PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

JACQUES RAVEL

Anneaux à Spir compact

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 1
, p. 77-84
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_1_77_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1973 t.10-1

ANNEAUX A SPIR COMPACT

par Jacques RAVEL

INTRODUCTION.

Le but de cet exposé est d'étudier les ASC, c'est-à-dire les anneaux commutatifs dont le spectre irréductible est compact. Ce sont les anneaux noethériens tels que, pour tout idéal J, il existe un nombre fini d'idéaux irréductibles contenant J tels que tout idéal irréductible contenant J contienne l'un d'eux (figure 1).

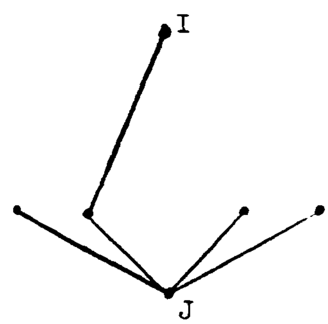

figure 1

Les anneaux finis sont des ASC de hauteur 0. Les anneaux principaux et les domaines de Dedekind sont des ASC de hauteur 1.

On peut certes montrer qu'un ASC est de hauteur au plus égale à 2 ; mais y a-t-il des ASC de hauteur 2 ?

La réponse tient dans le :

THEOREME . - *Si* $\mathscr{A} = K[X,Y]$ *est l'anneau des polynômes à deux indéterminées sur un corps* fini K, *le localisé de* $\mathscr{A}$ *en son idéal maximal* $\mathscr{M} = \mathscr{A}X + \mathscr{A}Y$ *est un* ASC.

§ 1 - SPECTRE IRREDUCTIBLE D'UN MODULE.

L'étude de la réduction des intersections que nous avons faite dans un précédent article [1] nous a conduit à introduire une topologie sur l'ensemble des sous-modules irréductibles propres d'un module.

Si les $(N_i)_{i\in I}$ sont les sous-modules irréductibles propres du module M, on identifie le sous-module N_i de M à l'élément i de I, et on définit cette topologie par la fermeture $J \to \tilde{J} = \{i\in I \mid (\exists K \subseteq J)(N_i = \bigcap_{k\in K} N_k)\}$, si bien que les fermés sont les familles d'irréductibles stables par intersection. Nous dirons que l'espace topologique ainsi défini est *l'espace spiral* associé au module M, ou le *spectre irréductible* de M, et nous le désignerons par Spir(M).

Un espace topologique sera dit *spiral* s'il est homéomorphe ou spectre irréductible d'un module M.

THEOREME 1. - *Dans un espace spiral :*

- *les ofs forment une base,*
- *les points isolés forment un sous-espace partout dense,*
- *on a la séparation au sens de Hausdorff* (T_2).

Si $N \subsetneq M$, nous poserons $N^+ = \{N_i \in \mathrm{Spir}(M) \mid N_i \supseteq N\}$ et $N^- = \complement N^+$. N^+ et N^- sont des fermés complémentaires, donc des ofs, de Spir(M) , et on peut montrer que Spir(M) a une base d'ofs *convexes* $U_i = N_i^+ \cap N_i'^-$, où N_i est un sous-module irréductible de M et N_i' un sous-module de M contenant N_i ; la séparation s'en déduit.

Les points isolés de Spir(M) sont les sous-modules *complètement irréductibles* de M, c'est-à-dire les sous-modules N de M possédant les propriétés équivalentes suivantes :

1) $N \neq M$ et n'est pas intersection de sous-modules de M le contenant strictement.

2) N a un plus petit majorant strict $\bar{N}$ dans M.

3) $(\exists x \in M)$ (N est maximal tel que $x \notin N$).

On a alors $\bar{N} = N + Ax$, et, inversement, on peut prendre pour x n'importe quel élément de $\bar{N}$ n'appartenant pas à N.

