KHALIL NOUREDDINE

Nouvelles classes d'espaces localement convexes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 3
, p. 105-123
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_3_105_0>

II$^{\text{ème}}$ - Coll. Anal. Fonct.
(1973, Bordeaux
p. 259-277

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1973 T.10-3

NOUVELLES CLASSES D'ESPACES LOCALEMENT CONVEXES (*)

Khalil NOUREDDINE

INTRODUCTION. - Parmi les classes d'espaces localement convexes (elc), on distingue les espaces ultrabornologiques, bornologiques, tonnelés, infratonnelés et les espaces de Kelley (ou k-espaces). Ces différents espaces sont définis comme suit, pour un elc séparé E :

(a) E *est dit ultrabornologique si tout disque absorbant les disques compacts de* E *est un voisinage de zéro.*

(b) E *est dit tonnelé si tout tonneau absorbant les disques compacts de* E *est un voisinage de zéro* (comme tout tonneau dans E absorbe les disques compacts, cette définition ne diffère en rien de la définition classique).

(c) E *est dit* k-*espace (ou de Kelley) si tout disque de* E *est un voisinage de zéro dès que son intersection avec tout disque compact* K *est un voisinage de zéro dans* K.

(a') E *est dit bornologique si tout disque bornivore est un voisinage de zéro.*

(b') E *est dit infratonnelé si tout tonneau bornivore est un voisinage de zéro.*

Cette façon de classer ces définitions nous suggère l'introduction de nouvelles classes d'elc, par exemple :

(d) *Les elc dans lesquels tout tonneau coupant tout disque compact* K *selon un voisinage de zéro dans* K, *est un voisinage de zéro.*

(c') Les elc dans lesquels tout disque coupant tout disque borné B *selon un voisinage de zéro dans* B, *est un voisinage de zéro.*

(d') Les elc dans lesquels tout tonneau coupant tout disque borné B *selon un voisinage de zéro dans* B, *est un voisinage de zéro.*

Les espaces ultrabornologiques, bornologiques, tonnelés et infratonnelés, qui sont tous des espaces de Mackey, jouent un rôle principal dans la théorie des elc. Les k-espaces ont été introduits et étudiés par H. BUCHWALTER [2]. Le but de ce travail est de faire une première étude des classes définies dans (d), (c') et (d'). Il nous semble que ces espaces n'ont pas encore été étudiés. N'étant pas nécessairement des espaces de Mackey, ils peuvent satisfaire avec d'autres classes d'elc, comme les espaces de Kelley et les espaces (σ), (d) -

(*) *Article préparé par l'auteur pendant un séjour en France, aidé par le CNRS libanais*

tonnelés et infratonnelés [3], [7], au besoin qui commence à se faire sentir, de sortir des classes habituelles d'elc. Ils pourront fournir par la suite un pas vers une nouvelle classification des elc englobant des types d'elc tels que les espaces rencontrés et étudiés dans la théorie de l'intégration. La classe définie dans (c') contient une sous-classe d'espaces possédant certaines des propriétés intéressantes des espaces DF de Grothendieck.

Remarque. - La bornologie qui intervient dans les définitions (a), (b), (c) et (d) est celle engendrée par les disques compacts de E, tandis que dans (a'), (b'), (c') et (d'), c'est la bornologie canonique de E qui joue le même rôle. On peut donc partir d'autres bornologies plus fines que la bornologie canonique de E et introduire avec les mêmes considérations d'autres classes d'espaces localement convexes [4].

NOTATIONS. - Tous les elc considérés seront supposés réels où complexes et séparés. Pour tout elc E, E'_β (resp. E'_c) désignera le dual fort (resp. le dual de E muni de la topologie de la convergence uniforme sur les disques compacts). Un disque dans E est un sous-ensemble convexe équilibré de E, et un tonneau est un disque fermé absorbant.

1. - ESPACES k-TONNELES ET ESPACES b-TONNELES.

1.1. DEFINITIONS ET EXEMPLES.

(1.1.1) DEFINITION. - *Dans un elc* E, *on appelle* k-*tonneau (resp.* b-*tonneau) tout tonneau de* E *coupant tout disque compact (resp. borné)* K *suivant un voisinage de zéro dans* K. *L'elc* E *est dit* k-*tonnelé (resp.* b-*tonnelé) si tout* k-*tonneau (resp.* b-*tonneau) dans* E *est un voisinage de zéro.*

Un espace k-tonnelé est b-tonnelé, et un espace tonnelé (resp. infratonnelé) est k-tonnelé (resp. b-tonnelé).

La proposition suivante est immédiate :

(1.1.2) PROPOSITION. - *Pour un elc* E *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) E *est* k-*tonnelé (resp.* b-*tonnelé) ;*

(b) pour toute partie $H \subset E'$, H *est équicontinue si et seulement si pour tout disque compact (resp. borné)* K *de* E, *l'ensemble* H_K *des restrictions des éléments de* H *à* K *est équicontinu ;*

(c) une semi-norme p *semi-continue inférieurement sur* E *est continue dès que sa restriction à tout disque compact (resp. borné) est continue.*

On peut montrer qu'un elc E est de Kelley si et seulement si E est k-tonnelé et E'_c est complet. Mais un espace k-tonnelé n'est pas nécessairement de Kelley comme le montre l'exemple suivant :

(1.1.3) EXEMPLE. - Soit E un espace de Montel non complet [8]. Il est clair que le dual fort $E'_\beta = E'_c$ est un espace de Montel (donc tonnelé) qui n'est pas de Kelley car $(E'_c)'_c = E$ n'est pas complet.

Un espace k-tonnelé ou b-tonnelé n'est pas nécessairement un espace de Mackey, même si c'est un espace de Kelley.

