_{\mu}(x)$.

D'autre part, posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{x \in X ; N_\mu(x) < \sup_{t \in A} N_\mu(t) + \frac{1}{n}\}$.

Alors A_n est un ouvert car N_μ est T -s.c.s., de plus $A_n \supset A$ d'où

$$m^*(A) \leq m(A_n) = \sup_{x \in A_n} N_\mu(x) \leq \sup_{t \in A} N_\mu(t) + \frac{1}{n}.$$

La fonction m définie sur Ω est régulière par rapport aux compacts dans le sens suivant :

(2.8) PROPOSITION. - Soit $U \in \Omega$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $P = \{x \in U ; N_\mu(x) \geq \varepsilon\}$ est un T -compact. En particulier $m(U) < +\infty$.

Preuve. - Soit $(G_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ un recouvrement ouvert de P . Pour tout $x \in P$, il existe $U_x \in \Omega$ et $\alpha \in \Lambda$ tel que $x \in U_x \subset G_\alpha$. Montrons qu'il existe une suite finie $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ dans P telle que $P \subset \bigcup_{k=1}^n U_{x_k}$. Pour $x \in U \setminus P$, on a

$N_\mu(x) < \varepsilon$; comme N_μ est T -s.c.s. il existe $U_x \in \Omega$ tel que $x \in U_x \subset U \setminus P$ et $m(U_x) < \varepsilon$. Soit F l'ensemble des parties finies de U . Pour $F \in F$, soit

$U_F = U \setminus \bigcup_{x \in F} U_x$; $(U_F)_{F \in F}$ est un net de Ω avec $U_F \neq \emptyset$. D'après (2.4)

(iii), il existe $F_0 \in F$ tel que $m(U_{F_0}) < \varepsilon$; par suite $P \cap U_{F_0} = \emptyset$; donc

$P \subset \bigcup_{x \in F_0} U_x$. Or $P \cap U_x = \emptyset$ si $x \notin P$; d'où $P \subset \bigcup_{x \in P \cap F_0} U_x$. Comme N_μ est s.c.s.

elle est bornée sur P , donc sur U , ce qui montre que $m(U) < +\infty$ d'après (2.6).

Cette proposition montre que si $U \in \Omega$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un T -compact $P \subset U$ tel que $m(U \setminus P) < \varepsilon$.

CHAPITRE III - INTEGRALES A VALEURS DANS UN CORPS N.A.

(3.0) Ce chapitre est consacré à l'introduction et à l'étude de la notion d'intégrale définie sur un espace vectoriel de fonctions définies sur un ensemble X à valeurs dans un corps n.a. K .

Comme l'espace topologique K est éparpillé (1.1.5), cette étude fera nécessairement intervenir des topologies éparpillées sur l'ensemble X . C'est donc dans ce cadre naturel et général que l'étude est entreprise (cette situation correspond d'ailleurs à celle des topologies complètement régulières lorsque $K=\mathbb{C}$ ou \mathbb{R}).

Pour commencer, on va donc jeter un regard sur les espaces éparpillés considérés dans leur relation avec les espaces de fonctions continues à valeurs dans K .

3.1. ESPACES EPARPILLES ET FONCTIONS CONTINUES A VALEURS DANS K .

(3.1.0) NOTATIONS :

(a) X désigne un espace topologique, K un corps valué n.a. complet et b une bornologie sur K (pour plus de détails voir (4)).

(b) L'espace des fonctions $f : X \rightarrow K$ continues et telles que $f(X) \in b$ est noté $C(X, K, b)$.

(c) Si $U \subset X$, $\phi_U : X \rightarrow K$ est la fonction caractéristique de U .

(3.1.1) DEFINITION. - *On appelle espace éparpillé un espace topologique séparé dont la topologie admet une base formée d'of.*

(3.1.2) PROPOSITION. - *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) X est éparpillé.

(ii) Pour toute bornologie b , $C(X, K, b)$ définit la topologie de X .

Preuve. - (i) \implies (ii) Soient τ la topologie de X et τ' la topologie définie par $C(X, K, b)$, on a évidemment $\tau' \prec \tau$.

Soient V un ouvert de X et $a \in X$; il existe un of U tel que $a \in U \subset V$. Alors $\phi_U \in C(X, K, b)$ et $a \in \{x \in X ; |\phi_U(x) - \phi_U(a)| \leq \frac{1}{2}\} \subset V$ donc $V \in \tau'$.

(ii) \implies (i) Comme K est éparpillé, la topologie initiale associée à la famille des fonctions continues $C(X, K, b)$ admet une base d'of.

(3.1.3) PROPOSITION. - Soit X un espace topologique séparé. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout $a \in X$, l'intersection des of contenant a est égale à $\{a\}$.

(ii) Pour toute bornologie b , $C(X, K, b)$ sépare les points de X .

Preuve. -

(i) \implies (ii) Soit $x \neq y$. Il existe un of U tel que $x \in U$ et $y \notin U$. Alors

$\phi_U \in C(X, K, b)$, $\phi_U(x) = 1$ et $\phi_U(y) = 0$.

(ii) \implies (i) Soit $x \neq y$. Il existe $f \in C(X, K, b)$ telle que $f(x) \neq f(y)$. Alors $U = \{z \in X ; |f(x) - f(z)| < |f(x) - f(y)|\}$ est un of contenant x alors que $y \notin U$.

(3.1.4) PROPOSITION. - Soit X un espace localement compact. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) X est un espace éparpillé.

(ii) Pour tout $a \in X$, l'intersection des of contenant a est égale à $\{a\}$.

Preuve. - Voir (2) Cor. de la prop. 6 n° 4 §4, ch. II).

(3.1.5) PROPOSITION. - Soient X un espace compact, Ω l'algèbre de ses of, $E(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions Ω -étagées à valeurs dans K . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) X est éparpillé.
- (b) Pour tout $x \in X$, l'intersection des of contenant x est égale à $\{x\}$.
- (c) X est totalement discontinu.
- (d) $E(\Omega)$ définit la topologie de X .
- (e) $E(\Omega)$ sépare les points de X .
- (f) $C(X, K, b)$ sépare les points de X .
- (g) $C(X, K, b)$ définit la topologie de X .

Preuve. -

- (a) \iff (b) d'après (3.1.4).
- (b) \iff (c) d'après (2) prop. 6, n° 4, §4, ch. II).
- (a) \implies (d) \implies (e) \implies (f) : facile.
- (f) \implies (b) d'après (3.1.3).
- (g) \iff (a) d'après (3.1.2).

(3.1.6) PROPOSITION. - Soient X un espace éparpillé, Ω l'algèbre de ses of, et $E(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions Ω -étagées à valeurs dans K .

Considérons sur K la bornologie p des parties relativement compactes; alors $E(\Omega)$ est dense dans l'espace de Banach n.a. $C(X, K, p)$ (la norme étant définie par $f \mapsto \|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$).

$x \in X$

Preuve. - Soient $f \in C(X, K, p)$ et $\epsilon > 0$. Soit $P = \overline{f(K)}$; P est un compact de K . Pour tout $\alpha \in P$, soit $V_\alpha = \{\lambda \in K ; |\lambda - \alpha| \leq \epsilon\}$. La famille (V_α) constitue un recouvrement of de P ; il existe par suite une famille finie $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$ telle que $\bigcup_{\alpha_k} V_{\alpha_k} \supset P$. Pour tout k , $1 \leq k \leq n$, soit $A_k = f^{-1}(V_{\alpha_k})$;

A_k est un of de X et $\bigcup A_k = X$.

Posons $U_1 = A_1$ et $U_k = A_k \setminus \bigcup_{i < k} A_i$ ($2 \leq k \leq n$); alors (U_k) est une partition of finie de X . Pour tout k , $1 \leq k \leq n$, soient $x_k \in U_k$, $\lambda_k = f(x_k)$ et $\phi = \sum_{k=1}^n \lambda_k \phi_{U_k}$.

Alors $\phi \in E(\Omega)$ et $\|\phi - f\| \leq \epsilon$. En effet si $x \in X$ il existe k , $x \in U_k$, alors $|f(x) - \phi(x)| = |f(x) - \lambda_k| = |f(x) - f(x_k)| \leq \epsilon$ car $f(x)$ et $f(x_k)$ sont deux éléments de $f(U_k)$ et l'on a $f(U_k) \subset f(A_k) \subset V_{\alpha_k}$, d'où la proposition.

(3.1.7) COROLLAIRE. - Soient X un espace compact totalement discontinu, $E(\Omega)$ est dense dans l'espace de Banach n.a. $C(X, K)$.

(3.1.8) PROPOSITION. - Soient X un espace topologique séparé et $f \in C(X, K)$ Si $a \in X$ est tel que $|f(a)| > 0$, alors il existe un U contenant a tel que $|f(x)| = |f(a)| \forall x \in U$.

Preuve. - En effet, il suffit de prendre $U = \{x \in X ; |f(x) - f(a)| < |f(a)|\}$ et d'appliquer (1.1.4)(b).

3.2. LES W-ESPACES.

(3.2.1) La notion d'intégrale va être définie pour une classe d'espaces vectoriels contenant en particulier les espaces $C(X, K, b)$ du paragraphe précédent, ces espaces seront appelés W-espaces et leur définition fait l'objet de ce paragraphe.

(3.2.2) Soit E un espace vectoriel de fonctions de X dans K .

Pour $f \in E$, soit $S_f = \{x \in X ; |f(x)| \neq 0\}$.

Posons $S(E) = \{U \subset X ; \exists f \in E ; U \subset S_f\}$.

On remarque que si $1 \in E$, $S_1 = X$ et $S(E) = P(X)$.

(3.2.3) LE CLAN $\Omega(E)$. - Soit $\Omega(E) = \{U \in S(E) ; \forall f \in E \ f|_U \in E\}$.

(3.2.4) LEMME. - $\Omega(E)$ est un clan de parties de X .

Preuve. - Facile.

(3.2.5) DEFINITION. - Soit E un espace vectoriel de fonctions de X dans K . Alors E est un W -espace si :

- (i) $\Omega(E)$ est un recouvrement de X .
- (ii) Toute fonction $f \in E$ est continue pour la topologie $T(E) = T(\Omega(E))$ engendrée par $\Omega(E)$.

(3.2.6) REMARQUES :

(a) Il résulte de la condition (i) que pour tout $a \in X$, il existe $f \in E$ telle que $f(a) = 1$.

(b) Si E est un W -espace, la topologie $T(E)$ est en fait la topologie initiale associée aux fonctions $f \in E$. En effet, $T(E)$ rend continues toutes les fonctions $f \in E$. D'autre part si T' est une topologie rendant continues les fonctions $f \in E$, T' est plus fine que T , car si $U \in \Omega(E)$ et $a \in U$, il existe $f \in E$ telle que $f(a) = 1$. Alors $f \phi_U \in E$ et $a \in \{x \in X ; f \phi_U(x) \neq 0\} \subset U$. Or $\{x \in X ; f \phi_U(x) \neq 0\} \in T'$ donc $U \in T'$.

(3.2.7) EXEMPLES. - Soit X un espace éparpillé.

1° Si X est un espace localement compact, l'espace $K(X)$ des fonctions continues à support compact et à valeurs dans K est un W -espace. En effet, $\Omega(K(X))$ est la famille des ouverts compacts et $T(K(X))$ est la topologie initiale de X . C'est cet espace $K(X)$ que l'on trouve dans (5).

2° L'espace $C(X, K, b)$ est un W -espace. En effet, $\Omega(C(X, K, b))$ est l'algèbre des of de X et $T(C(X, K, b))$ est la topologie initiale de X (Voir 3.1.2).

(3.2.8) A partir d'un W -espace E , on a défini le clan $\Omega(E)$. Réciproquement, si Ω est un clan de parties de X recouvrant X , on peut considérer l'espace $E(\Omega)$ des fonctions Ω -étagées à valeurs dans K et l'on a le résultat suivant :

(3.2.9) PROPOSITION. - Soient Ω un clan de parties de X recouvrant X et $E(\Omega)$ l'espace des fonctions Ω -étagées à valeurs dans K . Alors :

- (i) $\Omega(E(\Omega)) = \Omega$.
- (ii) $E(\Omega)$ est un W -espace et $T(E(\Omega)) = T(\Omega)$.

Preuve. - Remarquons tout d'abord que toute fonction $g \in E(\Omega)$ peut se

mettre sous la forme $g = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_{V_k}$ où $(V_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une partition finie

de X par des ensembles de Ω . C'est toujours sous cette forme que l'on considérera les fonctions de $E(\Omega)$.

(i) Si $U \in \Omega$, alors $U \in S(E(\Omega))$ et si $g \in E(\Omega)$, $g = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_{V_k}$ donc

$g\phi_U = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_{U \cap V_k} \in E(\Omega)$ par suite $U \in \Omega(E(\Omega))$. Réciproquement si

$U \in \Omega(E(\Omega))$, il existe $g \in E(\Omega)$ telle que $U \subset S_g$. Or $S_g \in \Omega$ donc par

définition de $\Omega(E(\Omega))$, $\phi_{U \cap S_g} = \phi_U \phi_{S_g} \in E(\Omega)$ donc $U \cap S_g \in \Omega$, par suite

$U = U \cap S_g \in \Omega$.

(ii) $E(\Omega)$ est un W -espace car pour tout $V \in \Omega$, ϕ_V est continue pour $T(\Omega)$ qui est égale d'après (i) à $T(\Omega(E(\Omega)))$ c'est-à-dire $T(E(\Omega))$.

On est maintenant en mesure de définir l'intégrale.

3.3. INTEGRALES SUR UN W -ESPACE.

(3.3.0) NOTATIONS. - Soient X un ensemble et K un corps valué n.a. complet.

(a) Si f est une fonction de X dans K , on désigne par $|f|$ la fonction de X dans \mathbb{R}_+ définie par $|f|(x) = |f(x)|$. Si f et g sont deux fonctions de X dans K , alors $|f| \leq |g|$ signifie que pour tout $x \in X$, $|f(x)| \leq |g(x)|$.

(b) Pour un net $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de fonctions de X dans K on écrit $f_\alpha \downarrow 0$ lorsque $f_\alpha \rightarrow 0$ simplement sur X et $|f_\alpha| \leq |f_\beta|$ si $\alpha \geq \beta$

(c) Si $U \subset X$; ϕ_U désigne la fonction caractéristique de U à valeurs dans K .

(d) Dans ce paragraphe, E désignera un W -espace. On écrira Ω et T au lieu de $\Omega(E)$ et $T(E) = T(\Omega(E))$. Les propriétés topologiques qui interviendront sont relatives à T .

(3.3.1) DEFINITION. - Soit E un W -espace. On appelle intégrale sur E , toute forme linéaire $I : E \rightarrow K$ vérifiant l'une des conditions équivalentes suivantes :

(I) Soit $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ un net dans E tel que $f_\alpha \downarrow 0$. Pour tout $\alpha \in \Lambda$ soit $g_\alpha \in E$ telle que $|g_\alpha| \leq |f_\alpha|$. Alors $I(g_\alpha) \rightarrow 0$.

