Publications du Département de mathématiques de Lyon

Manuel Antonio Fugarolas Villamarin

Prolongement bornologique de foncteurs d'interpolation et applications

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 4
, p. 57-66
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_4_57_0>

II$^{\text{ème}}$ Coll. Anal. Fonct.
(1973, Bordeaux)
p. 335-344

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1973 t. 10-4

PROLONGEMENT BORNOLOGIQUE DE FONCTEURS D'INTERPOLATION ET APPLICATIONS

par

Manuel Antonio Fugarolas Villamarín

Nous définissons l'interpolation dans les espaces bornologiques et nous démontrons que tout foncteur d'interpolation dans la catégorie de couples d'espaces de Banach se prolonge en un foncteur d'interpolation dans la catégorie de couples d'espaces bornologiques complets. Comme applications, nous donnons la généralisation bornologique des espaces de moyennes de J. L. Lions et J. Peetre ((5), (6)).

1. DEFINITONS GENERALES.

DEFINITION 1.- *Un couple d'interpolation* (E_1, E_2, E, j_1, j_2) *d'espaces vectoriels bornologiques est constitué par trois ebc* E_1, E_2 *et* E, *et deux morphismes injectifs* j_1 *et* j_2, *respectivement de* E_1 *et* E_2 *dans* E.

Le couple d'interpolation (E_1, E_2, E, j_1, j_2) sera noté en général par (E_1, E_2).

On désigne par $E_1 - E_2$ le noyau de l'application $j_1 - j_2$ de $E_1 \times E_2$ dans E, muni de la bornologie induite par $E_1 \times E_2$, et par $E_1 + E_2$ le sous-espace de E image de $E_1 \times E_2$ par l'application $j_1 + j_2$ de $E_1 \times E_2$ dans E, muni de la bornologie quotient de $E_1 \times E_2$ par le noyau de $j_1 + j_2$.

On supposera toujours que E_1, E_2 et E sont d'ebc séparés. De cette façon, $E_1 - E_2$ et $E_1 + E_2$ sont aussi d'ebc séparés.

DEFINITION 2.- <u>Soient</u> (E_1, E_2) <u>et</u> (F_1, F_2) <u>deux couples d'interpolation. On désignera par</u> $\mathrm{Hom}((E_1,E_2),(F_1,F_2))$ <u>le sous-espace de</u> $\mathrm{Hom}(E_1,F_1) \times \mathrm{Hom}(E_2,F_2)$ <u>formé des couples d'applications</u> $u = (u_1,u_2)$ <u>dont les restrictions à</u> $E_1 - E_2$ <u>coïncident dans</u> $F_1 + F_2$.

Si $u \in \mathrm{Hom}((E_1,E_2), (F_1,F_2))$ on a alos deux morphismes

$$_{-}u \in \mathrm{Hom}(E_1-E_2,\ F_1-F_2) \quad \text{et} \quad _{+}u \in \mathrm{Hom}(E_1+E_2,\ F_1+F_2)$$

(restriction et prolongement de u, respectivement), de telle forme que si <u>nous notons par</u> C_b la catégorie dont les objets sont les couples d'interpolation et les morphismes les données dans la définition 2, on peut construire deux foncteurs covariants Φ_- et Φ_+ de C_b dans C (catégorie usuelle d'ebc) définis d'une forme naturelle par:

$$\Phi_- \quad \begin{aligned} (E_1,E_2) &\to \Phi_-[E_1,E_2]=E_1-E_2; \\ u \in \mathrm{Hom}((E_1,E_2),(F_1,F_2)) &\to {}_{-}u \in \mathrm{Hom}(E_1-E_2,F_1-F_2); \end{aligned}$$

$$\Phi_+ \quad \begin{aligned} (E_1,E_2) &\to \Phi_+[E_1,E_2]=E_1+E_2; \\ u \in \mathrm{Hom}((E_1,E_2),(F_1,F_2)) &\to {}_{+}u \in \mathrm{Hom}(E_1+E_2,F_1+F_2); \end{aligned}$$

et de telle manière que Φ_- est <u>bornologiquement plus fine</u> que Φ_+ (<u>avec la notation</u> $\Phi_- \leq \Phi_+$).

DEFINITION 3.- <u>On dit qu'un foncteur convariant</u> $\Phi : C_b \to C$ <u>est d'interpolation si</u> $\Phi_- \leq \Phi \leq \Phi_+$.

