

MARC ROGALSKI

Sur les espaces uniformément fermés de fonctions à variation bornée

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 4
, p. 67-79

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_4_67_0

© Université de Lyon, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES ESPACES UNIFORMEMENT FERMES DE FONCTIONS
A VARIATION BORNEE.

par Marc ROGALSKI

RESUME. Cet exposé développe des travaux de G. Mokobodzki et de l'auteur parus dans [4]. On montre que tout sous-espace uniformément fermé de $C([0,1])$, formé de fonctions à variation bornée, est de dimension finie. On donne un résultat d'existence d'une majoration de la dimension dans certains cas.

I. INTRODUCTION, NOTATIONS et RAPPELS .-

Le résultat suivant est classique :

PROPOSITION 0 .- Soit H un sous-espace fermé en norme uniforme de $C([0,1])$. Si H est formé de fonctions de classe C^1 , alors H est de dimension finie.

Rappelons la démonstration : Le théorème du graphe fermé montre que l'application $d : H \rightarrow C([0,1]) : f \rightsquigarrow f'$ est continue. Il en résulte que la boule unité B_H de H est équicontinue, donc compacte, et H est de dimension finie.

Nous nous proposons d'étendre ce résultat au cas où H est formé de fonctions absolument continues ou même à variation bornée. De plus, dans le cas où les "dérivées" des fonctions de H sont toutes dans un espace L^p , pour un même $p > 1$, nous donnerons un théorème d'existence d'une majoration de la dimension de H .

NOTATIONS :

- C désigne l'espace $C([0,1])$.

- VBC désigne l'espace des fonctions continues à variation bornée sur $[0,1]$. Si f appartient à VBC, nous désignerons par df la mesure de Stieltjes associée à f , et la nommerons "variation" de f ; c'est une mesure diffuse sur $[0,1]$.
 - $W^{1,p}$ désigne l'espace des fonctions continues presque partout dérivables, primitives de leur dérivée, et à dérivée dans L^p ($1 \leq p \leq +\infty$).
- On a les inclusions : $C^1 \subset W^{1,\infty} \subset W^{1,p} \subset W^{1,1} \subset VBC \subset C$
- M désigne l'espace des mesures de Radon sur $[0,1]$.
 - L^p désigne l'espace classique associé à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.
 - $L^p(\mu)$ désigne l'espace analogue pour une mesure positive sur $[0,1]$.

Si H est un sous-espace de C , nous noterons B_H sa boule unité.

Pour les résultats de base sur les fonctions de $W^{1,p}$ et VBC, on pourra se reporter à [5].

II- DISTANCE DE HAUSDORFF, GRASMANNIENNE D'UN ESPACE DE BANACH.

Soit (X,d) un espace métrique, de distance bornée. Sur l'ensemble \mathcal{F} des fermés non vides de X , on définit la distance δ par l'expression

$$\delta(A,B) = \sup \left[\sup_{x \in A} d(x,B), \sup_{y \in B} d(y,A) \right].$$

On montre que (\mathcal{F}, δ) est complet [resp: précompact, compact] si et seulement si (X,d) l'est lui-même. (cf.[0])

Soit alors E un espace de Banach muni de la distance d associée à sa norme. On note $\hat{\mathcal{G}}(E)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels fermés de E , et on identifie cet ensemble avec l'ensemble des traces de ses éléments sur la boule unité B de E , c'est à dire qu'on a $\hat{\mathcal{G}}(E) \subset \mathcal{F}(B)$. De même, on peut considérer que $\hat{\mathcal{G}}(E) \setminus \{0\} \subset \mathcal{F}(S)$ (où S est la sphère unité de E). On peut alors montrer que

$\hat{\mathcal{G}}(E)$ est fermé dans $\mathcal{F}(B)$, donc complet pour la distance δ sur $\mathcal{F}(B)$ associée à d . On appellera prégrasmannienne de E l'espace métrique complet ainsi obtenu.