(1.1.4) PROPOSITION. - *Soit* E *un espace de Banach réflexif de dimension infinie. Alors l'espace* E'_c *est un espace de Kelley non Mackey.*

Preuve. - On sait déjà que E'_c est de Kelley [2]. D'autre part la topologie de E'_c est compatible avec la dualité (E',E), et ne peut pas être identique à la topologie de Mackey $\tau(E',E)$, car sinon la boule unité fermée de E, qui est faiblement compacte, serait compacte et E serait alors de dimension finie, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Un espace b-tonnelé n'est pas nécessairement k-tonnelé, même si c'est un espace normé :

(1.1.5) PROPOSITION. - *Soit* E *un elc de dimension dénombrable. Pour que* E *soit tonnelé il suffit qu'il soit* k-*tonnelé.*

Preuve. - En effet, soient V un tonneau de E et K un disque compact. L'espace E_K engendré par K et muni de la norme jauge est un espace de Banach ; il est donc de dimension finie, et par suite la topologie de la norme n'est autre que la topologie induite par celle de E, ce qui fait que $V \cap E_K$ est un voisinage de zéro dans E_K (car c'est un tonneau dans E_K) donc $V \cap K = (V \cap E_K) \cap K$ est un voisinage de zéro dans K. Il en résulte que tout tonneau de E est un k-tonneau de E, et E est tonnelé dès qu'il est k-tonnelé.

(1.1.6) COROLLAIRE. - *Soit* E *un elc de dimension infinie dénombrable. Si* E *est métrisable, alors* E *n'est pas* k-*tonnelé.*

Preuve. - L'espace E ne peut pas être tonnelé ([1], page 3, ex. 4), donc E n'est pas k-tonnelé.

(1.1.7) THEOREME. - *Soit* E *un espace* k-*tonnelé (resp.* b-*tonnelé). Si* H *est un sous-ensemble précompact de* E'_c *(resp.* E'_β*), alors* H *est équicontinu.*

Preuve. - Supposons par exemple E k-tonnelé et soit H un sous-ensemble précompact de E'_c. D'après la proposition (1.1.2), pour démontrer que H est équicontinu, il suffit de prouver que H_K est équicontinu sur K, pour tout disque compact K. Soit donc un nombre réel $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\frac{\varepsilon}{2} K^\circ$ (où K° désigne le polaire de K dans E') est un voisinage de zéro dans E'_c. Comme H est précompact dans E'_c, il existe une partie finie $P \subset E'$ telle que $H \subset P + \frac{\varepsilon}{2} K^\circ$. Soit V un voisinage de zéro dans E tel que $\|x\|_P \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $x \in V$. Alors pour tout $x \in V \cap K$ on a $|\langle x,x'\rangle| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x' \in H$, ce qui montre l'équicontinuité de H_K au point 0 de K et par suite son équicontinuité sur tout K qui est un disque. L'autre assertion pouvant être démontrée de la même façon, le théorème est donc obtenu.

(1.1.8) <u>COROLLAIRE 1</u>. - *Si* E *est un espace* k-*tonnelé (resp.* b-*tonnelé), alors toute suite de Cauchy dans* E'_c *(resp.* E'_β*) est équicontinue.*

(1.1.9) <u>COROLLAIRE 2</u>. - *Si* E *est un espace* k-*tonnelé (resp.* b-*tonnelé), alors* E'_c *(resp.* E'_β*) est semi-complet.*

On peut d'ailleurs dire mieux en rappelant, avec [4], qu'un elc E est dit p-semi-réflexif lorsque tout précompact de E est relativement compact. Tout espace quasi-complet est p-semi-réflexif et tout espace p-semi-réflexif est semi-complet. On a alors :

(1.1.10) <u>COROLLAIRE 3</u>. - *Si* E *est un espace* k-*tonnelé (resp.* b-*tonnelé), alors* E'_c *(resp.* E'_β*) est* p-*semi-réflexif.*

Preuve. - En effet si H est un disque précompact et fermé de E'_c (resp. E'_β), H est équicontinu, donc son adhérence faible $\overline{H}^\sigma$ est faiblement compacte, donc complète dans E'_c (resp. E'_β). Or $H = \overline{H}^\sigma$ (resp. $H \subset \overline{H}^\sigma$), de sorte que H est complet dans E'_c (resp. E'_β) et par suite y est compact.

(1.1.11) <u>COROLLAIRE 4</u>. - *Soit* E *un espace* k-*tonnelé (resp.* b-*tonnelé). Si* $\mathcal{F}$ *est un filtre sur* E' *qui admet un ensemble précompact dans* E'_c *(resp.* E'_β*), et qui converge simplement vers un élément* $x' \in E^*$ *(dual algébrique de* E*) ; alors* $x' \in E'$*, et le filtre* $\mathcal{F}$ *converge vers* x' *pour la topologie de la convergence précompacte.*

Preuve. - Soit A un élément de $\mathcal{F}$ qui est un sous-ensemble précompact dans E'_c (resp. E'_β). D'après le théorème (1.1.7), A est équicontinu et x' se trouve alors dans l'adhérence de A pour la topologie $\sigma(E^*,E)$, donc dans E'. Le reste de la démonstration est classique.

(1.1.12) REMARQUE. - Il est facile de voir qu'on peut généraliser le théorème (1.1.7) et le corollaire 4, en remplaçant le corps des scalaires par un espace localement convexe quelconque F, et en considérant un sous-ensemble précompact H de $L_c(E,F)$ (resp. $L_b(E,F)$), où $L_c(E,F)$ (resp. $L_b(E,F)$) désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F muni de la topologie de la convergence uniforme sur les disques compacts (resp. bornés) de E.

(1.1.13) COROLLAIRE 5. - *Soit* E *un espace* k-*tonnelé et* H *un sous-ensemble de* E'. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) H *est équicontinu ;*

(b) H *est relativement compact dans* E'_c *;*

(c) H *est précompact dans* E'_c.

Pour les espaces k-tonnelés on a aussi le résultat suivant :

(1.1.14) PROPOSITION. - *Soit* E *un espace* k-*tonnelé. Alors tout tonneau de* E *est bornivore, et pour que* E *soit tonnelé il suffit qu'il soit infratonnelé.*

Preuve. - D'après le corollaire 2, l'espace E'_c est semi-complet ; donc tout disque borné fermé dans E'_c est semi-complet. D'autre part tout tonneau de E'_c absorbe les disques bornés semi-complets (même complétants), donc tout tonneau de E'_c est bornivore ; et comme la topologie de E'_c est compatible avec la dualité (E',E), alors E'_c et E'_σ (E' muni de la topologie faible $\sigma(E',E)$) ont les mêmes tonneaux et les mêmes bornés. Il en résulte que dans E'_σ tout tonneau est bornivore, et par polarité tout tonneau de E l'est aussi.