2. PROLONGEMENT DE FONCTEURS D'INTERPOLATION (cf. aussi (2)).

On désigne par C(B) la catégorie dont les objets sont les couples d'interpolation formés d'espaces de Banach et dont les morphismes sont définis dans la forme ordinaire (définition 2).

Soient $E_1 = \varinjlim (E_1^i, \pi_1^{i,k})$ et $E_2 = \varinjlim (E_2^j, \pi_2^{j,l})$ deux ebc complets, et supposons que (E_1, E_2) est un objet de C_b^c (catégorie dont les couples d'interpolation sont formés par d'ebc complets). Nous le dénoterons par $(E_1,E_2) = \varinjlim((E_1^i, E_2^j), (\pi_1^{i,k}, \pi_2^{j,l}))$, où les couples d'interpolation (E_1^i, E_2^j) sont définis par les respectives inyections dans $E_1 + E_2$. Alors:

$$(\pi_1^{i,k}, \pi_2^{j,l}) \in \mathrm{Hom}\ ((E_1^i, E_2^j), (E_1^k, E_2^l))$$

THEOREME 1.- <u>Tout foncteur d'interpolation</u> Φ <u>défini dans la catégorie</u> C(B) <u>se prolonge en un foncteur d'interpolation</u> $\vec{\Phi}$ <u>défini dans la catégorie</u> C_b^c, <u>de telle forme que si</u>

$$(E_1,E_2) = \varinjlim((E_1^i, E_2^j),\ (\pi_1^{i,k},\ \pi_2^{j,l}))$$

<u>est un objet de</u> C_b^c, <u>on a</u>:

$$\vec{\Phi}[E_1,E_2] = \varinjlim\ (\Phi[E_1^i, E_2^j],\ \Phi\ [(\pi_1^{i,k},\ \pi_2^{j,l})])$$

<u>où</u> $\vec{\Phi}[E_1,E_2]$ <u>est un ebc complet</u>.

Demonstration.- On vérifie facilement que

$$\Phi_-[E_1,E_2] \subset \vec{\Phi}[E_1,E_2] \subset \Phi_+[E_1,E_2]$$

Si $u \in \mathrm{Hom}((E_1,E_2),(F_1,F_2))$, oú $(F_1, F_2) =$ $= \varinjlim ((F_1^p,F_2^q), (\tau_1^{p,r}, \tau_2^{q,s}))$, pour tout (i,j) il existe (p,q) tel que $u \in \mathrm{Hom}((E_1^i,E_2^j),(F_1^p,F_2^q))$, et comme Φ est un foncteur d'interpolation on a $u \in \mathrm{Hom}(\Phi[E_1^i,E_2^j], \Phi[F_1^p,F_2^q])$, donc u est un morphisme de $\Phi[E_1^i,E_2^j]$ dans $\vec{\Phi}[F_1,F_2]$ pour tout (i,j), où $\vec{\Phi}[F_1,F_2] = \varinjlim (\Phi[F_1^p,F_2^q], \Phi[(\tau_1^{p,r}, \tau_2^{q,s})])$, et alors $u \in \mathrm{Hom}(\vec{\Phi}[E_1,E_2], \vec{\Phi}[F_1,F_2])$ (nous avons identifié toujours u à l'application prolongement $\Phi_+[u]$).

3. ESPACES BORNOLOGIQUES DE MOYENNES (cf. aussi (3)).

Pour (B_1,B_2) objet de $C(B)$, $1 \le p_1,p_2 \le \infty$, et ξ_1 et ξ_2 paramètres réels tels que $\xi_1 . \xi_2 < 0$, nous considérons l'espace de moyennes $S[p_1,\xi_1,B_1;p_2,\xi_2,B_2]$ ((5) y (6)). Si (E_1,E_2) est un objet de C_b^c, nous introduissont les espaces bornologiques de moyennes comme dans le cas classique, par les espaces de suites de puissance p^e-Mackey-sommable $\ell^{p1}(E_1)$ et $\ell^{p2}(E_2)$, (4).

THEOREME 2.- Le foncteur $\vec{S}[p_1,\xi_1,.;p_2,\xi_2,.]: C_b^c \to C$ définie par

$$\vec{S}[p_1,\xi_1,E_1;p_2,\xi_2,E_2] = \varinjlim S[p_1,\xi_1,E_1^i;p_2,\xi_2,E_2^j],$$

pour $(E_1,E_2) = \varinjlim (E_1^i, E_2^j)$ objet de C_b^c, est un foncteur d'interpolation, où $\vec{S}[p_1,\xi_1,E_1;p_2,\xi_2,E_2]$ (espace bornologique de moyennes) est un ebc complet, et de telle forme que:

(a) Si $p_1 \leq q_1$, et $p_2 \leq q_2$, $\vec{S}[p_1,\xi_1,\cdot;p_2,\xi_2,\cdot]$ est bornologiquement plus fine que $\vec{S}[q_1,\xi_1,\cdot;q_2,\xi_2,\cdot]$.