(I') Soit $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ un net dans E , tel que $f_\alpha \downarrow 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in \Lambda$ tel que $|I(g)| \leq \varepsilon$ pour toute $g \in E$ telle que $|g| \leq |f_\alpha|$

(3.2.2) EXEMPLES :

1° Soient X un espace compact éparpillé et $C(X, K)$ l'espace de Banach n.a. des fonctions continues de X dans K . Tout élément du dual $C(X, K)'$ est une intégrale sur $C(X, K)$.

2° Soient X un espace localement compact éparpillé et $K(X)$ l'espace des fonctions continues à support compact et à valeurs dans K . Toute forme linéaire $I : K(X) \rightarrow K$ vérifiant la condition suivante : Pour tout compact P , il existe une constante A_P telle que pour toute fonction $f \in K(X)$ dont le support est contenu dans P on ait $|I(f)| \leq A_P \|f\|$, est une intégrale. Cette définition de l'intégrale est celle donnée par MONNA (5).

Une intégrale sur E , peut d'une manière simple engendrer une famille de mesures sur Ω . Ainsi, on a :

(3.3.3) LES MESURES μ_f . - Pour toute $f \in E$, on considère la fonction d'ensembles $\mu_f : \Omega \rightarrow K$ définie comme suit $\mu_f(U) = I(f\phi_U)$ (1). Alors :

(3.3.4) LEMME. - La fonction μ_f est une mesure bornée sur Ω .

Preuve. - Il est clair que μ_f vérifie les conditions (a) et (b) de la définition (2.1). La condition (c) résulte du fait que μ_f est bornée. En effet soit $\pi \in K$ tel que $|\pi| = \lambda > 1$. Si $\text{Sup}\{|\mu_f(U)| ; U \in \Omega\} = +\infty$, il existe une suite (U_n) d'ensembles de Ω telle que $|I(f\phi_{U_n})| \geq \lambda^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or $(\pi^{-n}f) \rightarrow 0$ et $|\pi^{-n}f\phi_{U_n}| \leq |\pi^{-n}f|$; d'où $\lim_n I(\pi^{-n}f\phi_{U_n}) = 0$, ce qui est une contradiction.

Comme μ_f est une mesure, on définit comme en (2.3) la fonction m_f pour tout ouvert G en posant $m_f(G) = \text{Sup}\{|\mu(U)| ; U \subset G, U \in \Omega\} = \text{Sup}\{|I(f\phi_U)| ; U \subset G, U \in \Omega\}$ et la fonction s.c.s. N_{μ_f} qu'on écrit N_f pour simplifier.

On a $N_f(x) = \text{Inf}\{m_f(U) ; x \in U, U \in \Omega\}$.

Il s'agit maintenant de définir une fonction N_I dépendant essentiellement de l'intégrale I .

(3.5.5) PROPOSITION. - *Il existe une unique fonction s.c.s. $N_I : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $|f|_{N_I} = N_f$ pour tout $f \in E$.*

Preuve. - Soient $f, g \in E$, $a \in X$, $\varepsilon > 0$. Posons $h = f(a)g - g(a)f$ et soit $\Lambda = \{U \in \Omega ; a \in U\}$. Pour $U_1, U_2 \in \Lambda$, on pose $U_1 \leq U_2 \iff U_1 \supset U_2$, alors $(h\phi_U)_{U \in \Lambda}$ est un net avec $h\phi_U \rightarrow 0$. Il existe donc $U \in \Lambda$ tel que $V \in \Omega$ et $V \subset U \implies |I(h\phi_V)| \leq \varepsilon$. Comme N_f est s.c.s., on peut supposer que $m_f(U) \leq N_f(a) + \varepsilon$.

Alors pour $V \subset U$, on a $|f(a)\mu_g(V) - g(a)\mu_f(V)| = |I(h\phi_V)| \leq \varepsilon$, et $|\mu_f(V)| \leq m_f(V) \leq m_f(U) \leq N_f(a) + \varepsilon$, donc $|f(a)\mu_g(V)| \leq \max\{\varepsilon, |g(a)|(N_f(a) + \varepsilon)\}$ d'où $|f(a)m_g(U)| \leq \max\{\varepsilon, |g(a)|(N_f(a) + \varepsilon)\}$ et par suite $|f(a)|N_g(a) \leq \max\{\varepsilon, |g(a)|(N_f(a) + \varepsilon)\}$, comme ε est arbitraire, on obtient $|f(a)|N_g(a) \leq |g(a)|N_f(a)$.

En échangeant les rôles de f et g , on obtient l'inégalité dans l'autre sens, on a ainsi $|f|_{N_g} = |g|_{N_f}$. Pour tout $a \in X$, il existe $f_a \in E$ telle que $f(a) = 1$ (3.2.6) (a), donc il existe $U \in \Omega$ tel que $a \in U$ et $|f_a(x)| = 1 \quad \forall x \in U$ (3.1.8), on définit alors N_I sur U par $N_I = N_{f_a}$, cette définition est cohérente en vertu de la relation $|f|_{N_g} = |g|_{N_f}$ et la fonction N_I ainsi définie localement vérifie les conditions de la proposition.

La fonction N_I sera d'une grande utilité ; nous en donnons ici quelques propriétés découlant de la proposition (3.3.5). Posons d'abord pour $f \in E$, $\|f\|_I = m_f(X) = \text{Sup}\{|I(f\phi_U)|; U \in \Omega\}$. La fonction $\|\cdot\|_I$ est une semi-norme n.a. sur E et l'on a :

(3.3.6) COROLLAIRE. - Soit $f \in E$, on a :

(i) $|I(f)| \leq \|f\|_I$.

(ii) $\|f\|_I < +\infty$ et si $U \in \Omega$, $m_f(U) = \|f\phi_U\|_I$.

(iii) $\|f\|_I = \text{Sup}_{x \in X} |f(x)|_{N_I(x)}$. Donc $|f| \leq |g| \Rightarrow \|f\|_I \leq \|g\|_I$.

(iv) Pour tout $\delta > 0$, $\{x \in X ; |f(x)|_{N_I(x)} \geq \delta\}$ est compact.

(v) $\|f\|_I = \text{Sup}\{|I(g)| ; g \in E, |g| \leq |f|\}$,

(vi) $N_I(a) = \inf\{\|f\|_I ; f \in E, f(a) = 1\}$ pour tout $a \in X$.

Preuve. -

(i) Si $|I(f)| = 0$ l'inégalité est évidente.

Supposons $|I(f)| = \varepsilon > 0$. Pour $U_1, U_2 \in \Omega$ posons $U_1 \leq U_2 \Leftrightarrow U_1 \subset U_2$.

Pour $U \in \Omega$ soit $g_U = f - f\phi_U$, comme $\bigcup_{U \in \Omega} U = X$, on a $g_U \rightarrow 0$ d'où

$\lim(I(f) - I(f\phi_U)) = 0$; par suite, il existe $U \in \Omega$ tel que

$|I(f) - I(f\phi_U)| < \varepsilon = |I(f)|$. Donc $|I(f)| = |I(f\phi_U)| \leq \text{Sup}\{|I(f\phi_U)| ;$

$U \in \Omega\} = \|f\|_I$.

(ii) Résulte des définitions et de (3.3.4) et (iii) résulte de $|f|_{N_I} = N_f$ et de (2.6).

(iv) Soit $P = \{x \in X ; N_f(x) \geq \delta\}$, P est T -compact. En effet :

Soit $(G_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ un recouvrement ouvert de P . Pour tout $x \in P$, il existe $U_x \in \Omega$ et $\alpha \in \Lambda$; $x \in U_x \subset G_\alpha$. Montrons qu'il existe une suite finie $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ de P telle que $P \subset \bigcup_{x \in F} U_x$. Pour $x \in X \setminus P$ on a $N_f(x) < \delta$, comme N_f est s.c.s. et que $X \setminus P$ est ouvert, il existe $U_x \in \Omega$; $U_x \subset X \setminus P$ et $m_f(U_x) < \delta$. Soit F l'ensemble des parties finies de X . Pour $F \in F$, soit $U_F = X \setminus \bigcup_{x \in F} U_x$, $f\phi_{U_F} \in E$ et $f\phi_{U_F} \neq 0$. D'après (3.3.1) (I'), il existe $F_0 \in F$; $|I(g)| \leq \delta/2$ pour toute $g \in E$ telle que $|g| \leq |f\phi_{U_{F_0}}|$. Soit $V \in \Omega$; $V \subset U_{F_0}$ alors $|f\phi_V| \leq |f\phi_{U_{F_0}}|$ donc $|u_f(V)| = |I(f\phi_V)| \leq \delta/2$. D'où $m_f(U_{F_0}) < \delta$ et $N_f(x) < \delta \forall x \in U_{F_0}$ d'après (2.6), ce qui montre que $P \cap U_{F_0} = \emptyset$. Donc $P \subset \bigcup_{x \in F_0} U_x$. Or $P \cap U_x = \emptyset$ si $x \notin P$ d'où

$$P \subset \bigcup_{x \in P \cap F_0} U_x.$$

(v) On a $\|f\|_I = \sup\{|I(f\phi_U)| ; U \in \Omega\} \leq \sup\{|I(g)| ; |g| \leq |f|, g \in E\} < \sup\{\|g\|_I ; |g| \leq |f|, g \in E\} \leq \|f\|_I$.

(vi) Posons $N(a) = \inf\{\|f\|_I ; f \in E \text{ } f(a) = 1\}$.

Pour toute $f \in E$, $\|f\|_I \geq |f(a)|N_I(a)$; donc si $|f(a)| = 1$, $\|f\|_I \geq N_I(a)$ et par suite $N(a) \geq N_I(a)$.

Réciproquement, soit $f \in E$ telle que $f(a) = 1$. Alors

$$N_f(a) = N_I(a)|f(a)| = N_I(a).$$

$$\text{Or } N_f(a) = \inf\{m_f(U) ; U \in \Omega, a \in U\} =$$

$$\inf\{\|f\phi_U\|_I ; U \in \Omega, a \in U\} \geq \inf\{\|g\|_I ; g(a) = 1, g \in E\} = N(a).$$

(3.3.7) COROLLAIRE. - Pour tout $a \in X$, il existe $U \in \Omega$ tel que $a \in U$ et tel que pour tout $\delta > 0$, l'ensemble $\{x \in U ; N_I(x) \geq \delta\}$ est compact.

Preuve. - Il existe $f \in E$; $f(a) = 1$. Comme f est continue, il existe $U \in \Omega$ tel que $a \in U$ et $|f(x)| = 1 \quad \forall x \in U$ (3.1.8). Par suite N_I et N_f coïncident sur U et il suffit d'appliquer (2.8).

(3.3.8) COROLLAIRE. - N_I est la plus petite fonction s.c.s. ϕ telle que
$$\forall f \in E \quad |I(f)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)| \phi(x).$$

Preuve. - Soient $a \in X$ et s tel que $\phi(a) < s$, montrons que $N_I(a) \leq s$. Il existe $f \in E$; $f(a) = 1$, comme ϕ est s.c.s., il existe $U \in \Omega$ tel que $a \in U$, $\phi(x) < s$ et $|f(x)| = 1, \forall x \in U$.

Soit $V \in \Omega$; $V \subset U$ alors $|\mu_f(V)| = |I(f\phi_V)| \leq \sup_{x \in X} |f\phi_V(x)| \phi(x) = \sup_{x \in V} \phi(x) < s$; donc $m_f(U) \leq s$ et par suite $N_f(a) \leq s$.

Mais $N_f(a) = |f(a)|N_I(a) = N_I(a)$, donc $N_I(a) \leq s$.

(3.3.9) On va donner une caractérisation des intégrales sur E faisant intervenir une topologie localement K -convexe sur E . Cette caractérisation rappelle celle qu'on trouve dans le cas classique pour une mesure de Radon sur un espace complètement régulier.

Soit $\Phi(E)$ l'ensemble des fonctions s.c.s. $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ ayant la propriété suivante : pour toute $f \in E$ et tout $\delta > 0$, l'ensemble $\{x \in X ; |f(x)| \phi(x) \geq \delta\}$ est compact. $\Phi(E)$ contient les fonctions caractéristiques des compacts de X et l'on a $N_I \in \Phi(E)$ d'après (3.3.6) (iv).

A tout $\phi \in \Phi(E)$ correspond la semi-norme n.a. $\|\cdot\|_\phi$ définie par

$$\|f\|_\phi = \sup_{x \in X} |f(x)| \phi(x)$$

On appelle topologie stricte sur E la topologie localement K -convexe définie par le système des semi-normes $(\|\cdot\|_\phi)_{\phi \in \Phi(E)}$.

On a alors le théorème suivant :

(3.3.10) THEOREME. - Soit J une forme linéaire $J : E \rightarrow K$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) J est une intégrale.

(b) J est continue pour la topologie stricte.

(c) Si $f \in E$ et $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ un net dans E tel que $f_\alpha \rightarrow 0$ uniformément sur tout compact de X avec $|f_\alpha| \leq |f|$, $\forall \alpha \in \Lambda$ alors $J(f_\alpha) \rightarrow 0$.

Preuve. -

(a) \Rightarrow (b) : En effet, $|J(f)| \leq \|f\|_{N_J}$, $\forall f \in E$ d'après (3.3.6) (i), donc J est strictement continue ((9) théorème 3.4).

(b) \Rightarrow (c) : Il existe d'après (9) théorème 3.4) $\phi \in \Phi(E)$ telle que $|J(f)| \leq \|f\|_\phi$, $\forall f \in E$.

Soient $f \in E$ et $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ vérifiant les conditions de (c) et soit $\delta > 0$. L'ensemble $P = \{x \in X ; |f(x)|\phi(x) \geq \delta\}$ est un compact. Par suite ϕ est bornée sur P et comme $f_\alpha \rightarrow 0$ uniformément sur les compacts, il existe $\alpha_0 \in \Lambda$; $\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow \|f_\alpha\|_P \|\phi\|_P < \delta$

D'autre part, si $x \notin P$, on a pour tout $\alpha \in \Lambda$, $|f_\alpha(x)|\phi(x) < |f(x)|\phi(x) < \delta$.
Donc $\forall \alpha \geq \alpha_0$ $|J(f_\alpha)| \leq \|f_\alpha\|_\phi < \delta$

(c) \Rightarrow (a) : Si $(f_\alpha) \rightarrow 0$ et si pour tout α , $|g_\alpha| \leq |f_\alpha|$, on peut supposer qu'il existe $f \in E$ telle que $|f_\alpha| \leq |f|$. Le théorème de Dini montre que $f_\alpha \rightarrow 0$ uniformément sur les compacts de X ; donc il en est de même de (g_α) et par suite $J(g_\alpha) \rightarrow 0$.

