HICHAM FAKHOURY

Projections de meilleure approximation continues dans certains espaces de Banach

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 2
« Compte rendu des journées infinitistes », , p. 73-78
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_2_73_0>

$II^{\text{ème}}$ Coll. Anal. Fonct.
(1973, Bordeaux)
p. 73-78

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1973 t. 10-2

Projections de meilleure approximation continues dans certains espaces de Banach.

par Hicham FAKHOURY.

Soit V un espace de Banach réel ou complexe, on note $B(V)$ sa boule unité fermée. Si M est un sous-espace fermé de V, on note M^0 le polaire de M dans V', et R la surjection canonique de V sur V/M. L'espace V est un <u>L-espace</u> s'il est isométrique à l'espace $L^1(\mu)$, relatif à une mesure μ ; on dira que V est un <u>espace de Lindenstrauss</u> si l'espace V' est un L-espace. Soit X un convexe compact (resp. symétrique), on note $A(X)$ (resp. $A_0(X)$) l'espace des fonctions affines continues sur X (resp. nulles en 0). Un convexe compact X est dit <u>standard</u> si l'ensemble $\mathcal{E}(X)$ des points extrémaux de X est universellement mesurable et porte toute mesure maximale. Si E est un espace topologique, $C(E)$ désigne l'espace des fonctions définies et continues sur E et à valeurs complexes. Rappelons qu'une application θ de E dans l'ensemble des parties non vides d'un espace topologique F est dite semi-continue-inférieurement (s.c.i.) si pour tout ouvert U de F, l'ensemble $\{x \in E \; ; \; \theta(x) \cap U \neq \emptyset\}$ est un ouvert de E.

Le but du présent travail est de montrer l'existence d'une projection continue homogène de V sur M (non nécessairement linéaire) qui réalise la meilleure approximation dans les deux situations suivantes :

1°) S'il existe une projection linéaire P du dual V' de V sur l'annulateur M^0 de M qui vérifie

$$\|x\| = \|P(x)\| + \|x - P(x)\| \quad \text{pour tout point } x \text{ de } V',$$

il existe une projection continue homogène de V sur M (non nécessairement linéaire) qui réalise la meilleure approximation ; ceci est le cas , entre autre , si V est une algèbre uniforme de fonctions et M un idéal formé de fonctions nulles sur une intersection d'ensembles pics, ou bien , si V est une C^*-algèbre et M un idéal bilatère .

2°) Si M est un espace de Lindenstrauss , nous donnons une condition simple pour qu'il existe une projection continue homogène de V sur M (non nécessairement linéaire) qui réalise la meilleure approximation . Dans le cas où V est un espace de Banach ordonné 1-normal , et M un sous-espace simplicial , la projection précédente peut être choisie positive .

Les résultats annoncés ici font l'objet d'un article qui paraitra dans le Journal de Mathématiques Pures et Appliquées .

I. Projections sur un M-idéal.

<u>Définition 1</u>.- Soit M un sous-espace d'un espace de Banach réel ou complexe V . Le sous-espace M est dit <u>M-idéal</u> s'il existe une projection linéaire P de V' sur M^o qui vérifie $\|x\| = \|P(x)\| + \|x - P(x)\|$, pour tout x dans V' .

En utilisant le théorème 5.4 de (1) et le théorème de Michael il est possible de démontrer le résultat suivant , améliorant le théorème 5.4 de (1) et le théorème 1 de (2) .

<u>Théorème 2</u>.- Soient M un M-idéal d'un espace de Banach réel (resp. complexe) V, et R la surjection canonique de V sur

V/M . Il existe un relèvement continu T de l'application R qui vérifie $\|T(f)\| = \|f\|$ et $T(\lambda f) = \lambda T(f)$, pour tout f dans V/M et λ réel (resp. complexe) .

Pour établir le théorème 2 on utilise les résultats de (5) . Ceci permet de montrer le résultat suivant :

Corollaire 3.- Soit M un M-idéal d'un espace de Banach V ; il existe une projection continue homogène de V sur M qui réalise la meilleure approximation .

La projection définie plus haut n'est pas linéaire en général ; en effet , $c_0(\mathbb{N})$ est un M-idéal dans $l^\infty(\mathbb{N})$, mais non un facteur direct . On ignore si cette projection peut être choisie lipschitzienne .

Exemples de M-idéaux :

(a) Soit V une $\mathbb{C}^*$-algèbre , les M-idéaux de V coincident avec les idéaux bilatères de V .

(b) Soit V une algèbre uniforme de fonctions continues sur un compact Y , les M-idéaux de V coincident avec les idéaux des fonctions qui sont nulles sur les fermés "pics généralisés" (i.e. les intersections d'ensemble pics) (7) .