(b) Si on suposse que, soit p_1, soit p_2, est fini, alors $E_1 \cap E_2$ est bornologiquement dense dans $\vec{S}[p_1,\xi_1,E_1;p_2,\xi_2,E_2]$.

(c) On a les propiétés:

$$\vec{S}[p_1,\xi_1,E_1;p_2,\xi_2,E_2]=\vec{S}[p_2,\xi_2,E_2;p_1,\xi_1,E_1]$$

(symétrie)

$$\vec{S}[p_1,\xi_1,E_1;p_2,\xi_2,E_2]=\vec{S}[p_1,\lambda\xi_1,E_1;p_2,\lambda\xi_2,E_2] \quad (\lambda\neq 0)$$

(homogénéité).

(d) Propriété d'équivalence. Si

$$\frac{1-\theta}{p_1}+\frac{\theta}{p_2}=\frac{1-\theta}{q_1}+\frac{\theta}{q_2}=\frac{1}{p}, \quad \text{avec } \frac{\xi_1}{\xi_1-\xi_2}=\frac{\eta_1}{\eta_1-\eta_2}=\theta,$$

on a

$$\vec{S}[p_1,\xi_1,E_1;p_2,\xi_2,E_2]=\vec{S}[q_1,\eta_1,E_1;q_2,\eta_2,E_2].$$

Démonstration.- La propiété d'interpolation est déjà une conséquence inmédiate du théoreme 1, et on déduit les autres propriétés ant prenant "limites inductives bornologiques" dans le cas classique de la catégorie C(B).

Pour donner la propriété de réitération dans les espaces $\vec{S}[p_1,\xi_1,E_1;p_2,\xi_2,E_2]$ nous introduissons aussi les espaces de classe $K_\theta(E_1,E_2)$: Soit (E_1,E_2) un objet de C_b^c et supposons donné θ avec $0<\theta<1$.

DEFINITION 4.- <u>Un ebc complet</u> E <u>(intermédiaire) est dit de la classe</u> $\underline{K}_\theta(E_1,E_2)$ <u>(resp. de la classe</u> $\bar{K}_\theta(E_1,E_2)$, <u>resp. de la classe</u> $K_\theta(E_1,E_2)$), <u>si</u> $\vec{S}[1,\theta,E_1;1,\theta-1,E_2]\subset E$ (<u>resp. si</u>

$$E\subset\vec{S}[\infty,\theta,\ E_1;\ \infty,\theta-1,\ E_2],$$

<u>resp. s'il est a la fois de la classe</u> $\underline{K}_\theta(E_1,E_2)$ <u>et de la classe</u> $\bar{K}_\theta(E_1,E_2)$.

D'aprés (6), $\vec{S}[p_1,\xi_1,E_1;p_2,\xi_2,E_2]$ et $\vec{\Phi}_\theta[E_1,E_2]$ sont espaces de classe $K_\theta(E_1,E_2)$, où $\vec{\Phi}_\theta$ désigne le prolongement a C_b^c du foncteur d'interpolation de Calderón Φ_θ,(1).

THEOREME 3.- <u>Soient</u> F_1 <u>et</u> F_2 <u>deux ebc et soient</u> θ_1 <u>et</u> θ_2 <u>tels que</u> $\theta_1<\theta<\theta_2$. <u>Supposons aussi que les relations suivantes aient lieu</u>:

$$\eta_i=(1-\theta_i)\xi_1+\theta_i\xi_2 \qquad (i=1,2),$$

(1)

$$\frac{1}{q_i}=\frac{1-\theta_i}{p_1}+\frac{\theta_i}{p_2} \qquad (i=1,2).$$

(a) <u>Si</u> F_1 <u>et</u> F_2 <u>sont respectivement de classe</u> $\underline{K}_{\theta_1}(E_1,E_2)$ <u>et</u> $\underline{K}_{\theta_2}(E_1,E_2)$, <u>alors</u>

$$\vec{S}[p_1,\xi_1,E_1;p_2,\xi_2,E_2]\subset\vec{S}[q_1,\eta_1,F_1;q_2,\eta_2,F_2]$$