Une notion aussi usuelle que le support d'une intégrale s'introduit d'une façon naturelle comme suit :

3.4. SUPPORT D'UNE INTEGRALE.

(3.4.1) Avec les notations du paragraphe précédent, posons $X_+ = \{x \in X; N_I(x) > 0\}$ et $S = \overline{X_+}$. Alors :

(3.4.2) PROPOSITION. - *S est le plus petit fermé F de X tel que*
 $f \in E \quad \text{et} \quad \|f\|_F = 0 \Rightarrow |I(f)| = 0.$

Preuve. - Si $\|f\|_S = 0$ alors $\|f\|_I = \sup_{x \in X} |f(x)| N_I(x) = 0 \Rightarrow |I(f)| = 0.$

D'autre part, si F est un fermé vérifiant les conditions de la proposition, alors $F \supset X_+$. Sinon, il existerait $a \in X_+ \setminus F$ et par suite $U \in \Omega$; $a \in U$ et $U \cap F = \emptyset$. Or il existe $f \in E$ telle que $f(a) = 1$ d'où $f\phi_U \in E$, $f\phi_U(a) = 1$ et $\|f\phi_U\|_F = 0$. Mais $\|f\phi_U\|_I = \sup_{x \in U} |f(x)| N_I(x) \geq |f(a)| N_I(a) = N_I(a) > 0.$

Donc il existe $g \in E$; $|g| \leq |f\phi_U|$ et $|I(g)| > 0$ (3.3.6) (v). Or

$\|g\|_F \leq \|f\phi_U\|_F = 0$, ce qui est une contradiction. Donc $F \supset X_+$ et par suite $F \supset S$ d'où la proposition.

(3.4.3) DEFINITION. - *On appelle support de l'intégrale I, le fermé S défini par la proposition précédente.*

(3.4.4) PROPOSITION. - *Soit G un T-ouvert de X tel que $S \cap G \neq \emptyset$. Alors il existe $f \in E$ telle que support de $f \subset G$ et $I(f) = 1$.*

Preuve. - Comme $S \cap G \neq \emptyset$, $X_+ \cap G \neq \emptyset$, soit $a \in X_+ \cap G$, il existe $U \in \Omega$ tel que $a \in U \subset G$ et il existe $g \in E$; $g(a) = 1$. D'où $g\phi_U \in E$ et $\text{Supp}(g\phi_U) \subset U \subset G$. Comme $g\phi_U(a) = 1$, $\|g\phi_U\|_I > 0$, donc il existe $f' \in E$ telle que $|f'| \leq |g\phi_U|$ et $|I(f')| > 0$. Il suffit alors de prendre $f = I(f')^{-1} \cdot f'$.

CHAPITRE IV. - L'ESPACE DES FONCTIONS INTEGRABLES.

4.1. PROLONGEMENT DE L'INTEGRALE : L'ESPACE $L(I)$.

(4.1.0) Soient X un ensemble, E un W -espace, $\Omega = \Omega(E)$, $T = T(\Omega(E)) = T(E)$ et I une intégrale sur E .

Le problème qui se pose est de savoir s'il est possible de prolonger la forme linéaire I à un espace contenant E . La technique utilisée dans le cas classique et qui se sert essentiellement de l'ordre sur \mathbb{R} , fait défaut ici. Cependant la fonction N_I va nous permettre de surmonter cette difficulté, et l'on procède de la manière suivante :

Pour toute fonction $g : X \rightarrow K$ on pose $\|g\|_I = \sup_{x \in X} |g(x)| N_I(x)$. Soit $F(I) = \{g : X \rightarrow K ; \|g\|_I < +\infty\}$.

$F(I)$ est un espace semi-normé n.a. contenant E (3.3.6)(ii). On désigne par $L(I)$ l'adhérence de E dans $F(I)$.

$L(I)$ est l'ensemble des fonctions intégrables : c'est un espace vectoriel muni de la semi-norme n.a. $\|\cdot\|_I$.

Il existe alors un unique prolongement linéaire I^* de I à $L(I)$ vérifiant $|I^*(g)| \leq \|g\|_I \quad \forall g \in L(I) \quad (1)$.

On peut définir I^* comme suit :

Si $g \in L(I)$, il existe une suite $(f_n) \subset E$ telle que $\lim \|g - f_n\|_I = 0$.

On pose $I^*(g) = \lim I(f_n) \quad (2)$.

D'après la relation $|I(f)| \leq \|f\|_I$ (qui exprime en fait la continuité de I sur $(E, \|\cdot\|_I)$), on voit que la limite du membre droit de (2) existe, car la suite $(I(f_n))$ est de Cauchy dans K , que cette limite ne dépend pas de la suite (f_n) particulière et qu'enfin la relation (1) est vérifiée.

Nous donnerons dans la suite quelques caractérisations de l'espace $L(I)$. On a d'abord le lemme suivant :

(4.1.1) LEMME. - Soient $P \subset Y \subset X$ avec P partie T -compacte. Pour toute fonction f T -continue de Y dans K et tout $\delta > 0$, il existe $g \in E$ telle que :

$$\|g\|_X \leq \|f\|_P ; |g| < |f| \text{ sur } Y \text{ et } \|g-f\|_P < \delta .$$

Preuve. - Comme P est compact, $s = \|f\|_P < +\infty$. Supposons $\delta s^{-1} < 1$.
 l'ensemble $P' = \{x \in P ; |f(x)| \geq \delta\}$ est compact.

Pour tout $a \in P'$, il existe $g_a \in E$ telle que $g_a(a) = 1$ et $U_a \in \Omega$ tel que $a \in U_a \subset \{x \in X ; |g_a(x) - 1| < \delta s^{-1}\}$ et $Y \cap U_a \subset \{x \in X ; |f(x) - f(a)| < \delta\}$.
 Comme $\delta s^{-1} < 1$, et que $|f(a)| \geq \delta$, $|g_a| = 1$ sur U_a et $|f| = |f(a)|$ sur $Y \cap U_a$ (1.1.4)(b).

P' étant compact, il existe un recouvrement fini $(U_{a_k})_{1 \leq k \leq n}$ de P .

Soient $V_1 = U_{a_1}$ et $V_k = U_{a_k} \setminus \bigcup_{i < k} U_{a_i}$ ($2 \leq k \leq n$); on obtient un recouvrement

$(V_k)_{1 \leq k \leq n}$ de P' par des ensembles de Ω deux à deux disjoints. Si $x \in V_k \cap Y$,

alors $|g_{a_k}(x)| = 1$ et $|f(x)| = |f(a_k)|$. Soit $g = \sum_{k=1}^n f(a_k) g_{a_k} \phi_{V_k}$. Alors

$g \in E$ et $\|g\|_X \leq \|f\|_P$. Montrons que $|g| \leq |f|$ sur Y . Si $x \notin \bigcup V_k$, le résultat est immédiat et si $x \in V_k$, $|g(x)| = |f(a_k)| = |f(x)|$.

Enfin, soit $x \in P$. Si $x \in V_k$, alors

$$|g(x) - f(x)| = |f(a_k)g_{a_k}(x) - f(x)| = |f(a_k)(g_{a_k}(x) - 1) + f(a_k) - f(x)| \leq \max(\delta s^{-1}, \delta) = \delta.$$

Si $x \notin \bigcup V_k$ alors $x \notin P'$, d'où $|g(x) - f(x)| = |f(x)| < \delta$. Donc $\|g - f\|_P \leq \delta$.

Pour $t > 0$, posons $X_t = \{x \in X ; N_I(x) \geq \frac{1}{t}\}$.

On obtient alors la caractérisation suivante de $L(I)$, améliorant ainsi la caractérisation donnée par (5), 6.5).

(4.1.2) THEOREME. - Pour qu'une fonction $f : X \rightarrow K$ soit intégrable, il faut il suffit qu'elle vérifie les deux conditions suivantes :

- (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est T -continue sur X_n .
- (b) Pour tout $\delta > 0$, l'ensemble $\{x \in X ; |f(x)| N_I(x) \geq \delta\}$ est un compact contenu dans un X_n .

Preuve. - La condition est nécessaire :

(a) Soit $f \in L(I)$, il existe une suite $(g_k) \subset E$ telle que $\lim \|f - g_k\|_I = 0$.

Donc la suite (g_k) converge uniformément vers f et ceci sur tout X_n , ce qui montre que f est continue sur chaque X_n .

(b) Soient $\delta > 0$ et $g \in E$ tels que $\|f-g\|_I < \delta$.

L'ensemble $Q = \{x \in X ; |g(x)|_{N_I(x)} \geq \delta\}$ est compact (3.3.6)(iv). Soit

$n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} \|g\|_Q < \delta$ et soit $P = Q \cap X_n$; P est un compact contenu dans X_n . Mais $P' = \{x \in X ; |f(x)|_{N_I(x)} \geq \delta\} \subset P$. En effet, si $x \notin Q$, $|g(x)|_{N_I(x)} < \delta$ et si $x \in Q \setminus P$, $|g(x)|_{N_I(x)} < \frac{1}{n} \|g\|_Q < \delta$

Par suite si $x \notin P$, $|f(x)|_{N_I(x)} \leq \max\{|f(x)-g(x)|_{N_I(x)}, |g(x)|_{N_I(x)}\} < \delta$.

Comme f est continue sur X_n et que X_n est fermé, P' est fermé donc compact.

Réciproquement, montrons que si f vérifie (a) et (b), alors pour tout $\delta > 0$, il existe $g \in E$; $\|f-g\|_I < \delta$.

Soit $P = \{x \in X ; |f(x)|_{N_I(x)} \geq \delta\}$; P est un compact contenu dans un X_n ; par suite f et N_I sont bornées sur P ; il existe $c > 0$ tel que $\max(\|f\|_P, \|N_I\|_P) < c$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{k} \leq \min(\frac{1}{n}, \delta c^{-1})$. En vertu du lemme (4.1.1), il existe $g \in E$ telle que $\|g\|_X \leq \|f\|_P$, $|g| \leq |f|$ sur X_k et $\|g-f\|_P \leq \frac{1}{k}$. Alors si $x \in P$, $|g(x)-f(x)|_{N_I(x)} \leq \frac{1}{k} c \leq \delta$,

si $x \in X_k \setminus P$, $|g(x)-f(x)|_{N_I(x)} \leq \max(|g(x)|_{N_I(x)}, |f(x)|_{N_I(x)}) = |f(x)|_{N_I(x)} \leq \delta$,

si $x \notin X_k$, $|g(x)-f(x)|_{N_I(x)} \leq \max(|g(x)|_{N_I(x)}, |f(x)|_{N_I(x)}) \leq \max(\|f\|_{P_k}, \delta) \leq \delta$.

Donc $\|g-f\|_I \leq \delta$. La démonstration est ainsi achevée.

(4.1.3) DEFINITION. - Un ensemble $A \subset X$ est dit intégrable si sa fonction caractéristique $\phi_A : X \rightarrow K$ est intégrable.

Désignons par $\Omega(I)$ la classe des ensembles intégrables.

Le théorème précédent donne alors le corollaire suivant :

(4.1.4) COROLLAIRE. -

(a) $\Omega(I)$ est un clan de parties de X recouvrant X .

(b) Pour que $A \in \Omega(I)$, il faut et il suffit que :

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A \cap X_n$ soit un of de X_n .

(ii) Pour tout $\delta > 0$, il existe un compact P contenu dans un X_n tel que $\|A \setminus P\|_I = \|\phi_{A \setminus P}\|_I \leq \delta$.

Preuve. -

(a) résulte de (b) et de (3.3.7).

(b) découle immédiatement de (4.3.3).

A partir d'un W -espace E et d'une intégrale I sur E , on a défini un espace $L(I)$ et une forme linéaire I^* . Il est intéressant de voir si l'on se retrouve en présence d'une situation analogue, c'est-à-dire avec un W -espace et une intégrale, et par conséquent s'il est possible de prolonger encore une fois l'intégrale I^* .

La réponse est donnée par les résultats suivants où nous commençons par définir la topologie T^* liée à l'espace $L(I)$.

(4.1.5) LA TOPOLOGIE T^* . - Soit $\Omega^* = \{U \subset X ; \forall n \in \mathbb{N}, U \cap X_n \text{ est un of de } X_n \text{ pour la topologie induite par } T(E) \text{ sur } X_n\}$.

Ω^* est une base pour une topologie notée T^* , et l'on voit que tout $U \in \Omega^*$ est un T^* -of et qu'une fonction $f : X \rightarrow K$ est T^* -continue si et seulement si f est T -continue sur chaque X_n . Alors :

(4.1.6) PROPOSITION. - $L(I)$ est un W -espace et $T^* = T(L(I))$.

Preuve. - Si $\Omega(I)$ désigne la classe des ensembles intégrables, on a pour tout $U \in \Omega^*$, $U = \bigcup_{V \in \Omega(I)} U \cap V$ (d'après 4.1.4, (a)). Or si $U \in \Omega^*$ et

$V \in \Omega(I)$, $U \cap V \in \Omega(I)$, par suite $\Omega(I)$ et Ω^* définissent la même topologie T^* . Comme $\Omega(I) \subset \Omega(L(I))$ (voir 3.2.3) et que toute fonction $f \in L(I)$ est

T^* -continue (4.1.2, (a)), il s'ensuit que $L(I)$ est un W -espace et que $T^* = T(L(I)) = T(\Omega(L(I)))$ d'après (3.2.5).

Dans ces conditions, on obtient le :

(4.1.6) THEOREME. - I^* est une intégrale sur $L(I)$. De plus $N_{I^*} = N_I$ donc $L(I^*) = L(I)$ et $I^{**} = I^*$.

Preuve. - Pour montrer que I^* est une intégrale, il suffit de montrer que $N_I \in \Phi(L(I))$ ((3.3.9) et (4.1.0) relation (1)).

1° N_I étant T -s.c.s., elle est aussi T^* -s.c.s. car $T \subset T^*$.

2° Soient $f \in L(I)$ et $\delta > 0$. Posons $P = \{x \in X ; |f(x) N_I(x)| \geq \delta\}$. P est un T -compact contenu dans un X_n . Comme T et T^* induisent sur X_n la même topologie, on voit que P est T^* -compact donc $N_I \in \Phi(L(I))$.

Montrons maintenant que $N_I = N_{I^*}$.

D'après (3.3.8) et (4.1.0) relation (1), on a $N_{I^*} \leq N_I$.