(c) Soit V l'algèbre du disque , les M-idéaux coincident avec les sous-espaces formés de fonctions nulles sur les ensembles fermés du cercle unité dont la mesure est nulle .

II. Projections sur un espace de Lindenstrauss .

Pour commencer , notons que toute partie bornée du plan complexe est incluse dans un cercle unique de rayon minimum , appelé cercle circonscrit .

Soient X et Y deux compacts et ϕ une surjection de X sur Y ; on note M le sous-espace de $C(X)$ formé des fonctions $g\circ\phi$ où g parcourt $C(Y)$. Le lemme suivant est montré dans (6,P. 50) .

Lemme 4.- Pour toute fonction f de $C(X)$, la distance de f à M est donnée par la formule suivante :

$$d(f,M) = \mathrm{Sup}\left\{ r(y) \ ; \ y \in M \right\} ,$$

où $r(y)$ désigne le rayon du cercle circonscrit à $f(\phi^{-1}(y))$.

Ce lemme permet d'établir le résultat suivant :

Théorème 5.- Soient V un espace de Banach et M un sous-espace fermé qui est un espace de Lindenstrauss ; si la surjection canonique ϕ de $B(V')$ sur $B(M')$ vérifie :

(I) $\phi^{-1}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda\phi^{-1}(x_1) + (1-\lambda)\ \phi^{-1}(x_2)$,

pour tout λ dans $[0,1]$ et x_i dans $B(M')$.

Alors , il existe une projection de meilleure approximation continue homogène de V sur M .

La démonstration de ce théorème repose sur une adaptation naturelle du théorème d'existence de sélections linéaires associées aux fonctions multivoques s.c.i. définies sur la boule unité d'un L-espace dual démontré dans (4).

Lemme 7.- Soient K et X deux convexes compacts et ϕ une surjection affine continue de K sur X . Considérons les assertions suivantes :

(a) L'application ϕ est directe (i.e. $\phi(E(K)) = E(X)$).

(b) (resp.(b')). Pour tout point k de K et toute mesure μ (resp. mesure maximale μ) de $M^1(X)$ de barycentre $\phi(k)$, il existe une mesure ν de $M^1(K)$ de barycentre k et telle $\tilde{\phi}(\nu) = \mu$, où $\tilde{\phi}$ désigne l'extension de ϕ à $M^1(K)$.

(c) L'application ϕ vérifie la condition (I) .

Alors les assertions (b) , (b') et (c) sont équivalentes et impliquent (a) . Si X est un simplexe les quatre assertions sont équivalentes .

Théorème 8 .- Soient V un espace de Banach et M un sous-espace fermé qui est un espace de Lindenstrauss . Supposons $B(V')$ standard (en particulier si V est séparable) et que l'application ϕ est directe . Il existe une projection continue homogène de V sur M qui réalise la meilleure approximation .

Un espace de Banach réel ordonné par un cône convexe fermé V^+ est dit 1-normal si les inégalités $y \leq x \leq z$ impliquent $\|y\| \leq \|y\| \vee \| z\|$.

Théorème 9.- Soient V un espace de Banach ordonné 1-normal et M un sous-espace fermé vérifiant la propriété de décomposition de Riesz . On suppose que la boule unité ouverte de M est filtrante croissante , et que pour tous k dans $B(V') \cap V'^+$, $\varepsilon > 0$ et f dans M avec $f(k) = 0$, il existe un élément g

dans M^+ qui vérifie $g \geqslant f$ et $g(k) < \varepsilon$. Il existe une projection continue homogène P de V sur M qui réalise la meilleure approximation et vérifie $P(V^+) = M^+$.

Les résultats précédents généralisent le résultat de Holmes et Kripke . Cependant , on ignore toujours si les projections définies plus haut sont lipschitziennes . Signalons enfin qu'il est probable que le théorème 8 reste vrai pour un espace de Banach quelconque V ; cependant , nous ne pouvons l'établir que si $B(V')$ est standard .

Bibliographie

(1) E. Alfsen et E. Effros : Ann. of Math. 96 , 1972 ,93-136 .

(2) T. Ando :Closed range theorem for convex sets and linear liftings (à paraitre)

(3) D. A. Edwards et G. Vincent-Smith : Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 18 , 1968 , 261-282 .

(4)A. Lazar et J. Lindenstrauss: Acta Math. ,126,1971,165-193 .

(5) E. Michael : Ann. of Math. 63 , 1956 , 361-382 .

(6)A. Pelczynski : Rozprawy Mat. Warszawa , 58 , 1969 .

(7) B. Hirsberg : M-ideals in complex function spaces and algebras (à paraitre) .

Equipe de Recherche associée au C.N.R.S. n° 294 ,

Université de Paris VI ,

Département de Mathématiques , (Tour 46)

11, quai Saint-Bernard ,

75005 - Paris .