(1.1.15) REMARQUE. - Cette proposition montre aussi qu'un espace bornologique (et en particulier un espace normé) qui n'est pas tonnelé, n'est pas k-tonnelé ; et par suite elle donne d'autres exemples d'espaces bornologiques non k-tonnelés.

1.2. PROPRIETES DE PERMANENCE.

(1.2.1) THEOREME. - *Soit* E *un elc (séparé) dont la topologie est la topologie finale associée à un système d'applications linéaires* $f_i : E_i \to E$, *où les* E_i *sont des espaces* k-*tonnelés (resp.* b-*tonnelés). Alors* E *est un espace* k-*tonnelé (resp.* b-*tonnelé).*

Preuve. - Il suffit de remarquer que si V est un k-tonneau (resp. b-tonneau) il en est de même de $f_i^{-1}(V)$, pour tout i.

(1.2.2) COROLLAIRE. - *La notion d'espace* k-*tonnelé (resp.* b-*tonnelé) est stable par passage aux sommes directes quelconques, aux limites inductives séparées et aux quotients séparés.*

(1.2.3) PROPOSITION. - *Le complété d'un espace* k-*tonnelé (resp.* b-*tonnelé) est un espace* k-*tonnelé (resp.* b-*tonnelé).*

Preuve. - Soit E un espace k-tonnelé (resp. b-tonnelé). Si $\hat{V}$ est un k-tonneau (resp. b-tonneau) du complété $\hat{E}$ de E, alors $V = \hat{V} \cap E$ est un k-tonneau (resp. b-tonneau) de E. Donc V est un voisinage de zéro dans E ; ce qui fait que son adhérence $\overline{V}$ dans $\hat{E}$ est un voisinage de zéro dans $\hat{E}$, et il en est de même de $\hat{V}$ car $\overline{V} \subset \hat{V}$.

(1.2.4) PROPOSITION. - *Tout produit d'espaces* k-*tonnelés (resp.* b-*tonnelés) est un espace* k-*tonnelé (resp.* b-*tonnelé).*

Preuve. - Soient $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces k-tonnelés, et $E = \prod E_i$ leur produit. Il est clair que les disques compacts K de la forme $K = \prod K_i$ (où K_i est un disque compact dans E_i) forment une base de disques compacts de E ; donc $E'_c = \bigoplus (E_i)'_c$. Soit H une partie de E', telle que pour tout disque compact K de E l'ensemble H_K soit équicontinu sur K. Il est clair que H est borné dans E'_c, et par suite il existe une partie finie J de I telle que $H \subset \bigoplus_{i \in J} pr_i(H)$ (où pr_i est la projection de E' sur E'_i). Puisque pour tout $i \in J$, la restriction de $pr_i(H)$ à tout disque compact de E_i est équicontinue, et puisque E_i est k-tonnelé, alors $pr_i(H)$ est équicontinu, et il en est de même de la somme finie $\bigoplus_{i \in J} pr_i(H)$, donc aussi de H. La même démonstration peut être faite pour l'autre assertion en utilisant l'égalité topologique $E'_\beta = \bigoplus (E_i)'_\beta$.

(1.2.5) PROPOSITION. - *Soient* E *un espace* k-*tonnelé (resp.* b-*tonnelé) et* f *une application linéaire continue et presque ouverte de* E *dans un elc* F. *Alors est un espace* k-*tonnelé (resp.* b-*tonnelé).*

Preuve. - Soit W un k-tonneau (resp. b-tonneau) de F. Le disque $V = f^{-1}(W)$ est un k-tonneau (resp. b-tonneau) de E, donc c'est un voisinage de zéro dans E. Il en résulte, puisque f est presque-ouverte, que l'adhérence $\overline{f(V)}$ est un voisinage de zéro dans F ; or $W \supset \overline{f(V)}$, ce qui termine la démonstration.

1.3. ESPACE k-TONNELE ET ESPACE b-TONNELE ASSOCIES A UN ELC.

Comme dans (9), (10), (11), à tout elc E on peut associer un espace k-tonnelé et un espace b-tonnelé. Soit Υ une base de voisinages de zéro dans E

formée de tonneaux. Désignons par $\mathcal{V}_1$ l'ensemble des k-tonneaux (resp. b-tonneaux) de E. Il est clair que $\mathcal{V}_1$ est une base de voisinages de zéro pour une topologie localement convexe sur E, plus fine que la topologie initiale. Posons $\mathcal{V}_o = \mathcal{V}$, et définissons ensuite $\mathcal{V}_\alpha$, pour tout ordinal α, par :

$$\mathcal{V}_{\alpha+1} = (\mathcal{V}_\alpha)_1$$

$$\mathcal{V}_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{V}_\xi, \text{ si } \alpha \text{ est un ordinal limite.}$$

On note par $\mathcal{T}_\alpha$ la topologie localement convexe sur E définie par $\mathcal{V}_\alpha$. On obtient alors dans le cas de k-tonnelage :

(1.3.1) <u>THEOREME</u> :

(a) Pour tout ordinal α, $\mathcal{T}_\alpha$ et $\mathcal{T}_o$ ont les mêmes disques compacts.

(b) Il existe un plus petit ordinal k *tel que $\mathcal{T}_{k+1} = \mathcal{T}_k$, dit ordre de* k-*tonnelage de* E. *Notons* E_k *l'espace* E *muni de $\mathcal{T}_k$; c'est un espace* k-*tonnelé.*

(c) Le couple $(E_k, 1_E)$ *est solution du problème co-universel des applications linéaires continues d'un espace* k-*tonnelé* F *quelconque dans* E. *On dit que* E_k *est l'espace* k-*tonnelé associé à* E.

(d) En particulier E *est* k-*tonnelé si et seulement si* $E=E_k$.