Pour montrer l'inégalité dans l'autre sens, supposons qu'il existe $a \in X$ tel que $N_{I^*}(a) < N_I(a)$. Alors il existe $t > 0$, tel que $N_{I^*}(a) < t < N_I(a)$. Il existe $U \in \Omega^*$ tel que $a \in U \subset \{x \in X ; N_{I^*}(x) < t\}$. Comme $U \in \Omega^*$, il existe un T -of de V tel que $U \cap X_{t^{-1}} = V \cap X_{t^{-1}}$. Donc $U \cup X \setminus X_{t^{-1}} = V \cup X \setminus X_{t^{-1}}$ est un T -ouvert contenant a . D'autre part, il existe $f \in E$ telle que $|f| \leq 1$ et $f(a) = 1$ (en effet il existe $g \in E ; g(a) = 1$ et $U \in \Omega ; |g(x)| = 1$ sur U , il suffit de prendre $f = g \phi_U$).

Ainsi :

$$t < |f(a)| N_I(a) = N_f(a) \leq m_f(U \cup X \setminus X_{t^{-1}}) = \text{Sup}\{|u_f(W)| ; W \in \Omega, W \subset U \cup X \setminus X_{t^{-1}}\}.$$

Donc il existe $W \in \Omega ; W \subset U \cup X \setminus X_{t^{-1}}$ avec $t < |I(f \phi_W)|$ comme $f \phi_U \phi_W \in L(I)$ on a :

$$|I^*(f \phi_W - f \phi_{W \cap U})| \leq |f \phi_W - f \phi_{W \cap U}|_I \leq |\phi_W - \phi_{W \cap U}|_I = \text{Sup}_{x \in W \setminus U} N_I(x) \leq \text{Sup}_{x \in X \setminus X_{t^{-1}}} N_I(x) \leq t.$$

Par suite, $|I^*(f\phi_W) - I^*(f\phi_{W \cap U})| \leq t < |I^*(f\phi_W)|$ et $t < |I^*(f\phi_{W \cap U})|$.

D'où $t < |I^*(f\phi_{W \cap U})| \leq \|f\phi_{W \cap U}\|_{I^*} = \sup_{x \in W \cap U} |f(x)| N_{I^*}(x) \leq \sup_{x \in U} N_{I^*}(x) \leq t$, ce

qui est une contradiction.

Le reste du théorème est maintenant immédiat.

La topologie T^* va nous permettre de donner une caractérisation plus élégante de l'espace $L(I)$. Mais on aura d'abord besoin de quelques propriétés de T^* .

La première précise la relation entre les T^* -compacts et les T -compacts.

Ainsi :

(4.1.7) LEMME. - Soit $P \subset X$. Pour que P soit T^* -compact, il faut et il suffit qu'il soit T -compact et qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P \setminus X_n$ soit fini.

Preuve. - La condition est suffisante, car les topologies T et T^* coïncident sur chaque X_n .

Réciproquement, supposons que P soit T^* -compact.

Soient $X_+ = \{x \in X ; N_I(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$; $X_0 = \{x \in X ; N_I(x) = 0\}$

$P_+ = P \cap X_+$ et $P_0 = P \cap X_0$.

Pour tout $x \in X_0$, $\{x\} \in \Omega^*$, de même $X_0 \in \Omega^*$ donc X_0 est un ensemble T^* -discret et T^* -of. Donc P_0 est T^* -compact et discret et par suite fini. Il suffit donc de montrer que P_+ est contenu dans un X_n . Supposons le contraire, on va alors construire une suite (U_n) de parties de Ω deux à deux disjointes telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

(a) $U_k \cap P_+ \neq \emptyset$.

(b) $P_+ \setminus U_1 \cup U_1 \cup \dots \cup U_k$ n'est contenu dans aucun X_n .

(c) $U_k \cap X_k = \emptyset$.

Soit $k=1$, il existe $a \in P_+ \setminus X_1$, comme $P_+ \subset X_+$, il existe $n > 1$ tel que $a \in X_n$, alors soit $b \in P_+ \setminus X_n$.

On a donc $a, b \in P_+ \setminus X_1$ avec $N_I(a) > N_I(b)$, comme N_I est T -s.c.s., il existe $U \in \Omega$ tel que $b \in U$ et $a \notin U$.

Si $P_+ \setminus U$ n'est contenu dans aucun X_n , on pose $U_1 = U$.

Sinon, alors $P_+ \cap U$ n'est contenu dans aucun X_n . Mais a appartient à l'ouvert $U^c \cap X_1^c$, donc il existe $V \in \Omega$ tel que $a \in V \subset U^c \cap X_1^c$. Alors $P_+ \cap V \neq \emptyset$, $P_+ \setminus V \supset P_+ \cap U$ et l'on pose $U_1 = V$.

Supposons la suite (U_n) construite jusqu'au rang $k-1$ et soit

$$Q = P_+ \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} U_i.$$

Comme Q n'est contenu dans aucun X_n , il existe $a, b \in Q$ tels que $N_I(a) > N_I(b)$ et $a, b \notin X_k$; par suite il existe $W \in \Omega$ tel que $b \in W$ et $a \notin W$.

Si $Q \setminus W$ n'est contenu dans aucun X_n , il existe $U_k \in \Omega$ tel que

$$b \in U_k \subset W \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} U_i \right) \cup X_k.$$

Si $Q \cap W$ n'est contenu dans aucun X_n , comme $a \in W^c \cap U_1^c \cap \dots \cap U_{k-1}^c \cap X_k^c$, il existe $U_k \in \Omega$ tel que $a \in U_k \subset W^c \cap U_1^c \dots \cap U_{k-1}^c \cap X_k^c$ et l'on a $Q \setminus U_k \supset Q \cap W$.

La suite (U_n) étant construite soit $U = \bigcup U_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U \cap X_n = \bigcup_{k < n} (U_k \cap X_n)$ donc $U \in \Omega^*$.

Alors la famille $\{X \setminus U, U_1, U_2, \dots\}$ est un recouvrement T^* -ouvert de P n'ayant aucun sous-recouvrement fini, ce qui contredit la T^* -compacité de P .

Avec cette propriété, on peut donner une autre caractérisation de $L(I)$.

(4.1.8) THEOREME. - Pour que $f : X \rightarrow K$ soit intégrable, il faut et il suffit qu'elle vérifie les deux conditions suivantes :

(a) f est T^* -continue.

(b) Pour tout $\delta > 0$, $\{x \in X ; |f(x)|_{N_I(x)} \geq \delta\}$ est T^* -compact.

Preuve. - Le théorème résulte de (4.1.2), (4.1.5) et (4.1.7).

La topologie T^* est, en quelque sorte, définie par ses compacts.

En effet :

(4.1.9) LEMME. - Soit $U \subset X$. Si pour tout T^* -compact P , $U \cap P$ est T^* -ouvert pour la topologie induite sur P par T^* , alors U est un T^* -ouvert.

Preuve. - Il suffit de démontrer que pour tout $g \in L(I)$, $g \phi_U \in L(I)$. Car pour tout $a \in U$, il existe $g \in L(I)$ telle que $g(a) = 1$, comme $g \phi_U \in L(I)$ et que toute fonction de $L(I)$ est T^* -continue, il existe $V \in \Omega^*$ tel que $a \in V$, $|g \phi_U(x)| = 1$ et $|g(x)| = 1 \quad \forall x \in V$, alors $a \in V \subset U$ donc U est T^* -ouvert et il en est de même de U^c .

Soit donc $g \in L(I)$ et soit $\delta > 0$, alors $P = \{x \in X ; |g(x)|_{N_I(x)} \geq \delta\}$ est T^* -compact, par suite il existe un T^* -ouvert V tel que $U \cap P = V \cap P$. Mais $g \phi_V \in L(I)$ et $\|g \phi_V - g \phi_U\|_I \leq \delta$ donc $g \phi_U \in L(I)$.

(4.1.10) COROLLAIRE. - Pour que $f : X \rightarrow K$ soit T^* -continue, il faut et il suffit que sa restriction à tout T^* -compact soit T^* -continue.

Comme dans le cas classique l'espace $L(I)$ est complet. Cela résulte de la :

(4.1.11) PROPOSITION. - L'espace $F(I) = \{f : X \rightarrow K ; \|f\|_I < +\infty\}$ muni de la semi-norme n.a. $\|\cdot\|_I$ est complet.

Preuve. - Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $F(I)$.

Si $x \in X_+ = \{x \in X ; N_I(x) > 0\}$ la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy dans K et par suite convergente, soit $f(x)$ sa limite.

Si $x \in X_0 = \{x \in X ; N_I(x) = 0\}$ on pose par exemple $f(x) = 0$. Alors

1° $f \in F(I)$. En effet, il existe $n_0 ; n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f_{n_0}\|_I \leq 1$ et

$$\|f_n\|_I \leq \|f_{n_0}\|_I + 1 .$$

Si $x \in X_+$ est tel que $|f(x)| > 0$, il existe p_0 que l'on peut prendre supérieur à n_0 tel que $n \geq p_0 \Rightarrow |f_n(x)| = |f(x)|$ d'où

$$|f(x)| N_I(x) = |f_n(x)| N_I(x) \leq \|f_n\|_I$$

$$\leq \|f_{n_0}\|_I + 1 ;$$

si $x \in X_0$, où x est tel que $f(x) = 0$, on a $|f(x)| N_I(x) = 0$, par suite

$$\|f\|_I \leq \|f_{n_0}\|_I + 1 < +\infty .$$

2° $f_n \rightarrow f$ dans $F(I)$. En effet, soit $\delta > 0$, il existe $n_0 ; p, q \geq n_0 \Rightarrow \|f_p - f_q\|_I \leq \delta$.

Soit $x \in X_+$, il existe $p = p(x) \in \mathbb{N}$ que l'on peut prendre supérieur à n_0 tel que $|f_p(x) - f(x)| N_I(x) < \delta$; d'où pour $n \geq n_0$

$$|f_n(x) - f(x)| N_I(x) \leq \max(|f_n(x) - f_p(x)| N_I(x), |f_p(x) - f(x)| N_I(x)) \leq \delta .$$

D'où $\|f_n - f\|_I \leq \delta, \forall n \geq n_0$.

(4.1.12) COROLLAIRE. - $L(I)$ est un espace semi-normé n.a. complet.

Une partie partout dense de $L(I)$ est définie par la

(4.1.13) PROPOSITION. - Soient E un W -espace, $\Omega = \Omega(E)$ et I une intégrale sur E . Soit $\Omega_I = \{U \in \Omega ; \phi_U \in L(I)\}$ et désignons par $E(\Omega_I)$ l'espace vectoriel des fonctions Ω_I -étagées et à valeurs dans K . Alors $E(\Omega_I)$ est partout dense dans $L(I)$.

Preuve. - Comme $\bar{E} = L(I)$, il suffit de démontrer que $E \subset \overline{E(\Omega_I)}$. Soit donc $f \in E$ et soit $\delta > 0$. Posons $P = \{x \in X ; |f(x)|_{N_I(x)} \geq \delta\}$; P est T -compact. Comme N_I est s.c.s. on a $s = \sup_{x \in P} N_I(x) < +\infty$. D'autre part, si $x \in P, |f(x)| > 0$, comme $|f|$ est continue $\varepsilon = \inf_{x \in P} |f(x)| > 0$. Par une démonstration analogue à celle du lemme (4.1.1), on peut trouver une fonction $\phi \in E(\Omega_I)$ telle que $|\phi| \leq |f|$ et $||\phi - f|| < \min(\varepsilon, \delta/s)$ et l'on vérifie alors que $||\phi - f||_I \leq \delta$.

4.2. FONCTIONS NEGLIGEABLES ET ENSEMBLES NEGLIGEABLES.

(4.2.1) DEFINITION . -

- (a) Une fonction $f : X \rightarrow k$ est dite négligeable si $||f||_I = 0$.
- (b) Un ensemble $A \subset X$ est dit négligeable si $||\phi_A||_I = 0$. Désignons par F_0 l'ensemble des fonctions négligeables.

Cette définition entraîne quelques commentaires .

(4.2.2) REMARQUES ET DEFINITIONS :

- (a) Il existe un plus grand ensemble négligeable à savoir l'ensemble $X_0 = \{x \in X ; N_I(x) = 0\}$. Il est à noter que cette situation n'a pas d'équivalent dans le cas classique.

(b) F_0 est un sous-espace vectoriel fermé de $F(I)$ et il est contenu dans $L(I)$.

(c) Deux fonctions f et g sont dites équivalentes si $f - g \in F_0$. Dans ce cas, on a $||f||_I = ||g||_I$.

(d) Une propriété est dite vraie presque partout (p.p.) si elle est vraie en tout point de X sauf peut-être en des points de X_0 . Alors une fonction est négligeable si et seulement si elle est nulle presque partout. Une fonction définie presque partout et égale presque partout à une fonction intégrable peut être considérée comme définie partout et intégrable.

(e) Nous posons $F(I) = F(I)/F_0$ et $L(I) = L(I)/F_0$ avec la norme quotient.

On a alors :

(4.2.3) THEOREME. - *L'espace $L(I)$ des classes des fonctions intégrables est un espace de Banach n.a.*

D'après ce qui précède, la forme linéaire I^* peut être considérée comme définie sur $L(I)$.

4.3. FONCTIONS MESURABLES ET CONVERGENCE SELON EGOROFF : THEOREME DE LEBESGUE.

(4.3.1) On peut donner d'une fonction mesurable une définition analogue à celle qu'on trouve dans Bourbaki (1). Cette définition a été d'ailleurs adoptée par MONNA (5).

(4.3.2) DEFINITION. - *Une fonction $f : X \rightarrow K$ est dite mesurable si pour tout T -compact P et tout $\delta > 0$, il existe un T -compact Q tel que $\|\phi_{P \setminus Q}\|_I \leq \delta$ et tel que la restriction de f à Q est T -continue.*

On a alors la caractérisation suivante :

(4.3.3) PROPOSITION. - *Pour qu'une fonction $f : X \rightarrow K$ soit mesurable, il faut et il suffit qu'elle soit T^* -continue.*

Preuve. - Supposons que f soit T^* -continue. Soient P un T -compact et $\delta < 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} \leq \delta$, alors $Q = P \cap X_n$ est T -compact avec $\|\phi_{P \setminus Q}\|_I \leq \delta$. Comme T et T^* coïncident sur X_n , f est T -continue sur Q .

Réciproquement, si f est mesurable, montrons qu'elle est T^* -continue. D'après (4.1.10), il suffit de démontrer qu'elle est T^* -continue sur tout T^* -compact P . Soit donc P un T^* -compact, d'après (4.1.7) il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P \setminus X_n$ est fini. Comme P est T -compact et que f est mesurable, il

existe un T -compact Q tel que $\|\phi_{Q \setminus P}\|_I \leq \frac{1}{n}$ (donc $Q \supset P \cap X_n$) et f est T -continue sur Q donc sur $P \cap X_n$ et par suite T^* -continue sur $P \cap X_n$ car $T \subset T^*$, finalement f est T^* -continue sur P .

(4.3.4) REMARQUES. -

(a) On voit d'après (4.3.3) et (4.1.5) que la topologie T^* est en fait engendrée par les ensembles mesurables. Le théorème (4.1.8) montre que toute fonction intégrable est mesurable.