(b) <u>Si</u> F_1 <u>et</u> F_2 <u>son respectivement de classe</u> $\bar{K}_{\theta_1}(E_1,E_2)$ <u>et</u> $\bar{K}_{\theta_2}(E_1,E_2)$, <u>alors</u>

$$\vec{S}[q_1,\eta_1,F_1;q_2,\eta_2,F_2]\subset\vec{S}[p_1,\xi_1,E_1;p_2\xi_2,E_2]$$

<u>Démonstration</u>.- a) Soient $F_1=\varinjlim F_1^p$, $F_2=\varinjlim F_2^q$ et $(E_1,E_2)=\varinjlim (E_1^i,E_2^j)$. Par le théorème 2 nous avons

$$\vec{S}[p_1,\xi_1,E_1;p_2,\xi_2,E_2]=\varinjlim S[p_1,\xi_1,E_1^i;p_2,\xi_2,E_2^j]$$

$$\vec{S}[q_1,\eta_1,F_1;q_2,\eta_2,F_2]=\varinjlim S[q_1,\eta_1,F_1^p;q_2,\eta_2,F_2^q]$$

et comme F_1 et F_2 sont respectivement de classe $\underline{K}_{\theta_1}(E_1,E_2)$ et $\underline{K}_{\theta_2}(E_1,E_2)$, pour tout (i,j) il existe (p,q) tel que

$$S[1,\theta_1,E_1^i;\ 1,\theta_1-1,E_2^j]\subset F_1^p$$

$$S[1,\theta_2,E_1^i;\ 1,\theta_2-1,E_2^j]\subset F_2^q$$

et appliquant l'inégalité de Hölder, sous les relations (1), on déduit que

$$S[p_1,\xi_1,E_1^i;p_2,\xi_2,E_2^j]\subset S[q_1,\eta_1,F_1^p;q_2,\eta_2,F_2^q]$$

donc $S[p_1,\xi_1,E_1^i;p_2,\xi_2,E_2^j]\subset\vec{S}[q_1,\eta_1,F_1;q_2,\eta_2,F_2]$ pour tout (i,j), done

$$\vec{S}[p_1,\xi_1,E_1;p_2,\xi_2,E_2]\subset\vec{S}[q_1,\eta_1,F_1;q_2,\eta_2,F_2]$$

On démontre b) également: Si F_1 et F_2 sont respectivement de classe $\bar{K}_{\theta_1}(E_1,E_2)$ et $\bar{K}_{\theta_2}(E_1,E_2)$, pour tout (p,q) il existe (i,j) tel que

$$F_1^p\subset S[\infty,\theta_1,E_1^i;\infty,\theta_1-1,E_2^j]$$

$$F_2^q\subset S[\infty,\theta_2,E_1^i;\infty,\theta_2-1,E_2^j]$$

c'est a dire, F_1^p et F_2^q sont respectivement de classe $\bar{K}_{\theta_1}(E_1^i,E_2^j)$ et $\bar{K}_{\theta_2}(E_1^i,E_2^j)$ dans la catégorie C(B), donc, (6),

$$S[q_1,\eta_1,F_1^p;q_2,\eta_2,F_2^q] \subset S[p_1,\xi_1,E_1;p_2,\xi_2,E_2^j]$$

donc $S[q_1,\eta_1,F_1^p;q_2,\eta_2,F_2^q] \subset \vec{S}[p_1,\xi_1,E_1;p_2,\xi_2,E_2]$ pour tout (p,q), donc

$$\vec{S}[q_1,\eta_1,F_1;q_2,\eta_2,F_2] \subset \vec{S}[p_1,\xi_1,E_1;p_2,\xi_2,E_2]$$

<u>COROLLAIRE (Propriété de réitération)</u>.- <u>Soient</u> F_1 <u>et</u> F_2 <u>deux ebc de classe</u> $K_{\theta_1}(E_1,E_2)$ <u>et</u> $K_{\theta_2}(E_1,E_2)$, <u>respectivement. Soit</u> $0<\theta<1$ <u>vérifiant</u> $\theta_1<\theta<\theta_2$. <u>Alors</u>,

$$\vec{S}[q_1,\eta_1,F_1;q_2,\eta_2,F_2] = \vec{S}[p_1,\xi_1,E_1;p_2,\xi_2,E_2]$$

<u>sous les conditions (1)</u>.

