ANNIE PAGE

Une caractérisation des anneaux réguliers à identité polynomiale

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 1
, p. 63-76
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_1_63_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1973 t.10-1

UNE CARACTERISATION DES ANNEAUX REGULIERS A IDENDITE POLYNOMIALE

par Annie PAGE

INTRODUCTION.

Dans tout ce qui suit, A désigne un anneau unitaire de centre Z. L'annulateur à gauche (resp. à droite) d'un sous-ensemble S de A sera noté $l(S)$ (resp. $r(S)$). On supposera que A vérifie une identité polynomiale non triviale $p(x_1,\ldots,x_s) = 0$, p étant un polynôme à coefficients centraux non nuls. Nous serons souvent amenés à supposer que tout anneau quotient non nul de A satisfait une identité polynomiale non triviale ; nous dirons alors que A est un anneau *quasi-commutatif*. Ceci se produit en particulier si l'didéal Λ engendré par les coefficients du polynôme p est tel que $\Lambda = A$; dans ce cas on dit que l'identité polynomiale est *homomorphique*. L'identité $p(x_1,\ldots,x_s) = 0$ sera dite *fidèle* si $l(\Lambda) = 0$.
On sait que si un anneau A satisfait une identité polynomiale non triviale, il satisfait une *identité multilinéaire*.

$$q(x_1,\ldots,x_d) = \sum_{i \in S_d} a_i \, x_{i_1} \ldots x_{i_d} = 0 ,$$

S_d désignant le groupe des permutations de $\{1,\dots,d\}$, avec

$$\forall\, i \in S_d\ ,\ a_i \in Z\ ;\ \exists i \in S_d\ ,\ a_i \neq 0.$$

Le coefficient de q indexé par l'élément neutre de S_d sera noté a_1.

Si pour tout $i \in S_d$, $a_i = (-1)^{\sigma(i)}$ où $\sigma(i)$ est la signature de i, $q(x_1,\dots x_d)=0$ est appelée *identité standard* de degré d.

Les principaux résultats et leur démonstration ont été obtenus par E.P. ARMENDARIZ, J. FISCHER, W.S. MARTINDALE, A. PAGE, R.L. SNIDER, S.A. STEINBERG [2,3,4,5,6,8].

I - ANNEAUX SEMI-PREMIERS A DIENTITE POLYNOMIALE.

EXEMPLES.

LEMME 1.1. - *Soit* A *un anneau semi-premier ; les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) A *vérifie une identité fidèle de degré* d.

(ii) A *vérifie l'identité standard de degré* d.

(iii) A *vérifie une identité homomorphique de degré* d.

Il suffit d'établir l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) ; or ceci résulte immédiatement du fait que tout quotient premier de A vérifie l'identité standard de degré d [S.A. AMITSUR 1, théorème 12] .

Il existe des anneaux semi-premiers quasi-commutatifs qui ne vérifient pas d'identité polynomiale fidèle :

Soit F un corps commutatif ; considérons le sous-anneau A du produit $\prod_{n=1}^{\infty} M_n(F)$ constitué des éléments (x_n) vérifiant la condition suivante

$$\exists \xi \in F\ ,\ \exists p,\ \text{tels que}\ n \geq p \Longrightarrow x_n = \xi$$

Posons pour tout entier i, $h_i = (x_n)$ avec $x_i = 1$, $x_n = 0$ si $n \neq i$.

L'anneau A est un anneau régulier au sens de Von Neumann qui vérifie *l'identité polynomiale non triviale* $h_1 (x y - y x) = 0$. A *ne satisfait pas d'identité polynomiale homomorphique :* sinon en effet pour tout entier n, $M_n(F)$ vérifierait une identité polynomiale non triviale de degré d indépendant de n, et il est bien connu que ceci est impossible. Enfin A est un anneau *quasi-commutatif :* Soit K un idéal bilatère de A, $K \neq A$. S'il existe n tel que K ne contienne pas $M_n(F)$, l'anneau A/K vérifie l'identité non triviale $h_n[x_1,\dots,x_{2n}]$ ($[x_1,\dots,x_{2n}]$ désignant l'identité standard de degré 2n) ; sinon A/K est un sous-anneau de $A/\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} M_n(F)$ qui, isomorphe à F, est commutatif.