Et respectivement dans le cas de b-tonnelage :

(1.3.2) <u>THEOREME</u> :

(a) Pour tout ordinal α, $\mathcal{T}_\alpha$ et $\mathcal{T}_o$ ont les mêmes bornés et coïncident sur ces bornés.

(b) Il existe un plus petit ordinal b *tel que $\mathcal{T}_{b+1} = \mathcal{T}_b$, dit ordre de* b-*tonnelage de* E. *Notons* E_b *l'espace* E *muni de la topologie $\mathcal{T}_b$; c'est un espace* b-*tonnelé.*

(c) Le couple $(E_b, 1_E)$ *est solution du problème co-universel des applications linéaires continues d'un espace* b-*tonnelé* F *quelconque dans* E. *On dit que* E_b *est l'espace* b-*tonnelé associé à* E.

(d) En particulier E *est* b-*tonnelé si et seulement si* $E=E_b$.

Preuve. - La même que dans [11], pour les assertions (b) et (c). L'assertion (d) est évidente, et (a) se prouve par récurrence transfinie.

(1.3.3) <u>THEOREME</u>. - *Soient* E *un elc et* E_k *(resp.* E_b*) l'espace* k-*tonnelé (resp.* b-*tonnelé) associé à* E. *Toute partie* A, *complète dans* E, *est complète dans* E_k *et* E_b.

Preuve. - Même démonstration que celle du théorème 2 de [10].

(1.3.4) <u>COROLLAIRE</u>. - *Si* E *est complet (resp. quasi-complet, semi-complet, à bornologie complétante), alors il en est de même de* E_k *et* E_b.

<u>*Preuve*</u> :

1°) E complet implique E_k et E_b complets, car c'est un cas particulier du théorème précédent.

2°) E quasi-complet implique E_k et E_b quasi-complets ; en effet si B est un borné fermé dans E_k (resp. E_b), alors l'adhérence $\overline{B}$ de B dans E est aussi bornée et fermée dans E ; donc elle est complète dans E et par suite dans E_k (resp. E_b), et il en est de même de B qui est alors fermé dans un espace complet.

3°) E semi-complet implique E_k et E_b semi-complets : soit (x_n) une suite de Cauchy dans E_k (resp. E_b) ; c'est aussi une suite de Cauchy dans E, donc elle converge vers un point $x \in E$. Mais alors l'ensemble $\{x, x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ est compact dans E (donc complet dans E) ; et d'après le théorème (1.3.3), il est complet dans E_k (resp. E_b). Par conséquent, la suite (x_n) converge vers x dans E_k (resp. E_b).

4°) Il s'agit de montrer que tout disque borné fermé B dans E_k (resp. E_b) est complétant : en effet, l'adhérence $\overline{B}$ de B dans E est un disque borné complétant ; $\overline{B}$ est aussi bornée dans E_k (resp. E_b) donc B est complétant car dans un elc quelconque, tout disque borné fermé contenu dans un disque borné complétant est complétant.

(1.3.5) <u>PROPOSITION</u>. - *Soient* $(E_i)_{i \in I}$ *une famille d'elc et* $E = \prod E_i$ *leur produit. L'espace* k*-tonnelé (resp.* b*-tonnelé) associé à* E*, est le produit des espaces* k*-tonnelés (resp.* b*-tonnelés) associés aux espaces* E_i.

Preuve. - Il suffit d'utiliser la propriété co-universelle des espaces k-tonnelés (resp. b-tonnelés) associés et le fait que tout produit d'espaces k-tonnelés (resp. b-tonnelés) est k-tonnelé (resp. b-tonnelé).

2. - b-ESPACES ET b'-ESPACES.

2.1. <u>DEFINITION ET CARACTERISATIONS</u>.

(2.1.1) <u>DEFINITION</u>. - *Un elc* E *est dit* b'*-espace (ou espace du type* b'*) si toute forme linéaire continue sur les bornés (ou les disques bornés) de* E*, est continue.*

Il est dit b*-espace (ou espace du type* b*) si tout disque de* E *est un voisinage de zéro dès que son intersection avec tout disque borné* B *est un voisinage de zéro dans* B.

(2.1.2) PROPOSITION. - *Pour un elc* E *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) E *est un* b'*-espace ;*

(b) son espace affaibli E_σ *est un* b'*-espace ;*

(c) le dual fort E'_β *est complet.*

Preuve :

(a) =>(b) : En effet E et E_σ ayant les mêmes bornés, alors toute forme linéaire faiblement continue sur les bornés est continue sur ces bornés pour leurs topologies propres, donc elle est continue sur E et par suite faiblement continue.

(b) =>(c) et (c) =>(a) : D'après le théorème de complétion de Grothendieck.

(2.1.3) REMARQUE. - Les espaces du type b' ont été définis dans [4] sous le nom de b_R-espaces.

(2.1.4) THEOREME. - *Pour un elc* E *les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) E *est un* b*-espace ;*

(b) toute semi-norme sur E*, continue sur les disques bornés, est continue ;*

(c) la topologie de E *coïncide avec la topologie localement convexe la plus fine induisant sur chaque disque borné sa topologie propre ;*

(d) pour tout elc F*, toute application linéaire* $f : E \to F$*, continue sur les bornés (ou les disques bornés) de* E*, est continue ;*

(d') même énoncé que (d) en supposant F *complet ;*

(d") même énoncé que (d) en supposant F *espace de Banach ;*

(e) E *est un* b'*-espace* b*-tonnelé.*

Preuve. - Les équivalences de (a) à (d") se montrent comme au théorème (3.4.1) de [2]. On a évidemment (a) =>(e). Montrons (e) =>(d") : Soient F un espace de Banach, A sa boule unité et $f : E \to F$ une application linéaire, continue sur les bornés de E. Pour tout $y' \in F'$, la forme linéaire $y' \circ f$ est continue sur E, puisque E est un b'-espace. Ainsi f est continue de E_σ dans F_σ, et par suite aussi de E_τ dans $F=F_\tau$. Donc $f^{-1}(A)$ est un tonneau de E_τ, donc de E, qui coupe tout disque borné de E suivant un voisinage de zéro dans ce disque, autrement dit un b-tonneau de E. Comme E est supposé b-tonnelé, $f^{-1}(A)$ est un voisinage de zéro et f est continue.