<u>En particulier</u>, les espaces de moyennes bornologiques entre des espaces de moyennes bornologiques sont encore des espaces de moyennes bornologiques.

Par applications on a, par exemple, un analogue "abstrait et bornologique" du théoréme de Marcinkiewicz (7).

<u>THEOREME 4</u>.- <u>Soient</u> (E_1,E_2) <u>et</u> (F_1,F_2) <u>deux objets de</u> C_b^c. <u>Soient aussi</u> G_1 <u>et</u> G_2 <u>(resp.</u> H_1 <u>et</u> H_2<u>) d'ebc de classe</u> $\underline{K}_{\theta_1}(E_1,E_2)$ <u>et</u> $\underline{K}_{\theta_2}(E_1,E_2)$ <u>(resp.</u> $\bar{K}_{\chi_1}(F_1,F_2)$, $\bar{K}_{\chi_2}(F_1,F_2)$) <u>avec</u> $\theta_1<\theta_2$ <u>(resp.</u> $\chi_1<\chi_2$). <u>Soit</u> u ∈

$\in \text{Hom}((G_1,G_2),(H_1,H_2))$. Alors, quels que soient p_i, ξ_i, r_i, ζ_i, avec

$$(2) \quad \theta_1 < \frac{\xi_1}{\xi_1-\xi_2} < \theta_2 \qquad\qquad \chi_1 < \frac{\zeta_1}{\zeta_1-\zeta_2} < \chi_2$$

$$(1-\theta_i)\xi_1+\theta_i\,\xi_2 = (1-\chi_i)\zeta_1+\chi_i\zeta_2 \qquad (i=1,2)$$

(3)

$$\frac{1-\theta_i}{p_1} + \frac{\theta_i}{p_2} = \frac{1-\chi_i}{r_1} + \frac{\chi_i}{r_2} \qquad (i=1,2)$$

on a:

$$u\in\text{Hom}(\vec{S}[p_1,\xi_1,E_1;p_2,\xi_2,E_2],\ \vec{S}[r_1,\zeta_1,F_1;r_2,\zeta_2,F_2])$$

Demonstration.- (cf. aussi (6)).

Si $u\in\text{Hom}((G_1,G_2),(H_1,H_2))$, par le théoréme 2, $u\in\text{Hom}(\vec{S}[q_1,\eta_1,G_1;q_2,\eta_2,G_2],\vec{S}[q_1,\eta_1,H_1;q_2,\eta_2,H_2])$. Par le théoréme 3, sous les conditions (2) et (3), nous avons les inclusions bornologiques.

$$\vec{S}[p_1,\xi_1,E_1;p_2,\xi_2,E_2] \subset \vec{S}[q_1,\eta_1,G_1;q_2,\eta_2,G_2]$$

$$\vec{S}[q_1,\eta_1,H_1;q_2,\eta_2,H_2] \subset \vec{S}[r_1,\zeta_1,F_1;r_2,\zeta_2,F_2]$$

donc $u\in\text{Hom}(\vec{S}[p_1,\xi_1,E_1;p_2,\xi_2,E_2],\vec{S}[r_1,\zeta_1,F_1;r_2,\zeta_2,F_2])$

BIBLIOGRAPHIE

(1) A.P. CALDERON.- Intermediate spaces and interpolation, the complex method, (Studia Mathematica, t. 24, 1964, p-113-190).

(2) M. A. FUGAROLAS.- Sur le prolongement bornologique de foncteurs d'interpolation, (C. R. Acad. Sc. Paris, Sér A, t. 275, 1972, p. 1167-1170).

(3) M. A. FUGAROLAS.- Sur les espaces bornologiques de moyennes et de traces (C. R. Acad. - Sc. Paris, Sér A, t. 275, 1972, p. 1309-1312).

(4) H. HOGBE-NLEND.- Théorie des bornologies et applications (Springer, Lecture Notes, 213, 1971).

(5) J. L. LIONS et J. PEETRE.- Propriétés d'espaces d'interpolation (C. R. Acad. Sc. Paris, t. 253, 1961, p. 1747-1749).

(6) J. L. LIONS et J. PEETRE.- Sur une classe d'espaces d'interpolation (Publi. Math. de l'I.H.E.S. Paris, n° 19, 1964, p. 5-68).

(7) J. MARCINKIEWICZ.- Sur l'interpolation d'opérations (C. R. Acad. Sc. Paris, t. 208, 1936, p. 1272-1273).

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
Facultad de Ciencias
MADRID-34 ESPAÑA