(b) La proposition (4.3.3) montre aussi que les fonctions mesurables forment un anneau. Par contre une limite simple d'une suite de fonctions mesurables n'est pas nécessairement mesurable. Pour obtenir une limite mesurable, on introduit la notion suivante due à MONNA (5) :

(4.3.5) DEFINITION. - On dit que le net $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge selon Egoroff vers f si pour tout T -compact P et tout $\delta > 0$, il existe un T -compact Q tel que $\|\phi_{P \setminus Q}\|_I \leq \delta$ et que f converge uniformément vers f sur Q .

Par une démonstration analogue à celle de (4.3.3) on trouve

(4.3.6) PROPOSITION. - La convergence selon Egoroff est exactement la convergence uniforme sur les T^* -compacts de $X_+ = \{x \in X ; N_+(x) > 0\}$.

(4.3.7) Il résulte de (4.3.3) qu'une fonction égale presque partout à une fonction mesurable est mesurable et que la limite selon Egoroff d'un net de fonctions mesurables est aussi mesurable. D'autre part, si une suite (f_n) de fonctions mesurables converge selon Egoroff vers une fonction f , elle converge vers f presque partout, mais la réciproque, vraie dans le cas classique, n'est plus valable dans le cas non archimédien.

Ceci étant, le théorème de convergence de Lebesgue peut s'énoncer :

(4.3.8) THEOREME. - Soient g une fonction intégrable et $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ un net de fonctions intégrables convergeant vers f selon Egoroff et tel que pour tout $\alpha \in \Lambda$, $|f_\alpha| \leq |g|$ p.p.

Alors la fonction f est intégrable et l'on a $I^*(f) = \lim I^*(f_\alpha)$.

Preuve. - Comme (f_α) converge vers f selon Egoroff, f est mesurable.

D'autre part, $|f_\alpha| \leq |g|$ p.p. et ceci pour tout α , donc $|f| \leq |g|$ p.p. et f est intégrable (4.1.8).

Pour tout $\alpha \in \Lambda$, soit $h_\alpha = f - f_\alpha$, on a :

$$|h_\alpha| = |f - f_\alpha| \leq \max(|f|, |f_\alpha|) \leq \max(|f|, |g|) \leq |g| \text{ et ceci presque partout.}$$

Il suffit alors d'appliquer la partie (c) du théorème (3.3.10) au net (h_α)

en remplaçant J par I^* et T par T^* et en remarquant que la démonstration reste valable si on remplace la condition $|h_\alpha| \leq |g|$ par la condition

$|h_\alpha| \leq |g|$ presque partout et en se limitant à la convergence uniforme sur les T^* -compacts de X_+ .

4.4. L'ESPACE $L^\infty(I)$.

(4.4.1) Par analogie avec le cas classique on va considérer l'espace $L^\infty(I)$ des fonctions mesurables essentiellement bornées et en examiner quelques propriétés.

(4.4.2) DEFINITION. - Désignons par $L^\infty(I)$ l'espace des fonctions mesurables f telles que $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X_+} |f(x)| < +\infty$.

On note $L^\infty(I)$ le quotient de $L^\infty(I)$ par le sous-espace F_0 des fonctions négligeables.

Avec la semi-norme $\|\cdot\|_\infty$, $L^\infty(I)$ est un espace semi-normé n.a. ; on vérifie qu'il est complet, d'où :

(4.4.3) PROPOSITION. - L'espace $L^\infty(I)$ est un espace de Banach n.a.

(4.4.4) LEMME. - Soient $f \in L^\infty(I)$ et $g \in L(I)$. Alors $fg \in L(I)$ et $\|fg\|_I \leq \|f\|_\infty \|g\|_I$.

Preuve. - Facile.

Si $g \in L^\infty(I)$ (resp. $L(I)$), \dot{g} désigne la classe dans $L^\infty(I)$ (resp. $L(I)$) de g . On a alors, en écrivant I au lieu de I^* :

(4.4.5) PROPOSITION. - Soit $f_0 \in L^\infty(I)$. L'application $\dot{g} \rightarrow I(f_0g)$ est une forme linéaire continue sur $L(I)$ dont la norme est $\|f_0\|_\infty$

Preuve. - On vérifie que l'application $I_{f_0} : g \rightarrow I(f_0g)$ ne dépend que des classes dans $L(I)$ et $L^\infty(I)$. Cette application est continue en vertu du lemme (4.4.4) et sa norme est donnée par la relation $\|I_{f_0}\| = \sup_{g \neq 0} \|g\|_I^{-1} |I(f_0g)|$.

Si $g \in L(I)$; $g \neq 0$ alors $|I(f_0g)| \leq \|f_0g\|_I \leq \|f_0\|_\infty \|g\|_I$ donc

$$\|g\|_I^{-1} |I(f_0g)| \leq \|f_0\|_\infty \text{ d'où } \|I_{f_0}\| \leq \|f_0\|_\infty$$

Montrons l'inégalité dans l'autre sens :

soit $\delta > 0$; posons $s_0 = \|f_0\|_\infty$ et $\epsilon = \min(\delta, \frac{\delta}{s_0+2})$.

Il existe $x_0 \in X_+$; $|f_0(x_0)| \geq s_0 - \epsilon$. Soient $\pi_0 = f_0(x_0)$ et $a_0 = |\pi_0|$.

La fonction f_0 est mesurable, donc T^* -continue, par suite il existe $V \in \Omega^*$ tel que $x_0 \in V$ et $x \in V \Rightarrow |f_0(x) - f_0(x_0)| < \min(\epsilon, a_0)$.

D'autre part, il existe $h \in E$ et $U \in \Omega$ tels que $x_0 \in U$, $|h(x)| = 1$ si $x \in U$ et $h(x) = 0$ si $x \notin U$. Soient $W = U \cap V$ et $k = h\phi_W$, alors $W \in \Omega^*$ et $k \in L(I)$.

Si $x \in W$, $|k(x)| = 1$ et $|f_0(x)| = a_0$, si $x \notin W$, $k(x) = 0$.

Or $\|k\|_I = \sup \{|I(g)| ; g \in L(I), |g| \leq |k|\}$. Donc, il existe $g \in L(I)$ telle que $|g| \leq |k|$ et $|I(g)| \geq (1-\epsilon)\|k\|_I$. D'où $|I(g)| \geq (1-\epsilon)\|g\|_I$ et $|I(\pi_0g)| \geq (1-\epsilon)\|\pi_0g\|_I \geq (1-\epsilon)(s_0-\epsilon)\|g\|_I$.

Mais $I(\pi_0g) = I(\pi_0g - f_0g) + I(f_0g)$ donc $|I(\pi_0g)| \leq |I(\pi_0g - f_0g)| + |I(f_0g)|$.

Or $|I(\pi_0g - f_0g)| \leq \|f_0g - \pi_0g\|_I = \sup_{x \in X} |f_0(x)g(x) - \pi_0g(x)| = N_I(x) =$

$$\sup_{x \in W} |f_0(x) - \pi_0| |g(x)| N_I(x) \leq \epsilon \|g\|_I.$$

Donc $|I(f_0g)| \geq |I(\pi_0g)| - \epsilon \|g\|_I \geq (1-\epsilon)(s_0-\epsilon) \|g\|_I - \epsilon \|g\|_I$ ce qui

implique $\|g\|_I^{-1} |I(f_0g)| \geq (1-\epsilon)(s_0-\epsilon) - \epsilon = s_0 - \epsilon(s_0+2-\epsilon) \geq s_0 - \epsilon(s_0+2) > s_0 - \delta$

D'où $\|I_{f_0}\| \geq \|f_0\|_\infty - \delta$ et finalement $\|I_{f_0}\| = \|f\|_\infty$.

(4.4.6) COROLLAIRE. - $L_\infty^\infty(I)$ est un sous-espace fermé du dual $L(I)'$.

(4.4.7) REMARQUE. - $L^\infty(I)$ n'est pas en général égal à $L(I)'$ même si X est compact. En effet, soit X un groupe compact totalement discontinu et soit I une intégrale de Haar sur $C(X,K)$ (Voir (5), 3.4) à valeurs dans K .

Comme I est invariante par translation, on obtient $N_I(x) = \text{Cte} = c$. Donc pour $f \in C(X,K)$ $\|f\|_I = c \|f\|$ de sorte que la topologie définie par la norme $\|\cdot\|_I$ est égale à la topologie de la convergence uniforme. Dans ce cas on a :

$$X_+ = X \text{ et } L(I) = L^\infty(I) = C(X,K).$$

Si l'on avait $L^\infty(I) = L(I)'$ on aurait $C(X,K) = C(X,K)''$ ce qui est impossible si $C(X,K)$ est de dimension infinie et K est complet sphérique, car un espace normé de dimension infinie sur K n'est jamais réflexif.

CHAPITRE V. - ESPACES DES INTEGRALES ; INTEGRALES ET MESURES.

5.1. L'ESPACE DES INTEGRALES.

(5.1.0) Soit X un espace éparpillé, E désignera le W -espace $E = C(X, K, b)$ où b est une bornologie sur K dont les éléments sont bornés relativement à la valeur absolue dans K . Dans ce cas $\Omega = \Omega(E)$ est l'algèbre des of de X et $T = T(E)$ est la topologie initiale de X .

Pour toute $f \in E$; $f \rightarrow \|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| < +\infty$ est une norme n.a. sur E .

L'espace E muni de cette norme est un espace de Banach n.a.

Δ désignera l'ensemble $\{f \in E ; \|f\| \leq 1\}$.

La topologie stricte sur E définie au (3.3.9) est alors déterminée par la famille des semi-normes $f \rightarrow \|f\|_\phi = \sup_{x \in X} |f(x)|\phi(x)$ où ϕ parcourt

l'ensemble $\Phi(E)$ des fonctions $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ s.c.s. telles que pour tout $\delta > 0$, l'ensemble $\{x \in X ; \phi(x) \geq \delta\}$ soit compact.

Cette topologie est aussi la topologie localement K -convexe la plus fine induisant sur Δ la topologie localement K -convexe de la convergence compacte ((7), théorème 2.4). On note E_{β_0} l'espace E muni de la topologie stricte.

$M(X)$ désignera l'espace des intégrales sur E . On a donc

$$M(X) = (E_{\beta_0})'.$$

Soit $I \in M(X)$. Pour tout $\delta > 0$, $\{x \in X ; N_I(x) \geq \delta\}$ est un compact [(3.3.6) (iv) avec $f=1$]. Donc

$$\|I\| = \sup_{x \in X} N_I(x) = \sup\{|I(g)| ; g \in \Delta\} = \|1\|_I < +\infty.$$

L'espace $M(X)$ muni de la norme $I \rightarrow \|I\|$ est un espace de Banach n.a. comme on peut le vérifier sans peine.

Sur $M(X)$, on peut encore placer la topologie vague $\sigma(M(X), E)$.

Nous examinons dans la suite quelques propriétés de $M(X)$, en commençant par caractériser ses parties équi continues.

Nous empruntons la définition suivante au cas classique ;

(5.1.1.) DEFINITION. - Soit $H \subset M(X)$. On dit que H est une partie de Prokhorov si elle vérifie les conditions suivantes :

(a) $\text{Sup}\{\|I\| ; I \in H\} < +\infty$.

(b) Pour tout $\delta > 0$, il existe un compact P de X tel que

$$\|X \setminus P\|_I \leq \delta \quad \forall I \in H.$$

Dans ces conditions, on obtient :

(5.1.2) PROPOSITION. - Soit $H \subset M(X)$. Pour que H soit équicontinue il faut et il suffit qu'elle soit une partie de Prokhorov.

Preuve. - Soit H une partie équicontinue de $M(X)$.

Il existe un voisinage V de 0 dans E_{β_0} tel que :

$$|I(f)| \leq 1 \quad \forall I \in H \text{ et } \forall f \in V.$$

On peut supposer que $V = V(\phi, \varepsilon) = \{f \in E ; \|f\|_\phi \leq \varepsilon\}$ avec $\phi \in \Phi(E)$. Soit $\lambda \in K$; $\lambda \neq 0$ et $|\lambda| \leq \varepsilon / \|\phi\|$. On a $\lambda \Delta \subset V$.

En effet, si $f \in \Delta$, $\|\lambda f\|_\phi = \text{Sup}_{x \in X} |\lambda f(x)| \phi(x) \leq \frac{\varepsilon}{\|\phi\|} \cdot 1 \cdot \|\phi\| \leq \varepsilon$.

Donc $\forall I \in H \quad \|I\| = \text{Sup}\{|I(f)| ; f \in \Delta\} \leq |\lambda^{-1}|$ et par suite

$$\text{Sup}\{\|I\| ; I \in H\} \leq |\lambda^{-1}| < +\infty$$

D'autre part, soit $\delta > 0$. Il existe $\alpha \in K$; $\alpha \neq 0$ et $|\alpha| \leq \delta$. L'ensemble $P = \{x \in X ; \phi(x) \geq \varepsilon |\alpha|\}$ est compact.

Soit $I \in H$. Comme $X \setminus P$ est ouvert, on a :

$$\|X \setminus P\|_I = \text{Sup}_{x \in X \setminus P} N_I(x) = m_1(X \setminus P) = \text{Sup}\{|I(\phi_U)| ; U \in \Omega, U \subset X \setminus P\} \text{ d'après (2.3),}$$

(2.6) et (3.3.4).

$$\text{Donc } \|X \setminus P\|_I = \text{Sup}\{|I(f)| ; f \in E, |f| \leq |\phi_{X \setminus P}|\}.$$

Soit $f \in E$; $|f| \leq |\phi_{X \setminus P}|$; alors $\alpha^{-1}f \in V$, en effet :

$$\|\alpha^{-1}f\|_{\phi} = \sup_{x \in X} |\alpha^{-1}|f(x)|\phi(x) = \sup_{x \in X \setminus P} |\alpha^{-1}|f(x)|\phi(x) \leq |\alpha^{-1}| \|\phi\|_{X \setminus P} \leq |\alpha|^{-1} \varepsilon |\alpha| \leq \varepsilon.$$

Donc $|I(\alpha^{-1}f)| = |\alpha|^{-1}|I(f)| \leq 1$ et $|I(f)| \leq |\alpha| \leq \delta$ d'où $\|X \setminus P\|_I \leq \delta$.

Réciproquement, soit H une partie de Prokhorov. Soit $s = \sup_{I \in H} \|I\|$

et soit P le compact de X tel que $\|X \setminus P\|_I \leq 1$, $\forall I \in H$.

Montrons que $H^{\circ} = \{f \in E ; |I(f)| \leq 1, \forall I \in H\}$ est un voisinage de 0 dans E_{β_0} . Comme H° est un ensemble K -convexe, il suffit de montrer qu'il contient l'intersection avec Δ d'un voisinage de zéro pour la topologie de la convergence compacte. Soit $V(P, \frac{1}{s}) = \{f \in E ; \|f\|_P \leq \frac{1}{s}\}$. On a $V(P, \frac{1}{s}) \cap \Delta \subset H^{\circ}$.