PROPOSITION. - *Si* f *est un homomorphisme de* M *dans* M', *alors* $\tilde{f} : N' \mapsto f^{-1}(N')$ *est une application continue de* $f(M)^{-}$ *sur* $\mathrm{Ker} f^{+}$.

COROLLAIRE. - *Si* N *est un sous-module d'un module* M *dont le* Spir *est compact, alors* Spir(N) *est compact.*

THEOREME 2. - *Pour que* Spir(M) *soit compact, il faut et il suffit que* M *soit noethérien et que, pour tout sous-module* N *de* M, *il y ait dans* M/N *un nombre fini d'irréductibles minimaux tel que tout irréductible de* M/N *contienne l'un d'eux.*

COROLLAIRE 1. - *Le* Spir *d'un module noethérien distributif est compact.*

COROLLAIRE 2. - *Dans un module à* Spir *compact, l'intersection d'une chaîne d'irréductibles est irréductible.*

COROLLAIRE 3. - *Si* C *est un sous-module co-irréductible d'un module* M *dont le est compact, et si* K *est un complément de* C *dans* M, *alors* $\mathrm{Hom}_A(K,C)$ *est fini.*

En effet, $f \mapsto K_f = \{k \oplus f(k) \mid k \in K\}$ est une injection de $\mathrm{Hom}_A(K,C)$ dans l'ensemble des compléments de C dans $K \oplus C$, qui, étant des irréductibles minimaux de $K \oplus C$, dont le Spir est compact, sont nécessairement en nombre fini.

§ 2 - ANNEAUX A SPIR COMPACT.

Tous les anneaux considérés dans ce paragraphe seront commutatifs et l'abréviation ASC sera employée pour désigner un anneau dont le Spectre irréductible est compact.

THEOREME 3. - *Si* A *est un* ASC, *les idéaux complètement irréductibles d'index* ***infini*** *de* A *sont exactement les puissances de ses idéaux maximaux d'index infini ; si* m *est un tel idéal, les seuls idéaux de* A/m^n *sont les* $(m^i/m^n)_{0\leq i\leq n}$ *et* A/m^n *est quasi-frobénusien, si bien que les ASC artiniens sont les* ***produits*** *d'un anneau fini par un anneau fortement quasi-fro énusien.*

COROLLAIRE. - *Pour un anneau local noethérien* A *dont l'idéal maximum* m *est d'**index** infini, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) Spir(A) *est compact.*

2) Les idéaux de A *forment une chaîne.*

3) Les seuls idéaux de A *sont les* $(m^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* 0.

THEOREME 4. - *Le localisé d'un ASC en un idéal premier est un ASC.*

Par contre, un anneau peut avoir tous ses localisés qui sont des ASC sans être un ASC : ceux d'un anneau régulier au sens de Von Neumann sont des corps, alors qu'un tel anneau n'est pas noethérien en général.

Cette localisation de la compacité du Spir permet de préciser la description des ASC.

THEOREME. - *Les idéaux primaires d'index infini d'un ASC sont exactement les puissances symboliques de ses idéaux premiers d'index infini, et sont préirréductibles.*

Rappelons qu'un idéal I est dit *préirréductible* si $(\forall J,K\leq A)$ $(J\cap K\subseteq I \Rightarrow J\subseteq I$ ou $K\subseteq I)$ [2].

Il s'ensuit que pour qu'un anneau noethérien dont tous les idéaux maximaux sont d'index infini soit un ASC, il faut et il suffit qu'il soit distributif.

Une autre conséquence du théorème 4 est que la *hauteur d'un ASC est au plus égale à 2.* Nous allons maintenant aborder la démonstration du théorème cité dans l'introduction, ce qui nécessite le :

THEOREME 6. - *Les idéaux complètement irréductibles de l'anneau* $\mathcal{A} = K[X,Y]$ *des polynômes à deux indéterminées sur le corps* K *contenus dans l'idéal maximal* $\mathcal{M} = \mathcal{A}X + \mathcal{A}Y$ *de* $\mathcal{A}$ *sont exactement les* $(\mathcal{A}X^i + \mathcal{A}Y^j)_{i,j \in \mathbb{N}^*} = \mathbb{N} - \{o\}$.