Nous utiliserons fréquemment le résultat suivant dû à L. ROWEN [10] . Un anneau A semi-premier à identité polynomiale fidèle est tel que tout idéal bilatère non nul contienne un élément central $\neq 0$ En particulier si le centre de A est un corps, A est un anneau quasi-simple, et c'est donc un anneau simple.

Nous allons généraliser le résultat de L. ROWEN :

LEMME 1.2. - *Soit* A *un anneau semi-premier quasi-commutatif ; tout idéal bilatère* $I \neq 0$ *contient un élément central* $\neq 0$.

Supposons tout d'abord I essentiel dans A (i.e. I est un idéal à gauche, ou à droite, c'est équivalent, essentiel).

Soit Λ l'idéal bilatère engendré par les coefficients d'une identité polynomiale de + A. Dans l'anneau $B = A/1(\Lambda)$ l'idéal non nul I $\Lambda/1(\Lambda)$ contient un élément central $s + 1(\Lambda) \neq 0$. Il est vévident que s est central dans A. Si I n'est plus essentiel, on applique le résultat précédent à l'anneau $C = A/1(I)$: il existe $s \in I$, $s \notin 1(I)$ tel que $s + 1(I)$ soit central dans C ; s est alors central dans A.

PROPOSITION 1.3. -

Soit A *un anneau semi-premier quasi-commutatif.*

Alors les idéaux singuliers à gauche et à droite de A *sont nuls.*

Compte-tenu de la symétrie, il suffit de montrer que l'idéal singulier à gauche J est nul. Supposons $J \neq 0$ et soit s un élément central non nul de J. On a $A s \cap 1(s) \neq 0$ et $(A s \cap 1(s))^2 = 0$; d'où la contradiction.

LEMME 1.4. - *Soit* A *un anneau semi-premier satisfaisant l'identité multilinéaire* $q(x_1,\dots,x_d) = 0$, *et soit* $S = \oplus (X_j \; ; \; j = 1,\dots,n)$ *une somme directe d'idéaux à gauche (resp. à droite) de* A *non nuls, isomorphes entre eux. Alors on a* $n < d$ *dans chacun des cas suivants :*

(a) $\Lambda S \neq 0$.

(b) $S \subset \Lambda$.

(c) L'identité $q(x_1,\dots,x_d) = 0$ *est fidèle.*

(a) On peut se ramener au cas où l'on a $a_1 X_1 \neq 0$. Supposons $d \leq n$ et considérons $x_1 \in X_1, \dots, x_{d-1} \in X_{d-1}$. On a pour tout $x_d \in X_d$, $\sum_{i \in S_d} a_i x_{i_1} \dots x_{i_d} = 0$ et, comme la somme $\sum (X_j \; ; \; j = 1,\dots,d)$ est directe, $\left(\sum_{i \in S_d} a_i x_{i_1} \dots x_{i_{d-1}}\right) x_d = 0.$

Posons $X = \oplus (X_j \; ; \; j = 1,\dots,d-1)$, $a = \sum_{i \in S_{d-1}} a_i x_{i_1} \dots x_{i_{d-1}}$; la dernière égalité entraîne $a X_d = 0$, d'où compte-tenu de l'isomorphisme entre les X_j , $a X = 0$. On a alors $a \in X$ et $a X = 0 \Rightarrow (A a)^2 = 0 \Rightarrow a = 0$, puisque l'anneau A est semi-premier. On a donc montré que pour

$$x_1 \in X_1,\dots,x_{d-1} \in X_{d-1} \text{ , } \sum_{i \in S_{d-1}} a_i x_{i_1} \dots x_{i_{d-1}} = 0.$$

En itérant le raisonnement d-1 on aboutit à la contradiction $a_1X_1 = 0$.

(b) Comme l'anneau A est semi-premier et comme S n'est pas nul on a $S^2 \neq 0$. l'inclusion $S\subset\Omega$ entraine alors $\Omega S \neq 0$ et l'on peut appliquer le résultat précédent.

(c) On a $r(\Omega) = 0$ d'où $\Omega S \neq 0$.