(2.1.5) PROPOSITION. - *Tout espace bornologique* E *est un* b-*espace*.

Preuve. - Car toute application linéaire $f : E \to F$, continue sur les bornés de E, est manifestement bornée sur ces bornés, donc est continue si E est bornologique.

Mais on tire aisément de la preuve du théorème (2.1.4) un résultat plus général :

(2.1.6) PROPOSITION. - *Tout espace de Mackey, qui est un* b'-*espace, est un* b-*espace*.

Et à son tour cette proposition peut se relier à une propriété générale des b'-espaces, dont elle est conséquence :

(2.1.7) THEOREME. - *Soient* E *un* b'-*espace et* H *une partie de* E'. *Si pour tout disque borné* B *de* E, *l'ensemble* H_B *des restrictions des éléments de* H *à* B *est équicontinu sur* B, *alors* H *est faiblement relativement compact*.

Preuve. - Il est facile de voir que H est faiblement (et même fortement) borné dans E', de sorte que son adhérence faible $\overline{H}$ dans le dual algébrique E^* de E y est faiblement compacte. Il suffit donc de montrer que $\overline{H}$ est en fait contenue dans E'. Or pour tout point $y' \in \overline{H}$ et pour tout disque borné B de E, la restriction y'_B de y' à B est adhérente à l'ensemble H_B pour la topologie de la convergence simple sur B. Comme H_B est équicontinue, il en résulte que y'_B est continue sur B. Et ainsi $y' \in E'$ puisque E est un b'-espace.

(2.1.8) REMARQUES :

1) Un espace de Kelley est toujours un b-espace mais la réciproque est fausse car on sait qu'il existe des espaces normés qui ne sont pas de Kelley.

2) Il existe des b'-espaces non b-espaces : il suffit de prendre le dual faible E'_σ d'un espace de Banach E de dimension infinie, car d'après le théorème de Banach-Dieudonné la topologie sur E' définie par les disques qui coupent les disques bornés de E' suivant des voisinages de zéro faibles est exactement celle de E'_c.

3) Il existe, comme on voit avec l'exemple (1.1.3), des espaces tonnelés non b-espaces.

2.2. PROPRIETES DE PERMANENCE.

(2.2.1) THEOREME. - *Soit* E *un elc (séparé) dont la topologie est la topologie finale associée à une famille d'applications linéaires* $f_i : E_i \to E$, *où* *les* E_i *sont des* b-*espaces (resp.* b'-*espaces). Alors* E *est un* b-*espace (resp.* b'-*espace).*

Preuve. - Le théorème résulte du théorème (2.1.4) pour les b-espaces et de la définition pour les b'-espaces.

(2.2.2) COROLLAIRE. - *La notion de* b-*espace (resp.* b'-*espace) est stable par passage aux sommes directes quelconques, aux limites inductives séparées et aux quotients séparés.*

(2.2.3) PROPOSITION :

(a) Pour que le complété $\hat{E}$ *d'un* b'-*espace* E *soit* b'-*espace, il faut et il suffit que toute forme linéaire continue sur les disques bornés de* $\hat{E}$ *et nulle sur* E*, soit identiquement nulle.*

(b) Pour que le complété d'un b-*espace soit un* b-*espace il faut et il suffit qu'il soit un* b'-*espace.*

Preuve :

(a) : La condition est évidemment nécessaire ; inversement si f est une forme linéaire sur $\hat{E}$, continue sur les disques bornés de $\hat{E}$, alors sa restriction $f|_E = g$ sur E est continue sur les disques bornés de E ; donc g est continue sur E et son prolongement (unique) $\hat{g}$ est continu sur $\hat{E}$, par suite la forme linéaire $f-\hat{g}$ est continue sur les disques bornés de $\hat{E}$, et elle est nulle sur E ; donc $f-\hat{g} = 0$ et $f=\hat{g}$ est continue sur $\hat{E}$.

(b) : Cette assertion résulte du fait que le complété d'un espace b-tonnelé est toujours b-tonnelé.

(2.2.4) PROPOSITION. - *Tout produit de* b'-*espaces (resp.* b-*espaces) est un* b'-*espace (resp.* b-*espace).*

Preuve. - Soient $(E_i)_{i\in I}$ une famille de b'-espaces (resp. b-espaces) et $E = \prod E_i$ leur produit. On sait que $E'_\beta = \bigoplus (E_i)'_\beta$ et comme dans les deux cas les $(E_i)'_\beta$ sont complets, alors E'_β est complet et E est un b'-espace d'après (2.1.2). Si en plus, les E_i sont b-tonnelés, E est b-tonnelé d'après (1.2.4), et alors E est un b-espace d'après (2.1.4).

2.3. b-ESPACE ET b'-ESPACE ASSOCIES A UN ELC. - Soit E un elc ; on désigne par bE l'espace E muni de la topologie localement convexe la plus fine induisant sur tout disque borné (ou même sur tout borné) de E sa topologie propre. Un système fondamental de voisinages de zéro dans bE est formé par les disques V coupant tout disque borné B de E selon un voisinage de zéro dans B, et la topologie de bE est une topologie limite inductive généralisée au sens de GARLING [5].

(2.3.1) PROPOSITION. - *Pour tout elc* E *le couple* $(bE, 1_E)$ *est solution du problème co-universel des applications linéaires continues d'un* b-*espace quelconque* F *dans* E.

Preuve. - Soit f une application linéaire continue d'un b-espace F dans E. Il s'agit de montrer que f est continue pour la topologie de bE : en effet, si V est un disque de E qui coupe tout disque borné B de E selon un voisinage de zéro dans B, alors $f^{-1}(V)$ est un disque qui possède la même propriété dans F ; donc $f^{-1}(V)$ est un voisinage de zéro dans F, et la proposition est démontrée.

Il est clair que pour tout elc E on a b(bE) = bE, et bE est un b-espace appelé le b-espace associé à E.