En effet, soit $f \in V(P, \frac{1}{s}) \cap \Delta$. Pour tout $I \in H$ on a

$$|I(f)| \leq \|f\|_I = \max\{\sup_{x \in X \setminus P} |f(x)|N_I(x), \sup_{x \in P} |f(x)|N_I(x)\} \leq \max(1, \frac{1}{s} \cdot s) = 1.$$

(5.1.3) COROLLAIRE. - Si X est compact, pour tout $a > 0$, l'ensemble $H = \{I \in M(X) ; \|I\| \leq a\}$ est équicontinu.

Le reste de ce paragraphe est consacré à la topologie vague $\sigma(M(X), E)$ de $M(X)$.

(5.1.4) PROPOSITION. - Pour tout $x \in X$, soit ε_x la mesure de Dirac au point x . Alors $\varepsilon_x \in M(X)$ et l'application $x \rightarrow \varepsilon_x$ est un homéomorphisme de X sur un sous-espace de $M(X)$ muni de la topologie vague.

Preuve. - Facile.

(5.1.5) PROPOSITION. - Soit $s > 0$. L'ensemble des intégrales I telles que $\|I\| > s$ est vaguement ouvert.

Preuve. - Posons $G = \{I \in M(X) ; ||I|| > s\}$. Soit $I_0 \in G$, il existe $f \in \Delta$ telle que $|I_0(f)| > s$ et par suite $\delta > 0$ tel que $|I_0(f)| > s + \delta$. Soit $V = \{I \in M(X) ; |I(f) - I_0(f)| < \delta\}$; alors $V \subset G$. En effet, $I \in V$ implique $s + \delta < |I_0(f)| < |I(f)| + \delta$ d'où $|I(f)| > s$ et $||I|| > s$.

(5.1.6) COROLLAIRE. - L'application $I \rightarrow ||I||$ est vaguement s.c.i.

(5.1.7) PROPOSITION. - Toute intégrale à support fini $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une combinaison linéaire des intégrales ε_{a_i} .

Preuve. - En effet pour $f \in E$, les relations $f(a_i) = 0$ impliquent $I(f) = 0$

$$(3.4.2) \text{ donc } I = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_{a_i}.$$

(5.1.8) PROPOSITION. - L'ensemble des intégrales à support fini est vaguement dense dans $M(X)$. De façon précise, toute intégrale I est vaguement adhérente à l'espace vectoriel V des intégrales dont le support est fini et contenu dans le support de I .

Preuve. - Soient $V^\circ = \{f \in E ; |I(f)| \leq 1, \forall I \in V\}$.

$V^{\circ\circ} = \{I \in M(X) ; |I(f)| \leq 1, \forall f \in V^\circ\}$. Comme V est un sous-espace vectoriel de $M(X)$, $V^{\circ\circ}$ est l'adhérence vague de V dans $M(X)$ ((9), théorème 3.11, et théorème 4.13). Montrons que $I \in V^{\circ\circ}$. Or si $f \in V^\circ$ on a

$$\sup_{x \in \text{Supp}(I)} |f(x)| = 0 \text{ donc } ||f||_I = 0 \text{ et } |I(f)| = 0.$$

5.2. INTEGRALES ET MESURES.

(5.2.0) On conserve les notations de (5.1.0). Il s'agit dans ce paragraphe d'établir une correspondance entre les intégrales sur E d'une part et les mesures sur Ω d'autre part.

On notera $M(X)$ l'espace des mesures sur Ω .

Si $\mu \in M(X)$, $\|\mu\| = \sup_{x \in X} N_\mu(x) < +\infty$, comme il résulte de (2.8) car $x \in \Omega$.

On vérifie facilement que l'espace $M(X)$ muni de la norme $\mu \rightarrow \|\mu\|$ est un espace de Banach n.a.

Nous avons d'abord le lemme suivant :

(5.2.1) LEMME. - Soient Ω un clan de parties de X recouvrant X , $E(\Omega)$ l'espace des fonctions Ω -étagées et μ une fonction additive $\mu : \Omega \rightarrow K$. Alors il existe une unique forme linéaire $J : E(\Omega) \rightarrow K$ telle que $J(\phi_U) = \mu(U) \quad \forall U \in \Omega$.

J est une intégrale si et seulement si μ est une mesure. De plus $\forall x \in X, N_\mu(x) = N_J(x)$.

Preuve. - Il suffit de poser pour tout $g = \sum_{k=1}^n \lambda_k \phi_{V_k} \in E(\Omega)$ (les V_k étant deux à deux disjoints) $J(g) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mu(V_k)$, d'où découlent l'existence et l'unicité de J . Pour $g \in E(\Omega)$ soit $S(g) = \{x \in X ; |g(x)| > 0\}$, $S(g) \in \Omega$.

Si μ est une mesure et $(g_\alpha) \downarrow 0$ dans $E(\Omega)$ on peut supposer que $\forall \alpha \in \Lambda, \|g_\alpha\| \leq c$. Comme $S(g_\alpha) \downarrow 0$, alors $\forall \delta > 0, \exists \alpha_0$ tel que $m(S(g_{\alpha_0})) \leq \delta/c$ (2.4. ii).

Alors si $f \in E(\Omega)$ et $|f| \leq |g_{\alpha_0}|$ on a $|J(f)| \leq cm(S(g_{\alpha_0})) \leq \delta$, ce qui montre que J est une intégrale (3.3.1)(I').

Réciproquement, si J est une intégrale, μ est une mesure d'après (3.3.1).

Soit $U \in \Omega$; on a $\|U\|_J = \|\phi_U\|_J = \sup\{|J(g)| ; g \in E(\Omega), |g| \leq |\phi_U|\}$.

Soit $g = \sum_{k=1}^n \lambda_k \phi_{V_k} \in E(\Omega)$ (les V_k sont deux à deux disjoints) ; si $|g| \leq |\phi_U|$

on a $\bigcup V_k \subset U$ et $\sup |\lambda_k| \leq 1$, d'où

$|J(g)| \leq \sup_k |\lambda_k| \|\mu(V_k)\| \leq \sup |\mu(V_k)| \leq \sup m(V_k) \leq m(U)$. Donc $\|U\|_J \leq m(U)$.

D'autre part, si $V \in \Omega$; $V \subset U$ alors $|\phi_V| \leq |\phi_U|$ et $|\mu(V)| = |J(\phi_V)| \leq ||U||_J$.
Par suite $||U||_J = m(U)$.

On a $N_J(a) = \text{Inf}\{||f||_J ; f \in E(\Omega), f(a) = 1\}$.

$$N_\mu(a) = \text{Inf}\{||U||_J ; U \in \Omega, a \in U\}.$$

Evidemment $N_J(a) \leq N_\mu(a)$. Réciproquement, soit $f \in E(\Omega)$; $f(a) = 1$, f est $T(\Omega)$ continue, alors il existe $U \in \Omega$; $a \in U \subset \{x \in X ; |f(x) - f(a)| < 1\}$ donc $|\phi_U| \leq |f|$ et $||U||_J \leq ||f||_J$, d'où $N_\mu(a) = N_J(a)$.

On peut maintenant établir le théorème suivant :

(5.2.2) THEOREME. - *Les espaces $M(X)$ et $M(X)$ sont des espaces de Banach isométriques. De façon précise, il y a une correspondance biunivoque entre les intégrales sur $C(X, K, b)$ et les mesures sur Ω . Dans cette correspondance, à toute mesure μ est associée l'unique intégrale I telle que*

$$\forall x \in X \quad N_I(x) = N_\mu(x) \text{ et } \forall U \in \Omega \quad I(\phi_U) = \mu(U).$$

Preuve. -

(a) Si μ est une mesure sur Ω , le lemme montre qu'il existe une unique intégrale J sur $E(\Omega)$ telle que $J(\phi_U) = \mu(U)$, $\forall U \in \Omega$ et $N_\mu(x) = N_J(x)$, $\forall x \in X$. D'après (4.1.2), on voit que toute fonction de $C(X, K, b)$ est J -intégrable. Il existe donc, (4.1.6), une unique intégrale I prolongeant J à $C(X, K, b)$ avec $N_I(x) = N_J(x) = N_\mu(x)$, $\forall x \in X$.

(b) Réciproquement, si I est un intégrale sur $C(X, K, b)$, la relation $\mu(U) = I(\phi_U)$ définit une mesure μ sur Ω et l'on a d'après (a), $N_I(x) = N_\mu(x)$, $\forall x \in X$.

La correspondance du théorème (5.2.2.) est encore valable pour d'autres familles de formes linéaires sur E et de fonctions additives sur Ω , c'est ce qu'on va examiner dans le paragraphe suivant.

5.3. FONCTIONS σ -REGULIERES.

(5.3.0) Soient X un espace éparpillé, $E = C(X, K, p)$ où p est la bornologie des parties relativement compactes de K ; $\Omega = \Omega(E)$ est l'algèbre des of de X .

On pose les définitions :

(5.3.1) DEFINITIONS :

(a) Une fonction additive d'ensembles $\mu : \Omega \rightarrow K$ est dite σ -régulière si pour toute suite $U_n \downarrow \emptyset$ et pour toute suite $V_n \in \Omega$ telle que $V_n \subset U_n$ on a $\mu(V_n) \rightarrow 0$.

(b) Une fonction additive d'ensembles $\mu : \Omega \rightarrow K$ est dite bornée si $\text{Sup}\{|\mu(V)| ; V \in \Omega\} < +\infty$.

(c) Une forme linéaire $I : E \rightarrow K$ est dite σ -régulière si pour toute suite $f_n \downarrow 0$ et toute suite $g_n \in E$ telle que $|g_n| \leq |f_n|$ on a $I(g_n) \rightarrow 0$.

(5.3.2) Il s'agit de trouver une correspondance entre les formes linéaires σ -régulières et les fonctions additives sur Ω bornées et σ -régulières. On rappelle d'abord certains résultats de (4) :

Désignons par $\delta^p X$ l'espace des caractères de $C(X, K, p)$ muni de la structure uniforme de la convergence simple sur $C(X, K, p)$ et de la topologie associée. L'espace $\delta^p X$ est un compact totalement discontinu et toute fonction $f \in C(X, K, p)$ admet un prolongement unique $\bar{f} \in C(\delta^p X, K)$. De plus X est partout dense dans $\delta^p X$. Si $\bar{\Omega}$ désigne l'algèbre des of de $\delta^p X$, tout $U \in \Omega$ est l'intersection avec X d'un unique $\bar{U} \in \bar{\Omega}$.

On aura besoin des lemmes suivants :

(5.3.3) LEMME. - Soient $f, g \in C(X, K, p)$ telles que $|f| \leq |g|$. Alors $|\bar{f}| \leq |\bar{g}|$.

Preuve. - Il suffit de vérifier que si $x_0 \in \delta^p X \setminus X$, on a $|\bar{f}(x_0)| \leq |\bar{g}(x_0)|$. Si $|\bar{f}(x_0)| = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $|\bar{f}(x_0)| = \alpha > 0$.

L'ensemble $\bar{V} = \{x \in \delta^p X ; |\bar{g}(x)| < \alpha\} \in \bar{\Omega}$. D'autre part, il existe $\bar{U} \in \bar{\Omega}$ tel que $x_0 \in \bar{U}$ et $|\bar{f}(x)| = |\bar{f}(x_0)| \quad \forall x \in U$ (3.1.8).

Alors on a $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$. Sinon, on aurait $\bar{U} \cap \bar{V} \neq \emptyset$ soit $\bar{U} \cap \bar{V} \cap X \neq \emptyset$. Soit $a_0 \in \bar{U} \cap \bar{V} \cap X$, alors $|\bar{f}(a_0)| = |f(a_0)| = |f(x_0)| + \alpha$ tandis que $|\bar{g}(a_0)| = |\bar{g}(a_0)| < \alpha$ d'où $|\bar{g}(a_0)| < |f(a_0)|$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Comme $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$, alors $x_0 \notin \bar{V} \Rightarrow |\bar{g}(x_0)| \geq \alpha = |\bar{f}(x_0)|$.

(5.3.4) LEMME. - Si I est une forme linéaire sur $C(X, K, p)$, σ -régulière, alors I est continue sur l'espace de Banach $C(X, K, p)$.

Preuve. - En effet, $\text{Sup}\{|I(f)| ; f \in C(X, K, p), \|f\| \leq 1\} < +\infty$. Supposons le contraire et considérons $\alpha \in K ; |\alpha| > 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in \Delta ; |I(f_n)| \geq |\alpha^n|$. On aura ainsi $\alpha^{-n} \cdot 1 \neq 0$ et $|\alpha^{-n} f_n| \leq |\alpha^{-n} \cdot 1|$ alors que $|I(\alpha^{-n} f_n)| \geq 1$ ce qui est absurde.

(5.3.5) LEMME. - Soit $\mu: \Omega \rightarrow K$ une fonction additive σ -régulière bornée.

Pour tout $\bar{U} \in \bar{\Omega}$, on pose $\bar{\mu}(\bar{U}) = \mu(\bar{U} \cap X)$.

$\bar{\mu}$ est alors une mesure bornée sur $\bar{\Omega}$ et si (\bar{U}_n) est une suite décroissante de $\bar{\Omega}$ telle que $\bigcap \bar{U}_n \subset \delta^p X \setminus X$ alors $\bar{m}(\bar{U}_n) \rightarrow 0$, \bar{m} étant définie comme dans (2.3).

Preuve. - Il est clair que $\bar{\mu}$ est une fonction additive sur $\bar{\Omega}$, elle est de plus bornée car $\text{Sup}\{|\bar{\mu}(\bar{U})|, \bar{U} \in \bar{\Omega}\} = \text{Sup}\{|\mu(U)| ; U \in \Omega\} < +\infty$. Comme $\delta^p X$ est compact, $\bar{\mu}$ est une mesure sur $\bar{\Omega}$ (2.2).

Pour $U \in \Omega$, posons $m(U) = \text{Sup}\{|\mu(V)| ; V \in \Omega, V \subset U\}$ et soit une suite $(U_n) \subset \Omega$ telle que $U_n \neq \emptyset$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $V_n \in \Omega$ tel que $V_n \subset U_n$ et $m(U_n) \leq 2|\mu(V_n)|$. Or $\mu(V_n) \rightarrow 0$ d'après (5.3.1) (a), donc $m(U_n) \rightarrow 0$.

Si $\bar{U} \in \bar{\Omega}$, alors $U = \bar{U} \cap X \in \Omega$ et

$\bar{m}(\bar{U}) = \text{Sup}\{|\bar{\mu}(\bar{V})| ; \bar{V} \in \bar{\Omega}, \bar{V} \subset \bar{U}\} = \text{Sup}\{|\mu(V)| ; V \in \Omega ; V \subset U\} = m(U)$.