Les définitions suivantes s'appliquent à un anneau A ne vérifiant pas nécessairement une identité polynomiale. A est dit fini s'il remplit la condition :

$$x \in A\ ,\ y \in A\ ,\ xy = 1 \Longrightarrow y\,x = 1.$$

Un idempotent e de A est dit *abélien* si dans l'anneau e A e les idempotents sont centraux. Si A est un anneau régulier, auto-injectif à gauche, ceci équivaut à dire q'uil n'existe pas dans A e d'idéaux à gauche X et Y, isomorphes, non nuls et tels que $X\cap Y = 0$;. On dit qu'un anneau régulier, auto-injectif à gauche A est de *type* I (au sens de la théorie des anneaux de Baer) si tout idéal à gauche non nul de A contient un idempotent si c'est un anneau de type I auto-injectif (à droite et à gauche). Enfin, *l'indice de nilpotence* d'un anneau A est le nombre fini ou non

$$i(A) = \text{supp}\ \{k\ ;\ \exists\, x\in A\ ,\ x^{k-1} \neq 0\ ,\ x^k = 0\ \}.$$

LEMME 1.5. - *Soit* $\hat{A}$ *un anneau régulier auto-injectif à gauche. Alors :*

(a) l'indice de nilpotence $i(\hat{A})$ *est égal à la borne supérieure des entiers* m *tels qu'il existe dans* A *une somme directe de* m *idéaux à gauche (resp. à droite) non nuls, isomorphes entre eux.*

(b) Si $i(A)$ *est fini,* $\hat{A}$ *est un anneau de type* I *auto-injectif.*

(a) Le résultat est dû à Y. Utumi [11, théorème 3].

(b) Soit W un idéal à gauche non nul de $\hat{A}$; on peut considérer une somme directe d'idéaux à gauche monogènes inclus dans W, non nuls isomorphes entre eux, dont le nombre de termes soit maximum. Soit $\hat{A}e$, $e = e^2$, l'un de ces idéaux; il est évident que $\hat{A}e$ ne contient pas d'idéaux à gauche non nuls X et Y, isomorphes et tels que $X\cap Y = 0$. e est donc un idempotent abélien $\neq 0$ de W. Par suite, A est de type I.

D'autre part, il n'existe pas dans $\hat{A}$ de sommes directes infinies d'idéaux à gauche non nuls isomorphes, et $\hat{A}$ est donc fini. $\hat{A}$ est donc bien de type I, auto-injectif.

Considérons maintenant un anneau A semi-premier quasi-commutati . Comme l'idéal singulier à gauche de A est nul (proposition 1.3), on sait que l'enveloppe injective $\hat{A}$ de A, considérée comme A-module à gauche, est un sur-anneau de A, régulier de Von Neumann, auto-injectif. Nous allons donner des précisions sur $\hat{A}$.

Remarquons tout d'abord que si A satisfait une identité polynomiale fidèle de degré d, il satisfait l'identité standard de degré d, et les sommes directes d'idé d'idéaux à gauche de A non nuls ont donc au plus (d-1) termes (lemme 1.4, (c)). Comme $\hat{A}$ vérifie la même propriété, on a par suite $i(\hat{A}) \leq d-1$ et $\hat{A}$ est un anneau de type I auto-injectif (lemme 1.5). Nous allons généraliser cette propriété.

PROPRIETE 1.6. - *Soit* A *un anneau semi-premier quasi-commutatif et soit* $\hat{A}$ *l'enveloppe injective à gauche de* A. *Il existe une famille* $(h_i)_{i\in I}$ *d'idempotents centraux de* $\hat{A}$ *telle que*

(a) La somme $\sum(\hat{A}h_i\ ;\ i\in I)$ *soit directe et essentielle dans* $\hat{A}$.

(b) Pour tout $i\in I$ *l'anneau* $\hat{A}h_i$ *soit d'indice de nilpotence fini.*

Soit ξ l'ensemble des idéaux bilatères non nuls K de A tels qu'il existe un entier m vérifiant la propriété suivante : toute somme directe d'idéaux à gauche inclus dans K, non nul ,isomorphes entre eux, a au plus m termes. Si Ω est l'idéal bilatère engendré par les coefficients d'une identité multilinéaire satisfaite par A, on a $\Omega\in\xi$ (lemme 1.3, (b)). Comme ξ n'est pas vide, on peut considérer une famille $(K_i\ ;\ i\in I)$ d'idéaux bilatères appartenant à ξ telle que la somme $\sum(K_i\ ;\ i\in I)$ soit directe et maximale.