D'autre part, pour tout elc E, désignons par b'E l'espace E muni de la topologie localement convexe la moins fine parmi les topologies localement convexes sur E plus fines que celle de E et rendant continues les formes linéaires continues sur les disques bornés de E. Cette topologie existe, et on peut en donner une construction explicite : en effet désignons par $\mathcal{T}$ la topologie de E et par E^+ l'espace des formes linéaires continues sur les disques bornés de E. Soit $\sigma(E,E^+)$ la topologie faible sur E pour la dualité (E,E^+) ; alors il est clair que :

(2.3.2) PROPOSITION. - *La topologie de* b'E *est la topologie localement convexe borne supérieure des deux topologies* $\mathcal{T}$ *et* $\sigma(E,E^+)$. *Elle coïncide avec* $\mathcal{T}$ *et celle de* bE *sur les disques bornés de* E. *La topologie de* bE *est plus fine que celle de* b'E. *Il est alors évident que* E, b'E *et* bE *ont les mêmes bornés avec les mêmes topologies sur ces bornés.*

(2.3.3) PROPOSITION. - *Pour tout elc* E *le couple* $(b'E, 1_E)$ *est solution du problème co-universel des applications linéaires continues d'un* b'-*espace* F *quelconque dans* E.

Preuve. - Soit g une application linéaire continue d'un b'-espace F dans E. Etant donné que la topologie de b'E est la borne supérieure de $\mathcal{T}$ et de $\sigma(E,E^+)$ alors, pour montrer que l'application $g : F \to b'E$ est continue, il suffit de montrer que g est $\sigma(E,E^+)$-continue : or pour toute $f \in E^+$, l'application $f \circ g$ est une forme linéaire continue sur les disques bornés de F, donc elle est continue ; et par suite g est $\sigma(E,E^+)$-continue.

L'espace b'E est un b'-espace dit b'-espace associé à E, et on a évidemment b'(b'E) = b'E.

Etant donné que les deux espaces bE et b'E ont le même dual E^+, alors on peut construire la topologie de bE au moyen de la dualité (E,E^+).

(2.3.4) PROPOSITION. - *La topologie de* bE *est la topologie de la convergence uniforme sur les parties* $H \subset E^+$ *telles que, pour tout disque borné* B *de* E, *l'ensemble* H_B *des restrictions des éléments de* H *à* B *soit équicontinu sur* B.

Preuve. - Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble de ces parties $H \subset E^+$. Comme le dual de bE est E^+, que E et bE ont les mêmes bornés avec les mêmes topologies induites, et enfin que bE est b-tonnelé, on voit, avec (1.1.2), que $\mathcal{H}$ est exactement la famille des parties équicontinues du dual (bE)', ce qui suffit.

(2.3.5) COROLLAIRE 1. - *L'espace* bE *est l'espace* b-*tonnelé associé à l'espace* b'E.

(2.3.6) COROLLAIRE 2. - *La topologie de* bE *est moins fine que la topologie de Mackey* $\tau(E,E^+)$.

(2.3.7) PROPOSITION. - *Soient* $(E_i)_{i\in I}$ *une famille d'elc et* $E = \prod E_i$ *leur produit. Le* b-*espace (resp.* b'-*espace) associé à* E *est le produit des* b-*espaces (resp.* b'-*espaces) associés aux espaces* E_i.

Preuve. - Comme pour la proposition (1.3.5), il suffit d'utiliser la propriété co-universelle des b-espaces (resp. b'-espaces) associés et le fait que tout produit de b-espace (resp. b'-espace) est un b-espace (resp. b'-espace).

3. - ESPACES DU TYPE D_b.

3.1. DEFINITION ET EXEMPLES.

(3.1.1) DEFINITION. - *Un elc* E *est dit du type* D_b *(ou* D_b*-espace) si* E *est* b-*tonnelé et admet une base dénombrable de bornés.*

(3.1.2) THEOREME. - *Soit* E *un elc du type* D_b. *Alors son dual fort* E'_β *est un espace de Fréchet et en particulier* E *est un* b-*espace. Si* (B_n) *est une suite fondamentale de bornés de* E, *formée de disques fermés, on a :*
(a) Un disque V *dans* E *est un voisinage de zéro si et seulement si, pour tout entier* n, *l'ensemble* $V \cap B_n$ *est un voisinage de zéro dans* B_n.

(b) Une application linéaire f *de* E *dans un elc* F *est continue dès que ses restrictions aux disques* B_n *sont continues.*

Preuve. - Puisque E est b-tonnelé, alors pour qu'il soit un b-espace il suffit que E'_β soit complet. Or E'_β est semi-complet d'après (1.1.9), et comme il est métrisable (car E admet une base dénombrable de bornés), il est complet et la première assertion du théorème est démontrée. Les assertions (a) et (b) sont évidentes compte tenu du théorème (2.1.4).

(3.1.3) <u>EXEMPLES</u>. - Tout elc E du type DF [6] est donc un espace du type D_b. Par contre un espace du type D_b n'est pas nécessairement du type DF : en effet ROME démontre [12] que l'espace $M^\infty(T)$ est toujours un espace D_b, et qu'il n'est du type DF que dans le cas très particulier où l'espace complètement régulier T est un P-espace (i.e. tout noyau de T est ouvert). L'exemple de $M^\infty(T)$ montre donc qu'il existe des espaces b-tonnelés qui ne sont pas d-infratonnelés (ou countably infrabarrelled selon [7]). L'article de ROME montre aussi que $M^\infty(T)$ est semi-Montel (ou du type μ) si et seulement si l'espace T est pseudocompact. Donc, si l'espace T est pseudocompact et infini, il n'est pas un P-espace et $M^\infty(T)$ est alors un espace de Kelley complet qui admet une base dénombrable de bornés sans qu'il soit d-infratonnelé. Ce qui montre que la classe des elc de Kelley (et a fortiori celles des espaces k-tonnelés, b-tonnelés et celle des b-espaces) est une classe distincte de celles des espaces ultrabornologiques, bornologiques, tonnelés, infratonnelés, d-tonnelés ou d-infratonnelés.

(3.1.4) <u>THEOREME</u>. - *Pour qu'un elc* E *soit un* b-*espace, il faut et il suffit qu'il soit limite inductive d'espaces du type* D_b.