LEMME. - *Un idéal* I *dont le radical est un idéal maximal* m *de l'anneau noethérien* A *tel que* $I = m/I$ *soit simple est complètement irréductible.*

En effet, l'idéal de radical maximal I est primaire, donc égal à $A_m.I \cap A$, et est irréductible si $A_m.I$ l'est ; son radical étant maximal, il est alors complètement irréductible d'après ce que nous avons montré en [1] .

Pour montrer que $A_m.I$ est irréductible, il suffit de remarquer que son radical est $A_m.m$, que la simplicité de $I' .m/I$ entraine celle de $A_m.I \cdot A_m.m/A_m.I =$ $= A_m(I \cdot m)/A_m.I$ et d'appliquer un théorème classique de [3].

COROLLAIRE. - *Les idéaux* $(\mathcal{A}X^i + \mathcal{A}Y^j)_{i,j \in N^*}$ *sont des idéaux complètement irréductibles de* $\mathcal{A} = K[X,Y]$.

On a, en effet, $R(y) = \mathcal{A}X + \mathcal{A}Y = \mathcal{M}$, et $y \cdot .\mathcal{M} = y \cdot .X \cap y \cdot .Y =$
$= (\mathcal{A}X^{i-1} + \mathcal{A}Y^j) \cap (\mathcal{A}X^i + \mathcal{A}Y^{j-1}) = \mathcal{A}X^i + \mathcal{A}Y^j + \mathcal{A}X^{i-1}Y^{j-1}$.
Si $\bar{P} \in y \cdot .\mathcal{M}/y$, soit k de K tel que $\bar{P} = k\overline{X^{i-1}Y^{j-1}}$: si $\bar{P} \neq 0$, $k \neq 0$ et l'on a, si $\bar{P'} = k'X^{i-1}Y^{j-1}$, $\bar{P'} = k'\bar{k}^1\bar{P}$, d'où le fait que $y \cdot .\mathcal{M}/y$ est un $\mathcal{A}$-module simple et la nécessité.

Pour la suffisance, nous allons considérer un idéal complètement irréductible y de $\mathcal{A}$ contenu dans $\mathcal{M}$ maximal à ne pas être de la forme indiquée : son plus petit majorant strict est $\bar{y} = y \cdot .\mathcal{M} = y \cdot . X \cap y \cdot .Y$.

Les résiduels $y \cdot . X$ et $y \cdot . Y$ de y sont des idéaux complètement irréductibles contenant strictement y (si l'on avait, par exemple, $y = y \cdot . X$, on aurait, par récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $(y = y \cdot . X^n)$, ce qui conduirait à une absurdité, l'idéal complètement irréductible y ayant un radical maximal (|1|) contenu dans $\mathcal{M}$, donc égal à $\mathcal{M}$, et contenant de ce fait une puissance de X) et contenus dans $\mathcal{M}$ (qui est le radical, donc le plus grand résiduel propre de y).

Ces résiduels sont donc de la forme $y \cdot . X = \mathcal{A} X^{p-1} + \mathcal{A} Y^q$ et $y \cdot . Y = \mathcal{A} X^r + \mathcal{A} Y^{s-1}$ et on montre que $p = r$ et que $q = s$ en écrivant que $(y \cdot . X) \cdot . Y = y \cdot . XY = (y \cdot . Y) \cdot . X$ y contient ainsi $\mathcal{A} X^p + \mathcal{A} Y^q$, et l'on a $\bar{y} = \mathcal{A} X^p + \mathcal{A} Y^q + \mathcal{A} X^{p-1} Y^{q-1}$.

Mais l'idéal complètement irréductible y est maximal à ne pas contenir l'élément $X^{p-1}Y^{q-1}$ de $\bar{y} - y$; comme c'est aussi le cas de l'idéal complètement irréductible $\mathcal{A} X^p + \mathcal{A} Y^q \subseteq y$, on a $y = \mathcal{A} X^p + \mathcal{A} Y^q$, l'absurdité et le résultat.