Nous allons montrer que l'idéal bilatère $U = \oplus(K_i\ ;\ i\in I)$ est essentiel dans A. Supposons que l'on ait $V = l(U) \neq 0$ et posons $L = l(V)$. L'anneau A/L est un anneau semi-premier à identité polynomiale non triviale et d'après le lemme 1.4., il contient un idéal bilatère non nul Ω' tel que le nombre de termes de toute somme directe d'idéaux isomorphes non nuls de Ω', soit borné par un entier m. Soit W l'idéal bilatère de A contenant L tel que $W/L = \Omega'$; posons $W.V = K$. K est un idéal bilatère de A, non nul puisque l'on a :

$$\Omega' \neq 0 \Longrightarrow W \neq L \Longrightarrow W \not\subset L \Longrightarrow W\,V \neq 0.$$

D'autre part, considérons un idéal $S = \oplus\,(X_j\ ;\ j = 1,\ldots,k)$ somme directe d'idéaux à gauche $X_j \neq 0$, inclus dans K, isomorphes entre eux. Si $\overline{X}_j$ désigne l'image de X_j dans A/L, il est immédiat de vérifier que les idéaux $\overline{X}_j$ sont isomorphes et que leur somme est directe ; on a donc $k \leqslant n$. Ceci montre que l'idéal K appartient à $\mathcal{E}$ et contredit la maximalité de la famille $(K_i\ ;\ i \in I)$. Pour tout $i \in I$, l'enveloppe injective de K_i considéré comme A-module à gauche se met sous la forme $\hat{A}h_i$ où h_i est un idempotent central de $\hat{A}$. Il est évident que la famille $(h_i\ ;\ i \in I)$ vérifie les propriétés (a) et (b) de la proposition.

THEOREME 1.7. - *Soit* A *un anneau semi-premier quasi-commutatif ; alors*

(a) l'enveloppe injective à gauche de A *est un sur-anneau de* A, *régulier de type* I, *auto-injectif.*

(b) Il n'existe pas dans A *de sommes directes infinies d'idéaux à gauche (resp. à droite) non nuls isomorphes.*

(c) Si de plus A *vérifie une identité polynomiale fidèle de degré* d, *l'enveloppe injective de* A *est d'indice de nilpotence au plus égal à* d-1 .

(a) L'enveloppe injective à gauche $\hat{A}$ de A est extension essentielle d'une somme directe d'anneaux finis de type I (proposition 1.5.,lemme 1.4). Il est alors immédiat de vérifier que $\hat{A}$ est lui-même un anneau fini, de type I.

(b) Il suffit de remarquer que dans $\hat{A}$, il n'existe pas de sommes directes infinies d'idéaux à gauche non nuls isomorphes.

(c) D'après la remarque qui prècède la proposition 1.5..

Remarque : dans l'exemple envisagé plus haut, les enveloppes injectives à gauche et à droite de A sont égales à $\hat{A} = \prod_{n=1}^{\infty} M_n(F)$ et, si M est un idéal bilatère maximal de $\hat{A}$ contenant $\bigoplus_{n=1}^{\infty} M_n(F)$, l'anneau $\hat{A}/M$ est un anneau régulier auto-injectif qui n'est pas de type I [12]. On en déduit que $\hat{A}$ n'est pas un anneau quasi-commutatif (théorème 1.7.). On voit donc qu'il existe des anneaux quasi-commutatifs dont l'enveloppe injective à gauche (ou à droite) n'est pas un anneau quasi-commutatif. On peut néanmoins se poser les problèmes suivants :

Soit A un anneau semi-premier quasi-commutatif, alors :

I. A admet-il même enveloppe injective à gauche et à droite ?

II. L'enveloppe injective $\hat{A}$ de A est-elle un anneau à identité polynomiale, et vérifie-t-elle les mêmes identités polynomiales que A ?

W.S. MARTINDALE [6] a répondu par l'affirmative à ces deux questions au moyen du résultat suivant :

Pour un anneau semi-premier à identité polynomiale fidèle, tout idéal à gauche essentiel contient un élément central $\neq 0$.

On généralise sans peine le résultat aux anneaux semi-premiers quasi-commutatif.