On obtient alors le résultat important suivant, qui nous servira dans la suite :

LEMME 1 .- L'ensemble \mathcal{G}_n des sous-espaces de dimension n de E est ouvert dans $\hat{\mathcal{G}}(E)$; l'ensemble $\mathcal{G}(E)$ des sous-espaces fermés de E possédant un supplémentaire topologique dans E est aussi ouvert dans $\hat{\mathcal{G}}(E)$.

L'ensemble $\mathcal{G}(E)$ s'appelle la grasmannienne de E . Pour plus de détails sur l'étude de la prégrasmannienne et de la grasmannienne d'un espace de Banach, on pourra se reporter à [1].

III- SOUS-ESPACE DE $W^{1,p}$ UNIFORMEMENT FERMES, POUR $p > 1$.

PROPOSITION 2 .- Tout sous-espace uniformément fermé de $W^{1,p}$ pour $p > 1$, est de dimension finie.

La démonstration est presque identique à celle de la proposition 0, l'équicontinuité de B_H se démontrant par l'inégalité de Hölder: $|f(x+h) - f(x)| \leq \|f'\|_p h^{1/q}$ (il s'agit en fait d'un cas particulier d'un résultat sur les espaces uniformément fermés de fonctions höldériennes). On voit par le théorème du graphe fermé que l'application $d : H \rightarrow L^p : f \rightsquigarrow f'$ est continue; donc il existe une constante K telle que $\|f'\|_p \leq K \|f\|_\infty$ pour toute f de H . Nous allons voir que si K est fixé, la dimensions de H ne peut être arbitrairement grande.

DEFINITION 3 .- Pour $p \geq 1$ et $K \geq 1$ on définit

$$\mathcal{O}_{K,p} = \{f \in W^{1,p} \mid \|f'\|_p \leq K \|f\|_\infty\},$$

puis on pose

$$\varphi(K,p) = \text{Sup}\{\dim(H) \mid H \text{ sous-espace fermé de } C, H \subset \mathcal{O}_{K,p}\}$$

Le nombre $\varphi(K,p)$ est un entier fini ou infini. Il est évident que la fonction $(K,p) \rightsquigarrow \varphi(K,p)$ est croissante en K et décroissante en p .

THEOREME 4 .- Si $p > 1$, on a $\varphi(K,p) < +\infty$

Notons S la sphère unité de C , et si H est un sous-espace de C notons S_H la sphère unité de H . Le théorème 4 résulte du lemme suivant :

LEMME 5 .- Soit R un ensemble équicontinu de S . Alors on a $\text{Sup} \{ \dim(H) \mid H \text{ sous-espace fermé de } C, S_H \subset R \} < \infty$.

Ce lemme dépend du théorème d'Ascoli et de résultats élémentaires sur la prégrasmannienne de l'espace de Banach C . Précisément la prégrasmannienne \mathcal{G} de C étant l'espace métrique des sous-espaces fermés quelconques de C , le sous-ensemble \mathcal{G}_n de \mathcal{G} formé par les espaces de dimension n est un ouvert de \mathcal{G} (Lemme 1). L'ensemble R étant relativement compact, l'ensemble correspondant R' de \mathcal{G} (formé des H tels que $S_H \subset \bar{R}$) est compact, et inclus dans la réunion des \mathcal{G}_n . On conclut par le théorème de Borel-Lebesgue.

COROLLAIRE 6 .- Lorsque $K \rightarrow +\infty$, $\varphi(K,p) \rightarrow +\infty$ ($p > 1$).

PROBLEME 7 .- Soit $K \geq 1$. La quantité $O(K) = \lim_{\substack{p \rightarrow 1 \\ p > 1}} \varphi(K,p)$

est-elle finie ?

Si oui, peut-on évaluer la borne supérieure des nombres p tels que $\varphi(K,p) = O(K)$?

Sinon, que peut-on dire de la suite $p_n(K)$ définie par la relation: $\varphi(K,p) = n$ si $p \in]p_{n+1}(K), p_n(K)[$?