Le localisé $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ de l'anneau noethérien $\mathcal{A}$ étant noethérien, il suffit maintenant de montrer que tout idéal J de $\mathcal{A}$ contenu dans $\mathcal{M}$ est contenu dans un nombre fini d'irréductibles contenus dans $\mathcal{M}$ tels que tout irréductible contenant J et contenu dans $\mathcal{M}$ contienne l'un d'eux, puis de localiser et de globaliser.

Rappelons que si A est un anneau factoriel, un idéal premier $\mathcal{P}$ de $A[X]$ tel que $\mathcal{P} \cap A = 0$ est cyclique, comme Germain l'a montré en [4] et que les idéaux irréductibles d'un domaine noethérien dont le radical est un idéal premier cyclique P sont exactement les puissances de P.

La condition précédente est vérifiée si $J = 0$ ou si le radical de J est $\mathcal{M}$, car J est alors cofini, et nous excluerons désormais ces deux cas.

Tous les idéaux que nous considérerons à partir de maintenant seront des idéaux de $\mathcal{A}$ contenus dans $\mathcal{M}$.

- Si l'irréductible I contenant J contient un irréductible non complètement irréductible I' contenant J, I' a un radical premier cyclique P et il existe un plus grand entier tel que $P^n \supseteq J$ (sinon $J \subseteq \bigcap_{n\in\mathbf{N}} P^n = 0$). P^n est un irréductible minimal contenant J et contenu dans I', donc dans I. Comme il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux contenant J, les irréductibles minimaux de la forme P^n (où P est un premier cyclique) contenant J sont en nombre fini.

- Si l'irréductible I contenant J ne contient pas d'irréductible non complètement irréductible contenant J, il est lui-même complètement irréductible, et il n'existe pas de chaîne dénombrable strictement décroissante $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'idéaux complètement irréductibles contenus dans $I = I_o$ et contenant J : sinon, ces idéaux, ayant un radical maximal contenu dans $\mathcal{M}$, donc égal à $\mathcal{M}$, seraient de la forme $I_n = \mathcal{A}X^{i_n} + \mathcal{A}XY^{j_n}$; les suites croissantes (i_n) et (j_n) se pourraient être toutes deux stationnaires, ni tendre toutes deux vers l'infini, car on aurait : $J \subseteq \bigcap_{n\in\mathbf{N}} I_n \subseteq \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \mathcal{M}^n = 0$.

Si par exemple la suite (i_n) était, à partir d'un certain rang, constante, et égale à i, (j_n) tendant vers l'infini, on aurait $J \subseteq \bigcap_{n\in\mathbf{N}} (\mathcal{A}X^i + \mathcal{A}Y^n) = \mathcal{A}X^i$ et I contiendrait un irréductible non complètement irréductible contenant J, absurdement I contient donc un idéal complètement irréductible minimal contenant J, soit $\mathcal{A}X^{i_o} + \mathcal{A}Y^{j_o}$, qui est ainsi un irréductible minimal contenant J. Mais les idéaux complètement irréductibles minimaux contenant J, étant deux à deux incomparables, sont en nombre fini (au plus égal à i_o+j_o-1) et le résultat s'ensuit.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] RAVEL, *Réduction des intersections*, à paraître au Journal für die reine and angewandte Mathematik.

[2] FUCHS, *Uber die Ideale arithmetischer Ringe*, Comment. Math. Helv. 23 (1949), p. 334-341.

[3] ZRAISKI-SAMUEL, *Commutative Algebra,* Tome 1, Van Nostrand.

[4] GERMAIN, *Extension algébrique simple d'un anneau,* Publ. du Dép. de Math. de Lyon, T. 6, fasc. 4, 1970, .

J. RAVEL

Université Claude Bernard
Département de Mathématiques
43, bd du 11 novembre 1918
69621-VILLEURBANNE