Donc si $(\bar{U}_n) \subset \bar{\Omega}$ est une suite décroissante avec $\bigcap \bar{U}_n \subset \delta^p X \setminus X$, alors si $U_n = \bar{U}_n \cap X$ on aura $U_n \neq \emptyset$ d'où $m(U_n) > 0$ et par suite $\bar{m}(\bar{U}_n) > 0$.

On obtient alors :

(5.3.6) THEOREME. - Soit X un espace éparpillé. Il existe une correspondance biunivoque entre les formes linéaires I σ -régulières sur $C(X, K, p)$ et les fonctions additives μ sur l'algèbre des of Ω qui sont bornées et σ -régulières.

Dans cette correspondance, on a $I(\phi_U) = \mu(U) \quad \forall U \in \Omega$. (1)

Preuve. - Soit I une forme linéaire σ -régulière sur $C(X, K, p)$. En posant pour $U \in \Omega$, $\mu(U) = I(\phi_U)$, on obtient une fonction additive et σ -régulière comme on peut le voir sans difficulté. De plus, par une démonstration analogue à (5.3.4), on voit que μ est bornée. Enfin, il est évident que μ est l'unique fonction additive sur Ω vérifiant (1).

Réciproquement, soit μ une fonction additive sur Ω , bornée et σ -régulière.

Soit $\bar{\mu}$ la mesure sur $\bar{\Omega}$ définie par le lemme (5.3.5). D'après le théorème (5.2.2), il existe une unique intégrale \bar{I} sur $C(\delta^p X, K)$ telle que $\bar{\mu}(\bar{U}) = \bar{I}(\phi_{\bar{U}}) \quad \forall \bar{U} \in \bar{\Omega}$ et $N_{\bar{I}}(x) = N_{\bar{\mu}}(x) \quad \forall x \in \delta^p X$. Pour $f \in C(X, K, p)$ on pose $I(f) = \bar{I}(\bar{f})$.

Pour $U \in \Omega$ on a $I(\phi_U) = \bar{I}(\phi_U) = \bar{I}(\phi_{\bar{U}}) = \bar{\mu}(\bar{U}) = \mu(U)$.

Montrons que I est σ -régulière. Soit $f_n \neq 0$ de $C(X, K, p)$. Montrons que $\forall \delta > 0$, il existe n_0 tel que $g \in C(X, K, p)$ et $|g| < |f_{n_0}| \Rightarrow |I(g)| < \delta$. Soient $c = ||f_1||$, $s = ||\bar{I}|| = \sup_{x \in \delta^p X} N_{\bar{I}}(x)$ et $t = \max(c, s)$.

Posons $\bar{U}_n = \{x \in \delta^p X ; |\bar{f}_n(x)| \geq \delta/t\}$.

On a $\bar{U}_n \in \bar{\Omega}$ et la suite \bar{U}_n est décroissante d'après (5.3.3). Comme $f_n \neq 0$ on a $\bigcap \bar{U}_n \subset \delta^p X \setminus X$, donc il existe n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow \bar{m}(\bar{U}_n) \leq \delta/t$ (5.3.5).

Alors si $g \in C(X, K, p)$ et $|g| < |f_{n_0}|$, on a

$$|I(g)| = |\bar{I}(\bar{g})| \leq \|\bar{g}\|_{\bar{I}} \leq \|\bar{f}_{n_0}\|_{\bar{I}} = \sup_{x \in \bar{U}_{n_0}} |\bar{f}_{n_0}(x)|_{N_{\bar{I}}(x)} =$$

$$\max\{\sup_{x \in \bar{U}_{n_0}} |\bar{f}_{n_0}(x)|_{N_{\bar{I}}(x)}, \sup_{x \in U_{n_0}} |\bar{f}_{n_0}(x)|_{N_{\bar{I}}(x)}\} \leq \max(c.\delta/t, \delta/t.s) \leq \delta.$$

Enfin I est unique d'après (5.3.4) et (3.1.6); d'où le théorème.

5.4. INTEGRALES DISCRETES.

(5.4.0) On conserve dans ce paragraphe les notations (5.1.0) : on a $E = C(X, K, b)$; $\Omega = \Omega(E)$; $T = T(E)$. Si I est une intégrale sur E, on note toujours T^* la topologie définie dans (4.1.5), c'est-à-dire la topologie associée à l'espace $L(I)$ des fonctions intégrables.

(5.4.1) On voit d'après (4.1.4) que tout ensemble intégrable est réunion d'une suite de compacts et d'un négligeable. De même la proposition (4.3.3) montre qu'un ensemble mesurable est réunion d'un ensemble F_σ et d'un ensemble négligeable.

Réciproquement, est-ce que tout ensemble compact est mesurable ? Il est clair que tout compact mesurable est intégrable. On va examiner la situation où tout compact est intégrable.

(5.4.2) DEFINITION. - On dit que l'intégrale I est discrète si la topologie T^* est discrète.

On voit immédiatement que l'intégrale I est discrète si et seulement si pour tout $x \in X$, $\phi_x = \phi_{\{x\}}$ est intégrable et ceci d'après (4.3.3) (En particulier I est discrète si tout compact est intégrable).

On a alors la caractérisation suivante des intégrales discrètes :

(5.4.3) PROPOSITION. - Pour que l'intégrale I soit discrète, il faut et il suffit qu'il existe une suite (λ_n) de K convergeant vers zéro et une suite (x_n) de X telles que

$$I(f) = \sum \lambda_n f(x_n) \quad \forall f \in C(X, K, b) \quad (1).$$

Preuve. - Soit I une forme linéaire donnée par la formule (1). I est bien définie car la série (λ_n) est convergente (1.1.3) tandis que $\forall f \in C(X, K, b)$ on a $\|f\| < +\infty$.

* I est une intégrale car elle vérifie la condition (I') de (3.3.1). En effet si $f \neq 0$, on peut supposer que $|f_\alpha| \leq |f| \quad \forall \alpha$. Soit $\delta > 0$, il existe une partie finie $F \subset \mathbb{N}$ telle que $n \notin F \Rightarrow |\lambda_n| |f(x)| \leq \delta$. Soit $s_F = \sup_{n \in F} |\lambda_n|$. Il existe α_0 ; $\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow \sup_{n \in F} |f_\alpha(x_n)| \leq \delta / s_F$. Alors pour tout $g \in C(X, K, b)$ telle que $|g| \leq |f_{\alpha_0}|$ on a

$$|I(g)| \leq \sup_{n \in F} |\lambda_n| |g(x_n)| \leq \delta.$$

* Soient $U \in \Omega$ et $a \in X$, d'après (5.2.2) on a :

$$\|U\|_I = \sup\{|I(\phi_V)| ; V \in \Omega, V \subset U\}.$$

$$N_I(a) = \inf\{\|U\|_I ; U \in \Omega, a \in U\}.$$

Soient $U \in \Omega$ et $V \in \Omega$; $V \subset U$. On a

$$I(\phi_V) = \left| \sum_{x_n \in V} \lambda_n \right| \text{ d'où } |I(\phi_V)| \leq \sup_{x_n \in V} |\lambda_n| \leq \sup_{x_n \in U} |\lambda_n| \text{ et } \|U\|_I \leq \sup_{x_n \in U} |\lambda_n|.$$

D'autre part soit $x_{n_0} \in U$, si $|\lambda_{n_0}| = 0$ alors $\|U\|_I \geq |\lambda_{n_0}|$.

Si $|\lambda_{n_0}| > 0$, l'ensemble $F = \{n \in \mathbb{N} ; n \neq n_0 \text{ et } |\lambda_n| > \frac{1}{2} |\lambda_{n_0}|\}$ est fini. Il existe $V \in \Omega$; $V \subset U$, $x_{n_0} \in V$ et $\{n \in \mathbb{N} ; x_n \in V\} \cap F = \emptyset$.

$$\text{Alors } |I(\phi_V)| = \left| \sum_{x_n \in V} \lambda_n \right| = |\lambda_{n_0}| \quad (1.1.4).$$

D'où $\|U\|_I \geq |\lambda_{n_0}|$, $\|U\|_I \geq \sup_{x_n \in U} |\lambda_n|$ et finalement $\|U\|_I = \sup_{x_n \in U} |\lambda_n|$.

Alors :

soit $a \in X$, si $\exists n \in \mathbb{N}$; $a = x_n$ alors $N_I(a) = |\lambda_n|$. Sinon $N_I(a) = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \{x \in X ; N_I(x) \geq \frac{1}{n}\}$ est donc fini; donc pour tout $x \in X$, ϕ_x est intégrable (4.1.2) et par suite T^* est discrète.

Réciproquement, si I est une intégrale discrète, pour tout $x \in X$, ϕ_x est intégrable.

Alors $N_I(x) = \|\phi_x\|_I = \text{Sup}\{|I^*(f)| ; f \in L(I), |f| \leq \phi_x\} = |I^*(\phi_x)|$ et ceci d'après (3.3.6) (iv) et (4.1.6).

D'après (1.1.2) la famille $I^*(\phi_x)_{x \in X}$ est sommable, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est T^* -compact ((4.1.8) avec $f=1$) donc fini. Donc l'ensemble $\{x \in X ; |I^*(\phi_x)| > 0\}$ est dénombrable. En écrivant cet ensemble sous la forme d'une suite (x_n) , la série $\sum I^*(\phi_{x_n})$ est convergente.

Soit alors l'intégrale J définie par $J(f) = \sum I^*(\phi_{x_n})f(x_n); f \in C(X, K, b)$.

Soit $U \in \Omega$ et F l'ensemble de ses parties finies. Pour $F \in F$, posons $\phi_F = \sum_{x \in F} \phi_x$; alors la famille $(\phi_F)_{F \in F}$ est un net de fonctions I -intégrables convergeant selon Egoroff (4.3.6 avec T^* discrète) vers la fonction I -intégrable ϕ_U et l'on a $|\phi_F| \leq |\phi_U|$ pour tout $F \in F$. Le théorème de Lebesgue (4.3.8) montre que $I(\phi_U) = \lim_F I^*(\phi_F)$ donc $I(\phi_U) = \sum_{x \in U} I^*(\phi_x) = \sum_{x \in U} I^*(\phi_{x_n}) = J(\phi_U)$.

Les intégrales I et J coïncident sur Ω et l'on a $N_I(a) = N_J(a)$, $\forall a \in X$, donc ces deux intégrales sont égales (5.2.2).

CHAPITRE VI. - PARTIES K-BORNEES D'UN ESPACE EPARPILLE ET INTEGRALES A SUPPORT BORNE.

(6.0) NOTATIONS. - On fera dans ce chapitre une étude analogue à celle qu'on trouve dans (3) et l'on va définir les parties K-bornées d'un espace éparpillé et caractériser ensuite les intégrales à support borné.

On commence par fixer les notations et rappeler certains résultats de (4) :

(a) Soient X un espace éparpillé, K un corps n.a. complet, b une bornologie sur K et $C(X,K,b)$ l'espace des fonctions f continues sur X à valeurs dans K et telles que $f(X) \in b$.

(b) On désigne par $\delta^b X$ l'espace des caractères de $C(X,K,b)$ muni de la structure uniforme de la convergence simple sur $C(X,K,b)$ et de la topologie associée. L'espace $\delta^b X$ est le complété de X pour la structure ultrauniforme définie sur X par $C(X,K,b)$; X est partout dense dans $\delta^b X$ et toute fonction $f \in C(X,K,b)$ admet un prolongement unique $f^b \in C(\delta^b X, K, b)$ défini par $f^b(u) = u(f)$, $u \in \delta^b X$.

(c) On note :

. b_1 la bornologie de toutes les parties de K mais on écrit $C(X,K)$ pour $C(X,K,b_1)$.

. b_0 la bornologie des parties de K bornées pour la valeur absolue de K .

. p la bornologie des parties relativement compactes de K .

(d) $\delta^p X$ est un compact totalement discontinu et les algèbres de Banach n.a. $C(X,K,p)$ et $C(\delta^p X, K)$ sont isométriques.

(e) Soient H la famille des parties équicontinues et simplement bornées de $C(X,K)$ et θ_1 la structure ultra-uniforme universelle sur X .

θ_1 est définie par les ultra-écarts $(d_H)_{H \in H}$ où $d_H(x,y) = \sup_{h \in H} |h(x) - h(y)|$ $x, y \in X$, $\theta_1 X$ désigne le complété de X pour θ_1 . Toute fonction $f \in C(X,K)$ possède un prolongement unique $f^{\theta_1} \in C(\theta_1 X, K)$ et les algèbres $C(X,K)$ et

$C(\theta_1 X, K)$ sont isomorphes avec les même parties équicontinues et simplement bornées.

On peut alors introduire la notion de parties K -bornées :

6.1. PARTIES K -BORNEES D'UN ESPACE EPARPILLE.

(6.1.1) DEFINITION. - Soient X un espace éparpillé et $P \subset X$. P est dite K -bornée si elle est θ_1 -précompacte.

On a la caractérisation suivante d'une partie K -bornée :

(6.1.2) PROPOSITION. - Une partie $P \subset X$ est K -bornée si et seulement si $f(P)$ est relativement compacte dans K pour toute $f \in C(X, K)$.

Preuve. -

(a) si P est bornée et $f \in C(X, K)$, f est θ_1 -uniformément continue donc $f(P)$ est précompacte et par suite relativement compacte dans K .

(b) Si P n'est pas θ_1 -précompacte, il existe $H \in H$, $\alpha > 0$ et une suite (x_n) de points de P tels que $d_H(x_p, x_q) \geq \alpha$ pour $p \neq q$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $U_n = \{x \in X ; d_H(x_n, x) < \alpha/2\}$; on obtient là une suite d'ouf disjoints. Si ϕ_n est la fonction caractéristique de U_n ; $\phi_n \in C(X, K)$. Soit $\lambda \in K$; $|\lambda| > 1$. Alors $f = \sum \lambda^n \phi_n \in C(X, K)$ et l'image $f(P)$ n'est pas relativement compacte puisqu'elle contient la suite (λ^n)

(6.1.3) PROPOSITION. - Soit X un espace éparpillé. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) X est K -borné.

(b) $\theta_1 X = \delta^P X$.

(c) $\delta^b X = \delta^P X$.

Preuve. -

(a) \implies (b) : Si X est K -borné, $\theta_1 X$ est compact et partout dense dans $\delta^P X$, donc $\theta_1 X = \delta^P X$.

(b) \implies (c) Car on a topologiquement $\theta_1 X \subset \delta^{b_1} X \subset \delta^p X$.

(c) \implies (a) On a $C(X, K, b_1) = C(\delta^{b_1} X, K, b_1) = C(\delta^p X, K, b_1) = C(\delta^p X, K, p) = C(X, K, p)$; donc X est K -borné d'après (6.1.2).