Une direction possible pour résoudre le problème 7 consiste à essayer d'évaluer numériquement le nombre $\varphi(K,p)$.

On peut obtenir des minoration en étudiant certains sous-espaces particuliers de VBC .

Un exemple : fonctions affines par morceaux.

Soit Δ une subdivision de $[0,1]$ en N intervalles consécutifs de longueur l_1, l_2, \dots, l_n ; notons H_Δ l'espace des fonctions continues, affines sur chaque intervalle de Δ . Pour tout $p \geq 1$, H_Δ est inclus dans $W^{1,p}$, et sa dimension est $N + 1$. Soit $d_{\Delta,p} : H_\Delta \rightarrow L^p$

l'application dérivée. Un calcul d'extrémum élémentaire prouve que l'on a $\|d_{\Delta,p}\|$ minimum lorsque $\Delta = \Delta_0$, subdivision correspondant à $l_1 = l_2 = \dots = l_n = \frac{1}{N}$. Et on trouve alors $\|d_{\Delta_0,p}\| = C(N,p) = 2N$

Pour qu'il existe un espace H_Δ (de dimension $N+1$) dans $\mathcal{O}_{K,p}$, il faut et il suffit donc que $\|d_{\Delta,p}\| \leq K$ pour une subdivision Δ . Pour cela il faut et il suffit que l'on ait $C(N,p) = 2N \leq K$, donc que $N \leq E\left(\frac{K}{2}\right)$. D'où la

PROPOSITION 8 .- Dès que $K \geq 2$, $\varphi(K,p) \geq E\left(\frac{K}{2}\right) + 1$.

REMARQUE 9 .- On peut montrer l'inégalité suivante, en utilisant les fonctions trigonométriques:

$$\varphi(K,p) \geq 1 + 2E\left(\frac{K}{1 + 4\pi \left[\frac{\Gamma\left(\frac{2(p+1)}{2}\right)}{\pi \Gamma(p+1)} \right]^{\frac{1}{p}}}\right)$$

Malheureusement, quelques essais numériques semblent montrer que cette minoration de $\varphi(K,P)$ est inférieure à celle de la proposition 9.

IV- FONCTIONS A VARIATIONS BORNEES DONT LES VARIATIONS SONT DANS

UN $L^P(\mu)$, $P > 1$.

PROPOSITION 10 .- Soit H un sous-espace fermé de C . Si H est inclus dans VBC , et si les variations df des fonctions f de H appartiennent toutes à un même espace $L^P(\mu)$, où $P > 1$ et μ appartient à M^+ , alors $\dim(H) < +\infty$.

L'hypothèse que nous écrivons en abrégé : $d(H) \subset L^P(\mu)$, signifie que pour toute f de H , il existe φ_f de $L^P(\mu)$, unique, telle que $df = \varphi_f d\mu$. Il est facile de voir qu'on peut se ramener au cas où μ est diffuse (ne charge aucun point) car, les fonctions de H sont continues. On peut évidemment supposer μ de masse 1. On voit alors, par le théorème du graphe fermé, que l'application $f \rightarrow \varphi_f : H \rightarrow L^P(\mu)$, que nous noterons encore d , est continue.

Soit alors $f \in B_H$. On a :

$$|f(x+h) - f(x)| = \left| \int_x^{x+h} df \right| = \left| \int_x^{x+h} \varphi_f d\mu \right| \leq \|\varphi_f\|_P \left[\mu([x, x+h]) \right]^{\frac{1}{q}} \leq K \left[\mu([x, x+h]) \right]^{\frac{1}{q}}$$

et ceci tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$, car μ est diffuse. B_H est donc équicontinue, et on achève comme à la proposition 0.

C.Q.F.D.

Dans le cas où $d(H) \subset L^P(\mu)$ (μ diffuse, $\mu \in M_1^+$), on peut étendre le théorème 4.