Preuve. - La condition est trivialement suffisante, démontrons qu'elle est nécessaire ; en effet soient E un b-espace et $\mathfrak{B}$ la famille des disques bornés fermés de E. Pour tout $B \in \mathfrak{B}$, désignons par E_B le sous-espace vectoriel de E engendré par le disque B. Au lieu de munir E_B de la norme jauge, on le munit de la topologie localement convexe la plus fine coïncidant sur B avec sa topologie propre ; cette topologie admet une base de voisinages de zéro formée des disques de E_B coupant chaque disque nB suivant un voisinage de zéro dans nB, pour tout entier $n \geq 1$. D'après [5], E_B est ainsi un espace du type D_b et E est la limite inductive des espaces E_B ainsi topologisés.

(3.1.5) COROLLAIRE. - *Si* E *est un* b-*espace quasi-complet, alors* E *est limite inductive d'espaces du type* D_b *complets.*

Preuve. - Les disques bornés complets B forment une base de bornés de E et les E_B correspondants sont alors complets [5].

(3.1.6) REMARQUE. - On peut montrer d'une façon analogue que tout elc de Kelley est limite inductive d'espaces du type D_b et semi-Montel, donc limite inductive d'espaces de Kelley (topologiquement et vectoriellement) complets admettant une base dénombrable de compacts qui est en même temps une base dénombrable de bornés.

(3.1.7) THEOREME. - *Soit* E *un espace du type* D_b. *Pour toute suite* (V_n) *de voisinages de zéro dans* E*, il existe une suite de scalaires* (α_n) *telle que l'ensemble* $V = \bigcap \alpha_n V_n$ *soit un voisinage de zéro.*

Preuve. - Il est immédiat que si le théorème est vrai pour une suite (V_n) de voisinages disqués fermés, alors il est vrai dans le cas général. Supposons donc les V_n disqués fermés, et pour tout $n \geq 1$ posons $H_n = V_n^\circ$, polaire de V_n dans le dual E' de E. Les H_n sont équicontinus, et par suite bornés dans l'espace de Fréchet E'_β. Il existe donc une suite (bornée) de scalaires $\lambda_n > 0$, telle que l'ensemble $\bigcup \lambda_n H_n$ soit borné dans E'_β. Posons $H = \bigcup \frac{\lambda_n}{n} H_n$; si on démontre que H est équicontinu, alors le polaire $H^\circ = \bigcap \frac{n}{\lambda_n} V_n$ sera un voisinage de zéro dans E, et il suffira de prendre $\alpha_n = \frac{n}{\lambda_n}$ pour tout entier $n \geq 1$. Tout est donc conséquence de la proposition :

(3.1.8) PROPOSITION. - *Soit* E *un espace* b-*tonnelé. Pour toute suite* (H_n) *de parties équicontinues de* E' *telles que la réunion* $\bigcup H_n$ *soit fortement bornée, et pour toute suite* $\varepsilon_n \to 0$*, la réunion* $\bigcup \varepsilon_n H_n$ *est équicontinue.*

Preuve. - On voit aisément que la partie $H = \bigcup \varepsilon_n H_n$ est équicontinue sur chaque disque borné B de E.

Si E est un elc admettant une base dénombrable de bornés, et si E_b désigne l'espace b-tonnelé associé à E, alors E_b est un espace du type D_b et le couple $(E_b, 1_E)$ est solution du problème co-universel des applications linéaires continues d'un espace F du type D_b quelconque dans E. L'espace E est alors appelé espace du type D_b associé à E, et E est du type D_b si et seulement si $E = E_b$. La topologie de E_b est moins fine que la topologie d-infratonnelée associée à E (de la même façon que dans le théorème (1.3.2)), car pour cette dernière topologie l'espace E est un espace du type DF (dit aussi espace DF associé à E), donc un espace du type D_b. Et l'assertion résulte du caractère co-universel du couple $(E_b, 1_E)$.

3.2. PROPRIETES DE PERMANENCE.

(3.2.1) THEOREME. - *Soient* E *un elc,* F *un sous-espace vectoriel de* E, *et* F° *le sous-espace vectoriel de* E', *orthogonal à* F.

(a) Si E *est un espace du type* D_b *et si* F *est fermé, alors* E/F *est un espace du type* D_b *et la topologie forte sur* F° *est la topologie induite par celle de* E'_β.

(b) Si F *est un espace du type* D_b, *alors le dual fort de* F *est isomorphe topologiquement à* $E'_\beta/F°$.

Preuve :

(a) : Prouvons d'abord la seconde assertion de (a). Il est clair que la topologie $\mathcal{T}_i$ induite sur F° par la topologie forte $\beta(E',E)$ est moins fine que la topologie forte $\beta(F°,E/F)$ sur F°. Donc il reste à démontrer que l'application identique, de F° muni de la topologie $\mathcal{T}_i$ dans F° muni de la topologie $\beta(F°,E/F)$, est continue ; mais la topologie $\mathcal{T}_i$ étant métrisable (donc bornologique), il suffit alors de montrer que toute suite x'_n convergente vers zéro pour $\mathcal{T}_i$ est bornée pour $\beta(F°,E/F)$. Or l'espace E est b-tonnelé, donc d'après le théorème (1.1.7), la suite (x'_n) est équicontinue dans E', donc aussi dans F', ce qui permet facilement de voir qu'elle est bornée pour $\beta(F°,E/F)$.

La première assertion de (a) étant démontrée, on en tire que tout borné de E/F est contenu dans l'adhérence de l'image canonique d'un borné de E. Ainsi E/F admet une base dénombrable de bornés, et comme tout quotient (séparé) d'un espace b-tonnelé est b-tonnelé, alors E/F est un espace du type D_b.

(b) : Il s'agit de montrer que l'isomorphisme algébrique de F'_β sur $E'_\beta/F°$ est un isomorphisme topologique. Mais puisque la topologie de F'_β est moins fine que la topologie quotient $E'_\beta/F°$, il suffit de montrer que cet isomorphisme est continu. Or l'espace F'_β est métrisable, donc bornologique, et il suffit de montrer que toute suite (x'_n) convergente vers zéro dans F'_β est l'image canonique d'une suite (y'_n) bornée dans E'_β. Comme dans la preuve de (a), la suite (x'_n) est équicontinue ; elle se relève donc en une suite (y'_n) équicontinue dans E', donc bornée dans E'_β. Ce qui achève la démonstration du théorème.