(6.1.4) PROPOSITION. - Soient X un espace éparpillé et A une partie quelconque de X . Alors :

(a) L'adhérence \overline{A}^{b_1} de A dans $\delta^{b_1} X$ est exactement l'ensemble $B = \{u \in \delta^{b_1} X ; f \in C(X, K, b_1) \text{ et } \|f\|_A = 0 \implies u(f) = 0\}$.

(b) Pour que $u \in \overline{A}^{b_1}$, il faut et il suffit que $|u(f)| \leq \|f\|_A$ pour toute $f \in C(X, K, b_1)$.

Preuve. -

(a) B est fermé dans $\delta^{b_1} X$ et contient A donc $\overline{A}^{b_1} \subset B$. Supposons qu'il existe $u \in B \setminus \overline{A}^{b_1}$. On peut trouver un of U de $\delta^{b_1} X$ tel que $u \in U$ et $U \cap \overline{A}^{b_1} = \emptyset$. Soit $V = U \cap X$, V est un of de X donc $\phi_V \in C(X, K)$. Alors $u(\phi_V) = \phi_U(u) = 1$ et $\|\phi_V\|_A = 0$, ce qui est absurde.

(b) Si $u \in \overline{A}^{b_1}$ et $f \in C(X, K, b_1)$, alors $u(f) \in \overline{f(A)}$ d'où $|u(f)| \leq \|f\|_A$. Si $|u(f)| \leq \|f\|_A$, alors $u \in B$ et $u \in \overline{A}^{b_1}$.

(6.1.5) On désigne par $C_\beta(X, K)$ l'espace $C(X, K, b_1)$ muni de la topologie localement K -convexe définie par la famille des semi-normes n.a.

$p_A : f \mapsto \|f\|_A = \sup_{X \in A} |f(x)|$, où A parcourt la famille B des parties K -bornées de X .

On notera $C'_\beta(X, K)$ le dual de $C_\beta(X, K)$ et X'' les éléments de $C'_\beta(X, K)$ qui sont en même temps des caractères de $C(X, K)$ soit $X'' = C'_\beta(X, K) \cap \delta^{b_1} X$.

Le lemme suivant est facile à vérifier :

(6.1.6) LEMME. - Toute partie $P \subset X$, K -bornée, est δ^{b_1} -précompacte et les structures ultra-uniformes δ^{b_1} et θ_1 coïncident sur P . de plus $\bar{P}^{b_1} = \bar{P}^{\theta_1}$.

Pour caractériser X'' , on a la

(6.1.7) PROPOSITION. -
 (a) X'' est dans $\delta^{b_1}X$ la réunion des ensembles \bar{P}^{b_1} lorsque P décrit la famille des K -bornés de X .
 (b) Les ensembles \bar{P}^{b_1} forment une base d'équicontinuos de X'' .

Preuve. -

(a) Si $u \in \bar{P}^{b_1}$ d'après (6.1.4), (b), $|u(f)| \leq \|f\|_A$ donc $u \in X''$. Si $u \in X''$, il existe $P \in \mathcal{B}$ tel que $|u(f)| \leq k \|f\|_P$ donc $u \in \bar{P}^{b_1}$ d'après (6.1.4)(a).

(b) (6.1.4)(b) montre que pour tout $P \in \mathcal{B}$, \bar{P}^{b_1} est équicontinue dans X'' . Réciproquement, si H est un équicontinu de X'' , alors : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ et $P \in \mathcal{B}$ tels que $\|f\|_P \leq \delta \Rightarrow |u(f)| \leq \epsilon, \forall u \in H$. Soit $f \in C(X, K)$ telle que $\|f\|_P = 0$. Considérons $\lambda \in K$ tel que $|\lambda| > 1, \forall n \in \mathbb{N}, \lambda^n f \in C(X, K)$ et $\|\lambda^n f\|_P = 0$ donc $|u(\lambda^n f)| \leq \epsilon$ et par suite $|u(f)| = 0$ d'où $u \in \bar{P}^{b_1}$.

(6.1.8) REMARQUE. - Il résulte de (6.1.4) que $X'' \subset \theta_1 X$. On peut ainsi topologiser X'' en le considérant comme sous-espace topologique de $\theta_1 X$. On aura donc $C(X'', K) = C(X, K)$ et toute fonction $f \in C(X, K)$ admet un prolongement continu unique $f'' \in C(X'', K)$.

6.2. L'ESPACE $C_\beta^1(X, K)$.

(6.2.1) L'espace $\delta^P X$ étant compact, les intégrales sur $C(\delta^P X, K)$ sont

exactement les éléments du dual de l'espace de Bahach $C_u(\delta^p X, K)$

(ou $C_u(X, K, p)$) (3.3.10), on les appellera intégrales sur $\delta^p X$.

On va établir une correspondance entre $C'_\beta(X, K)$ et un sous-espace de $C'_u(\delta^p X, K)$.

On a d'abord le lemme :

(6.2.2) LEMME. - *Pour toute bornologie b sur K , l'espace $C(X, K, b)$ est partout dense dans $C_\beta(X, K)$.*

Preuve. - Soient $f \in C(X, K)$ et A une partie K -bornée de X . Alors $f(A) = B$ est relativement compact dans K . Soit $\varepsilon > 0$, par une démonstration analogue à celle de la proposition (3.1.6) on trouve une fonction $g \in E(\Omega)$, donc $g \in C(X, K, b)$, avec $\|f - g\|_A \leq \varepsilon$.

(6.2.3) Si $\mu \in C'_\beta(X, K)$, sa restriction μ^p à $C(X, K, p)$ est un élément de $C'_u(X, K, p)$ donc de $C'_u(\delta^p X)$ par suite μ^p est une intégrale sur $\delta^p X$ et il résulte du lemme précédent que l'application $\mu \rightarrow \mu^p$ est injective. Il s'agit maintenant de savoir quelles sont les intégrales sur $\delta^p X$ que l'on obtient ainsi.

Pour cela, définissons d'abord le support d'un élément $\mu \in C'_\beta(X, K)$.

(6.2.4) DEFINITION. - *Si $\mu \in C'_\beta(X, K)$, on appelle support de μ et l'on note $S(\mu)$ le support de l'intégrale μ^p .*

On a alors le résultat suivant :

(6.2.5) THEOREME. - *Les éléments $\mu \in C'_\beta(X)$ correspondent bijectivement par l'application $\mu \rightarrow \mu^p$ aux intégrales sur $\delta^p X$ dont le support est contenu dans l'adhérence dans X " (ou dans $\theta_1 X$ ou dans $\delta^p X$) d'un K -borné A de X .*

Preuve. - Si $f \in C(X, K, p)$ (resp. $f \in C(X, K)$) on note f^p (resp. f^{θ_1}) son prolongement continu à $\delta^p X$ (resp. à $\theta_1 X$).

Soit $\mu \in C'_\beta(X, K)$, il existe $c > 0$ et $A \in B$ tels que :

$$|\mu(f)| \leq c \|f\|_A, \quad \forall f \in C(X, K). \text{ Alors } |\mu^p(f^p)| = |\mu(f)| \leq c \|f\|_A \leq c \|f^p\|_{\bar{A}^p}$$

$$\text{d'où } S(\mu^p) \subset \bar{A}^p = \bar{A}^{\theta_1} \quad (3.4.2).$$

Réciproquement, soit I une intégrale sur $\delta^p X$ telle qu'il existe $A \in B$ avec $S(I) \subset \bar{A}^{\theta_1} = \bar{A}^p$. Posons $c = \|I\| = \sup_{x \in \delta^p X} N_I(x)$.

Avec les notations de (3.4.1), on a $(\delta^p X)_+ = \{x \in \delta^p X ; N_I(x) > 0\} \subset \bar{A}^p$.

Soit $f \in C(X, K, p)$. On a :

$$|I(f^p)| \leq \|f^p\|_I = \sup_{x \in (\delta^p X)_+} |f^p(x)| N_I(x) \leq c \sup_{x \in (\delta^p X)_+} |f^p(x)| \leq c \|f^p\|_{\bar{A}^p} = c \|f^p\|_{\bar{A}^{\theta_1}}$$

Comme \bar{A}^{θ_1} est un compact de $\delta^p X$, il existe $u_0 \in \bar{A}^{\theta_1}$ tel que $\|f^p\|_{\bar{A}^{\theta_1}} = |f^p(u_0)|$.

Mais $u_0 \in \bar{A}^{\theta_1} \Rightarrow |f^p(u_0)| = |u_0(f)| \leq \|f\|_A$ (6.1.4)(b), donc $|I(f^p)| \leq c \|f\|_A$.

Alors pour $f \in C(X, K, p)$ on pose $\mu^p(f) = I(f^p)$. Il s'agit de prolonger μ^p à $C(X, K)$ tout entier.

Soit $f \in C(X, K)$, il existe une suite $(g_n) \subset C(X, K, p)$ telle que $\|f - g_n\|_A \rightarrow 0$ d'après (6.2.2).

La suite $(\mu^p(g_n))$ est de Cauchy dans K , elle est donc convergente. On pose $\mu(f) = \lim \mu^p(g_n)$ et l'on vérifie que $\mu(f)$ ne dépend pas de la suite particulière choisie.

De même, on vérifie sans peine que μ est linéaire et qu'elle vérifie la relation $|\mu(f)| \leq c \|f\|_A, \quad \forall f \in C(X, K)$.

Ainsi $\mu \in C'_\beta(X, K)$ et $\mu^P = I$, ce qui termine la démonstration du théorème.

On a immédiatement le corollaire suivant :

(6.2.6) COROLLAIRE. - Soit $C_c(X, K)$ l'espace $C(X, K)$ muni de la topologie localement K -convexe de la convergence uniforme sur les compacts de X . Alors les éléments $\mu \in C'_c(X, K)$ correspondent aux intégrales sur $\delta^P X$ dont le support est contenu dans X .

Si $\mu \in C'_\beta(X, K)$, son support $S(\mu)$ vérifie les propriétés analogues à celles données au § (3.4). En effet :

(6.2.7) PROPOSITION. -

(a) Si $f \in C(X, K)$ telle que $f'' = 0$ sur $S(\mu)$ alors $\mu(f) = 0$.

(b) Pour tout ouvert U de X tel que $U \cap S(\mu) \neq \emptyset$, il existe $f \in C(X, K, p)$ telle que $\text{Supp } f \subset U$ et $\mu(f) = 1$.

Preuve. - Il existe $c > 0$ et $A \in B$ tels que $|\mu(f)| \leq \|f\|_A \quad \forall f \in C(X, K)$.

(a) Soit $f \in C(X, K)$. Il existe une suite (g_n) de $C(X, K, p)$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f - g_n\|_A \leq \frac{1}{n}, \text{ d'où } \|f'' - g_n^P\|_{\bar{A}^{\theta_1}} \leq \frac{1}{n}.$$

$$\text{Comme } S(\mu) \subset \bar{A}^{\theta_1}, \text{ on obtient } \|f'' - g_n^P\|_{S(\mu)} \leq \frac{1}{n}.$$

Si $f'' = 0$ sur $S(\mu)$, on a

$$\|g_n^P\|_{S(\mu)} \leq \frac{1}{n} \text{ et } |\mu(g_n)| = |\mu^P(g_n^P)| \leq M \|g_n^P\|_{S(\mu)} \leq M/n.$$

Mais $\mu(f) = \lim \mu(g_n) = 0$.

(b) Soit V un ouvert de $\delta^P X$ tel que $U = V \cap X$, alors $S(\mu^P) \cap V \neq \emptyset$, d'où

(3.4.4), il existe $f^p \in C(\delta^p X, K)$ telle que $\text{Supp } f^p \subset V$ et $\mu^p(f^p) = 1$.

Alors $\mu(f) = \mu^p(f^p) = 1$ et $\text{Supp } f = \text{Supp } f^p \cap X \subset V \cap X = U$.

(6.2.8) COROLLAIRE. - Pour tout ouvert U'' de X'' tel que $U'' \cap S(\mu) \neq \emptyset$, il existe $f \in C(X, K, p)$ telle que $\text{Supp } f'' \subset U''$ et $\mu(f) = 1$.

Preuve. - Soit $\mu \in C'_\beta(X, K)$; alors μ définit un élément $\mu'' \in C'_\beta(X'', K)$ avec $\mu^p = \mu''^p$ donc $S(\mu'') = S(\mu)$. Il suffit alors de remplacer X par X'' et d'utiliser le fait que toute fonction de $C(X'', K, p)$ est le prolongement f'' à X'' d'une fonction $f \in C(X, K, p)$.

(6.2.9) COROLLAIRE. -

(a) Soit $\mu \in C'_c(X, K)$. Alors $S(\mu)$ est, dans X , le plus petit fermé F tel que $f=0$ sur F implique $\mu(f) = 0$.

(b) Soit $\mu \in C'_\beta(X, K)$. Alors $S(\mu)$ est, dans X'' , le plus petit fermé F'' tel que $f'' = 0$ sur F'' implique $\mu(f) = 0$.

Preuve. -

(a) est un cas particulier de (b).

(b) D'après (6.2.7)(a), $S(\mu)$ est un tel fermé. Réciproquement, si F'' vérifie la condition, alors $S(\mu) \subset F''$ car dans le cas contraire, on aurait $S(\mu) \cap U'' \neq \emptyset$ avec $U'' = X'' \setminus F''$ d'où l'existence d'une fonction $f \in C(X, K, p)$ telle que $\mu(f) = 1$ et $\text{Supp } f'' \subset U''$; mais alors $f'' = 0$ sur F'' et $\mu(f) = 1$, ce qui est une contradiction.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] N. BOURBAKI *Intégration*, chap. I-IV, Hermann Paris.
- [2] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, chap. I-II, Hermann, Paris.
- [3] H. BUCHWALTER, *Parties bornées d'un espace topologique complètement régulier*, Séminaire CHOQUET, (1969-70) n° 14, 15 pages.
- [4] A. DEAIRES, *Structures ultra-uniformes et espaces éparpillés*, Publ. Dép. Math. Lyon, 9-3, (1972), p. 13-53.
- [5] A.F. MONNA et T.A. SPRINGER, *Intégration non archimédienne*, Indag. Math., 25, (1963), p. 634-653.
- [6] W.H. SCHIKHOF *Non archimedean Harmonic Analysis*, Thèse, Nijmegen (1967).
- [7] F.D. SENTILLES , *Bounded continuous functions on a completely regular space*, Trans. Amer. Math. Soc. 168, (1972), p. 311-336.
- [8] A.C.M. VAN ROOIJ et W.H. SCHIKHOF, *Non archimedean Analysis*, Nieuw Archief Voor Wiskunde, 19 (1971) n°2, p. 120-160.
- [9] J. VAN TIEL, *Espaces localement K-convexes*, I-III, Indag, Math, 27 (1965). p. 219-289.

I. RIHAOUI
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 - VILLEURBANNE