DEFINITION 11 .- Soit μ diffuse, $\mu \in M_1^+$. On pose, pour $P \geq 1$ et $K \geq 1$:

$$\mathcal{O}_{K,P,\mu} = \left\{ f \in VBC \mid df \in L^P(\mu), \text{ et } \|df\|_{L^P(\mu)} \leq K \|f\|_{\infty} \right\}.$$

Puis on définit :

$$\varphi(K,P,\mu) = \text{Sup} \left\{ \dim(H) \mid H \text{ sous-espace fermé de } C, H \subset \mathcal{O}_{K,P,\mu} \right\}.$$

THEOREME 12 .- Si $P > 1$, on a $\varphi(K,P,\mu) < +\infty$.

La démonstration est exactement la même que celle du théorème 4.

On peut aussi, dans ce cas, poser le problème analogue au problème 7.

PROBLEME 13 .- A-t-on $\lim_{P \rightarrow 1} \varphi(K,P,\mu) = +\infty$?

V- LE LEMME FONDAMENTAL.

Nous allons maintenant donner le lemme qui est la clé de la solution du problème général. Ce lemme est classique et du à Helly, mais nous incluons une démonstration pour la commodité du lecteur.

LEMME 14 .- Soit H un sous-espace fermé en norme uniforme de VBC. De toute suite de B_H , on peut extraire une sous-suite convergent simplement partout vers une fonction à variation bornée (peut-être non continue).

DEMONSTRATION .- D'abord le théorème du graphe fermé montre, comme dans la démonstration de la proposition 0, que l'application $d : H \rightarrow M : f \rightarrow df$ est continue donc qu'il existe $K > 0$ tel que

l'on ait ; $\|df\|_M \leq K\|f\|_\infty$.

Nous allons faire la démonstration dans le cas où les fonctions de H ne sont pas toutes nulles en O (dans ce cas particulier, la démonstration se simplifierait légèrement).

Soit donc $f_n \in B_H$. Soit $\varphi \in H$, telle que $\varphi(O) = 1$. On peut écrire

$$f_n = f_n - f_n(O)\varphi + f_n(O)\varphi = g_n + f_n(O)\varphi, \text{ où } g_n \in H_0, \text{ et}$$

$\|g_n\| \leq 1 + \|\varphi\|_\infty$. Quitte à extraire une première sous-suite, on peut supposer que $f_n(O)$ converge vers une limite λ . Pour tout n , on a

$$\|dg_n\|_M \leq K(1 + \|\varphi\|_\infty) = K'. \text{ Donc on a aussi } \|(dg_n)^+\|_M \leq K' \text{ et}$$

$$\|(dg_n)^-\|_M \leq K'. \text{ Posons alors}$$

$$g_n^1(x) = \int_0^x (dg_n)^+ \text{ et } g_n^2(x) = \int_0^x (dg_n)^-.$$

Les fonctions $g_n^{(1)}$ et $g_n^{(2)}$ sont croissantes et comprises entre 0 et K' .

Rappelons alors le résultat classique suivant, dont la démonstration utilise deux fois le procédé diagonal :

LEMME 15 .- De toute suite (u_n) de fonctions croissantes sur $[0,1]$, à valeurs dans $[0, K']$, on peut extraire une sous-suite convergeant simplement partout vers une fonction croissante.

Donc, en appliquant ce lemme deux fois, on peut extraire une sous-suite d'entiers (n_p) telle que $g_{n_p}^{(1)} \rightarrow g_1$ et $g_{n_p}^{(2)} \rightarrow g_2$ simplement partout, g_1 et g_2 étant croissantes.

Alors il est clair que $f_{n_p} \rightarrow g_1 - g_2 + \lambda\varphi$ simplement partout, et cette fonction est évidemment à variation bornée.

C.Q.F.D.

On voit déjà, par ce lemme, que la boule unité d'un sous-espace uniformément fermé de VBC jouit déjà d'une propriété proche de la faible compacité.