(3.2.2) COROLLAIRE 1. - *Soient* E *un elc,* F *un sous-espace vectoriel de* E *du type* D_b, *et* A *une partie bornée de l'adhérence* $\bar{F}$ *de* F *dans* E. *Alors il existe une partie bornée de* F *dont l'adhérence contient* A. *En particulier le complété d'un espace du type* D_b *est un espace du type* D_b.

Preuve. - On peut évidemment supposer que E est le complété de F, et alors l'assertion équivaut au fait que sur le dual commun de E et F, les deux topologies fortes coïncident.

(3.2.3) COROLLAIRE 2. - *Un espace* E *du type* D_b *est complet si et seulement si* E *est quasi-complet.*

Preuve. - Ce corollaire est un cas particulier du corollaire 1. Il montre que, si E est un espace du type D_b semi-réflexif, alors il est complet.

(3.2.4) COROLLAIRE 3. - *Soit* E *un espace du type* D_b. *Pour que* E *soit infratonnelé, il faut et il suffit que son complété* $\hat{E}$ *soit tonnelé.*

Preuve. - La condition est évidemment nécessaire ; et elle est suffisante car E et $\hat{E}$ ont le même dual fort E'_β.

(3.2.5) THEOREME. - *Soient* E *un espace vectoriel,* (E_n) *une suite d'espaces du type* D_b, *et* (f_n) *une suite d'applications linéaires des* E_n *dans* E, *telles que l'espace vectoriel engendré par les images* $f_n(E_n)$ *soit* E. *Alors :*
(a) L'espace E, *muni de la topologie (supposée séparée) localement convexe la plus fine rendant continues les applications* f_n, *est un espace du type* D_b.
(b) Tout borné de E *est contenu dans l'enveloppe disquée fermée d'un nombre fini d'ensembles* $f_n(B_n)$, *où* B_n *est borné dans* E_n.
(c) La topologie forte $\beta(E',E)$ *est aussi la topologie de la convergence uniforme sur les parties de* E *de la forme* $f_n(B_n)$, *où* B_n *est borné dans* E_n.

Preuve :

(a) Démontrons d'abord que la somme directe $F = \bigoplus E_n$ est un espace du type D_b : on sait déjà qu'une somme directe d'espaces b-tonnelés est un espace b-tonnelé. En outre, le fait que F admet une base dénombrable de bornés résulte de ce que tout borné B de F est contenu dans un borné de la forme $\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} B_i$, où B_i est un borné dans E_i.

D'autre part, on sait que E muni de la topologie finale (supposée séparée) est isomorphe algébriquement et topologiquement à un quotient de F par un sous-espace vectoriel fermé M de F. Alors l'assertion (a) résulte du théorème (3.2.1).

(b) D'après la démonstration du théorème (3.2.1), tout borné de F/M est contenu dans l'adhérence de l'image canonique d'un borné de F ; et par suite il est contenu dans l'enveloppe disquée fermée d'un ensemble de la forme $\sum_{1\leqslant i\leqslant n} f_i(B_i)$, où B_i est un borné dans E_i. Ce qui démontre l'assertion (c) du théorème, qui, à son tour, achève la démonstration de (b).

(3.2.6) COROLLAIRE 1. - *Si les* E_n *sont des espaces du type* D_b *semi-réflexifs, alors* E *est un espace du type* D_b *semi-réflexif.*

(3.2.7) COROLLAIRE 2. - *Toute limite inductive (séparée) d'une suite d'espaces du type* D_b *est un espace du type* D_b.

Notons enfin le fait évident que tout produit fini d'espaces du type D_b est un espace D_b.

-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

(1) N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, chap. III-V, Hermann, Paris, 1955.

(2) H. BUCHWALTER, *Topologies et compactologies*, Publ. Dép. Math. Lyon, 6-2, 1969, p. 1-74.

(3) H. BUCHWALTER, *Espaces ultrabornologiques et* b-*réflexivité*, Publ. Dép. Math. Lyon, 8-1, 1971, p. 91-106.

(4) J. DAZORD - M. JOURLIN, *Sur quelques classes d'espaces localement convexes*, Publ. Dép. Math. Lyon, 8-2, 1971, p. 39-69.

(5) D.J.H. GARLING, *A generalized form of inductive limit topology for vector spaces*, Proc. London Math. Soc., 3, 14, 1964, p. 1-28.

(6) A. GROTHENDIECK, *Sur les espaces* (F) *et* (DF), Summa Bras. Math., 3-6, 1954, p. 57-122.

(7) T. HUSAIN, *Two new classes of locally convex spaces*, Math. Ann., 166, 1966, p. 289-299.

(8) Y. KŌMURA, *On linear topological spaces*, Kumamoto J. Sc., série A, 3, 1962, p. 148-157.

BIBLIOGRAPHIE

(suite et fin)

(9) Y. KŌMURA, *Some examples on linear topological spaces*, Math. Ann., 153, 1964, p. 150-162.

(10) K. NOUREDDINE, *L'espace infratonnelé associé à un espace localement convexe*, Comptes rendus, 274, série A, 1972, p. 1821.

(11) A. ROBERT, *Quelques questions d'espaces vectoriels topologiques*, Comment. Math. Helvet., 42-4, 1967, p. 314-342.

(12) M. ROME, *L'espace* $M^{\infty}(T)$, Publ. Dép. Math. Lyon, 9-1, 1972, p. 37-60.

Signalons pour terminer que l'article a été résumé dans les deux Notes suivantes :

(13) K. NOUREDDINE, *Nouvelles classes d'espaces localement convexes*, Comptes rendus, 276, série A, 1973, p. 1209.

(14) K. NOUREDDINE, *Espaces du type* D_b, Comptes rendus, 276, série A, 1973, p. 1301.

K. NOUREDDINE

Faculté des Sciences
Université Libanaise
Hadath-Beyrouth
(Liban)