Nous allons utiliser cette propriété pour montrer que $d(B_H)$ est

faiblement relativement compacte dans M (pour $\sigma(M, M')$), par le théorème d'Eberlein. Nous déduirons de cette propriété, par un théorème de Grothendieck, une propriété d'uniforme intégrabilité dans un espace $L^1(\mu)$. Et, cette dernière condition par intégration, nous fournira l'équicontinuité de B_H , c'est à dire le résultat. Même dans le cas où H est inclus dans $W^{1,1}$, il est clair que la méthode de l'inégalité de Hölder, utilisée pour montrer la proposition 2, est inopérante.

VI- SOUS-ESPACES UNIFORMEMENT FERMES DE VBC.

THEOREME 16 .- Soit H un sous-espace uniformément fermé de VBC.

Alors $\dim(H) < + \infty$.

DEMONSTRATION. Soit df_n une suite de $d(B_H)$. D'après le lemme 14 il existe une sous-suite f_{n_p} qui converge partout simplement vers une fonction f à variation bornée. Soit $\ell \in M'$. L'application $f \rightarrow \langle \ell, df \rangle$ est continue sur H . Donc par le théorème de Hahn-Banach, il existe une mesure μ_ℓ de M telle que pour toute f de H on ait $\langle \ell, df \rangle = \int f d\mu_\ell$

On a alors $\langle \ell, df_{n_p} \rangle = \int f_{n_p} d\mu_\ell$, et cette quantité converge vers $\int f d\mu_\ell = \alpha$ d'après le théorème de Lebesgue. Donc la suite $\langle \ell, df_{n_p} \rangle$ est de Cauchy pour toute ℓ de M' , ce qui exprime que df_{n_p} est une suite de Cauchy faible dans M .

Or, on sait que M est séquentiellement faiblement complet. Donc df_{n_p} converge faiblement vers une mesure.

Donc, de toute suite df_n de $d(B_H)$, on a pu extraire une sous-suite df_{n_p} faiblement convergente. Il résulte alors du théorème d'Eberlein [2] que $d(B_H)$ est faiblement relativement compact dans M (pour $\sigma(M, M')$) puisqu'il est borné (car d est continue).

Un théorème de Grothendieck [2] affirme qu'il existe alors une mesure μ de M^+ telle que $d(B_H) \subset L^1(\mu)$, avec $d(B_H)$ faiblement relativement compacte dans $L^1(\mu)$ (pour $\sigma(L^1(\mu), L^\infty(\mu))$).

Toute mesure df de $d(B_H)$ s'écrit donc $df = \varphi_f d\mu$, où φ_f est dans $L^1(\mu)$, et l'ensemble des φ_f est faiblement relativement compact dans $L^1(\mu)$. Il résulte du critère de Dunford et Pettis [2] que l'ensemble des φ_f est uniformément intégrable dans $L^1(\mu)$.

Soit alors f dans B_H . On a :

$$|f(x+h) - f(x)| = \left| \int_x^{x+h} df \right| = \left| \int_x^{x+h} \varphi_f d\mu \right| \leq \int_x^{x+h} |\varphi_f| d\mu$$

et cette dernière quantité est majorée par ε si $\mu([x, x+h]) < \varepsilon$ uniformément pour f dans B_H .

Si $\mu(\{x\}) = 0$, alors $\mu([x, x+h]) < \gamma$ par $|h| < h_0$, et les fonctions de B_H sont équicontinues au point x . Si pour tout x , $\mu(\{x\}) = 0$, on peut alors conclure par les théorèmes d'Ascoli et de Riez.

Donc tout revient à montrer qu'on peut choisir μ diffuse. Or ceci se démontre facilement : on écrit $\mu = \mu_c + \mu_d$, où μ_d est la partie discrète de μ . Et il résulte aisément du fait que les mesures df sont diffuses, que les fonctions φ_f appartiennent à $L^1(\mu_c)$ et que l'ensemble de ces fonctions y est faiblement relativement compact.

C.Q.F.D.

Bien entendu on retrouve ainsi les propositions 2 et 10 .

Voici une application du théorème 16 aux sous-espaces fermés de $L^1([0, 1])$.

COROLLAIRE 17 .- Soit E un sous-espace fermé de L^1 , de dimension infinie. Alors le sous-espace H de $W^{1,1}$, formé des fonctions

$$f(x) = \int_0^x g(t) dt \quad ,$$

où g appartient à E , n'est pas fermé en norme uniforme, et son adhérence n'est pas incluse dans $W^{1,1}$.

Pourtant, la boule unité de E peut être faiblement compacte, puisqu'il existe des sous-espaces fermés de L^1 de dimension infinie qui sont réflexifs.

xifs (car, par exemple, inclus dans L^2 ; cf.[3]).

Si H est un sous-espace uniformément fermé de VBC , l'application $d : H \rightarrow M$ est continue, donc il existe K tel que pour toute f de H on ait :

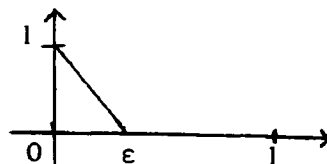
$$\|df\|_M \leq K \|f\|_\infty .$$

Et l'existence de cette constante K est la clé du lemme 14 et, finalement, de l'équicontinuité de B_H . Néanmoins, dans la démonstration du théorème 16, la structure vectorielle de H intervient fondamentalement pour affirmer que la forme linéaire $f \rightsquigarrow \langle l, df \rangle$ est bornée, donc continue, donc se prolonge en une mesure. Si on se pose alors le problème d'étendre le théorème 4 (ou le théorème 12), on est amené à définir, par exemple, l'ensemble suivant :

$$\mathcal{O}_{K,1} = \left\{ f \in W^{1,1} \mid \|f\|_1 \leq K \|f\|_\infty \right\} .$$

Mais $\mathcal{O}_{K,1}$ n'est plus un espace vectoriel, et ne pouvant donc lui appliquer le raisonnement précédent, on ne pourra plus conclure que l'ensemble $U_{K,1} = \mathcal{O}_{K,1} \cap S$ est relativement compact dans S , c.à.d. équicontinu. Et d'ailleurs ceci est faux, comme le prouve l'exemple suivant :

EXEMPLE 18 .- On considère les fonctions f_ϵ de graphe ci-contre. Il est clair que les f_ϵ appartiennent à $U_{1,1}$, pourtant elles ne sont manifestement pas équicontinues.



Le problème suivant reste donc ouvert :

PROBLEME 19 .- Définissant $\varphi(K,1)$ par

$$\varphi(K,1) = \text{Sup} \left\{ \dim(H) \mid H \subset \mathcal{O}_{K,1}, H \text{ fermé dans } C \right\},$$

a-t-on $\varphi(K,1) < +\infty$?

On peut poser le même problème en remplaçant $\mathcal{O}_{K,1}$ par l'ensemble

$\mathcal{V}_K = \{f \in VBC \mid \|df\|_M \leq K \|f\|_\infty\}$. On a néanmoins un résultat partiel (valable aussi pour $\mathcal{O}_{K,p}$, $p \geq 1$).

PROPOSITION 20 .- Soit $K \geq 1$. Soit \mathcal{H}_K l'ensemble des sous-espaces fermés de C inclus dans \mathcal{V}_K . Alors \mathcal{H}_K possède des éléments maximaux pour l'inclusion, et tout H de \mathcal{H}_K est contenu dans l'un d'eux.

Cela résulte de ce que si H est un sous-espace vectoriel de \mathcal{V}_K , \bar{H} est encore inclus dans \mathcal{V}_K (utiliser un raisonnement d'uniforme continuité, valable aussi dans $\mathcal{O}_{K,p}$, pour prolonger l'application d).

VII - GENERALISATIONS ?

Bien entendu, le théorème 16 subsiste pour des fonctions continues à variation bornée à valeurs vectorielles dans \mathbb{R}^n . Mais il devient évidemment faux, comme le montre l'exemple des fonctions constantes, pour des fonctions à valeurs dans un espace normé E de dimension infinie. D'ailleurs l'équicontinuité de la boule unité d'un sous-espace H uniformément fermé de $C([0,1], E)$, formé de fonctions à variation bornée, n'implique nullement la compacité en norme de cette boule B (car la réunion des $f([0,1])$, pour f dans B , n'est pas relativement compacte dans E).

La généralisation éventuelle serait alors la

CONJECTURE 20 .- Soit E un espace normé (ou de Banach) et H un sous-espace uniformément fermé de $C([0,1], E)$, formé de fonctions à variation bornée. Alors la boule unité de B de H est équicontinue.

Voici en tout cas un résultat plus faible :

PROPOSITION 21 .

Sous les hypothèses de la conjecture 20, soit E' le dual de E , muni de la norme duale. Alors la famille des applications $\varphi_f : [0,1] \times E' \rightarrow \mathbb{R} : (t,\ell) \rightsquigarrow \varphi_f(t,\ell) = \langle \ell, f(t) \rangle$, indexée par les éléments f de B , est équicontinue.

Si $\ell \in E'$, on montre par le théorème du graphe fermé que, les fonctions $\ell \circ f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ appartenant de façon évidente à VBC pour f dans H , l'application $f \rightsquigarrow d(\ell \circ f) : H \rightarrow M$ est continue. Il en résulte que $d(\ell \circ B)$ est borné dans M . De plus, on montre comme au lemme 14 que toute suite (f_n) de B admet une sous-suite (f_{n_p}) telle que $\ell \circ f_{n_p}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction à variation bornée. On en déduit, comme dans la démonstration du théorème 16, que $d(\ell \circ B)$ est $\sigma(M, M')$ relativement compact, puis que la famille $(\ell \circ f)_{f \in B}$ est équicontinue sur $[0,1]$.

Soit alors $(t_0, \ell_0) \in [0,1] \times E'$. Si (t, ℓ) est un point variable de $[0,1] \times E'$, on a l'inégalité

$$|\varphi_f(t, \ell) - \varphi_f(t_0, \ell_0)| \leq | \langle \ell_0, f(t) - f(t_0) \rangle | + | \langle \ell - \ell_0, f(t) \rangle |.$$

Le deuxième terme du second membre est majoré par $\|\ell - \ell_0\| \cdot \|f(t)\|$, lui-même majoré par $\|\ell - \ell_0\|$. Le premier terme est majoré par $\frac{\varepsilon}{2}$ si $|t - t_0| < \eta$, ceci uniformément pour f dans B , d'après ce qui précède. Donc, si $|t - t_0| < \eta$ et $\|\ell - \ell_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$, on a bien, pour tout f de B , $|\varphi_f(t, \ell) - \varphi_f(t_0, \ell_0)| < \varepsilon$.

Par ailleurs, depuis les travaux exposés ci-dessus, Pajor a montré le résultat suivant, qui étend le théorème 16 au cas des fonctions définies sur un ensemble totalement ordonné quelconque :

THEOREME 22 .- Soit X un ensemble totalement ordonné, et H un espace vectoriel uniformément fermé de fonctions numériques à variation bornée sur X ; alors H est de dimension finie.

Sa méthode consiste à plonger X dans $[0,1]$ et à se ramener au théorème 16.

BIBLIOGRAPHIE

- [0] N. BOURBAKI : Topologie générale, Ch.9, exercices; Hermann, Paris.
- [1] A. DOUADY : Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné; exposés au Séminaire Leray, 1965-66, Collège de France, Paris.
- [2] A. GROTHENDIECK : Espaces vectoriels topologiques; Sao Paulo.
- [3] A. GROTHENDIECK : Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$, Canad.J. of Math., t.5, 1953, p.129-173.
- [4] G. MOKOBODZKI et M. ROGALSKI : Sur les espaces uniformément fermés de fonctions à variation bornée; C.R. Acad. Sc., Paris, t.274(1972), p. 1225-1228.
- [5] F. RIESZ et B.Sz.-NAGY : Leçons d'Analyse fonctionnelle; Publication de l'Acad. Sc. de Hongrie