Soit A un anneau semi-premier quasi-commutatif dont le centre est un anneau régulier et soit $\hat{A}$ l'enveloppe injective de A. Supposons que A satisfasse l'identité $p(x_1,\dots,x_n) = 0$. Si $y_1,\dots,y_n \in \hat{A}$, ;, on peut trouver un idéal à gauche essentiel X de A tel que $Xy_1 \subset A,\dots,Xy_n \subset A$. Pour tout idempotent central h de X on a $hp(y_1,\dots,y_n) = 0$. On constate aisément que X est extension essentielle d'une somme directe d'idéaux Ah_i où h_i est un idempotent central, et l'on a donc $p(y_1,\dots,y_n) = 0$. D'autre part, il est facile de voir que A est un sous A-module à droite essentiel dans $\hat{A}$, et $\hat{A}$ qui est auto-injectif à droite est donc l'enveloppe injective à droite de $\hat{A}$.

Les problèmes posés lorsque A est un anneau semi-premier quasi-commutatif dont le centre est un anneau régulier sont donc résolus. On passe au cas général en considérant l'anneau engendré par A et le centre de l'enveloppe injective $\hat{A}$ de A. D'où le

THEOREME 1.9. - *Un anneau* A *semi-premier quasi-commutatif admet même enveloppe injective à gauche et à droite* $\hat{A}$. $\hat{A}$ *satisfait les mêmes identités polynomiales que* A.

Remarque.

On connait des anneaux non semi-premiers à idéaux singuliers à gauche et à droite nuls, satisfaisant une identité standard, et qui n'admettent pas même enveloppe injective à gauche et à droite : Soit A l'anneau des matrices triangulaires $\begin{pmatrix} a & b \\ o & c \end{pmatrix}$ où b et c décrivent le corps des réels et où a décrit le corps des rationnels. A est artinien à droite et considéré comme A-module à gauche et il est de dimension de Goldie infinie. Il admet l'anneau de matrices $M_2(R)$ comme enveloppe injective à droite, alors qu'à gauche son enveloppe injective est de dimension infinie.

II - ANNEAUX REGULIERS A IDENTITE POLYNOMIALE.

Un *V-anneau à gauche* est un anneau A tel que tout A-module à gauche simple soit injectif. Les V-anneaux et les anneaux réguliers qui dans le cas commutatif constituent la même classe ont dans le cas général des propriétés communes.

LEMME 2.1. - *Soit* A *un anneau qui est un* V*-anneau à gauche (resp. à droite) ou un anneau régulier ; alors*

(a) tout idéal à gauche (resp. à droite) est idempotent.

(b) le centre de A *est un anneau régulier.*

(a) La propriété est évidente pour un anneau régulier, pour un V-anneau à gauche (resp. à droite) elle a été démontrée par G.O. Michler et O.E. Villamayor

[7, Corollaire 2.2]. En particulier les idéaux bilatères d'un V-anneau à gauche ou à droite, ou d'un anneau régulier sont idempotents ; il revient au même de dire que les idéaux bilatères sont semi-premiers.

LEMME 2.2. - *Le centre d'un anneau dans lequel tout idéal bilatère est semi-premier est un anneau régulier.*

On pourra se reporter par exemple à G.O. Michler et O.E. Willamayor [7, démonstration du lemme 2.3].

Un idéal à gauche d'un anneau A est *irréductible* s'il n'est pas l'intersection de deux idéaux à gauche qui le contiennent strictement.

PROPOSITION 2.3. - *Soit* A *un anneau quasi-commutatif dans lequel tout idéal bilatère est semi-premier. Alors :*

(a) pour tout idéal premier P *de* A A/P *est un anneau simple.*

(b) tout idéal à gauche irréductible est maximal.

(a) Si l'on suppose A premier le centre de A est un corps (lemme 2.2) et la propriété résulte du théorème de L. ROWEN [10].

(b) Soit X un idéal à gauche irréductible. Pour tout idempotent central h, on a $(X + Ah)\cap(X + A(1-h)) = X$ d'où $h\in X$ ou $(1-h)\in X$. Comme le résultat est vrai modulo le plus grand idéal bilatère I inclus dans X, le centre de A/I est un corps, et A/I est donc un anneau simple. Le résultat en découle.

On a comme conséquence le

THEOREME 2.4. - *Soit* A *un anneau quasi-commutatif ; il y a équivalence entre les assertions suivantes :*

(i) A *est un anneau régulier,*

(ii) A *est un V-anneau à gauche (resp. un V-anneau à droite, resp. un V-anneau).*

(iii) Tout idéal bilatère de A *est semi-premier.*

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Soient S un A-module à gauche simple, E(S) son enveloppe injective ; pour tout $x \in E(S)$, $1(x)$ est un idéal à gauche irréductible et (proposition 2.3) Ax est donc un module simple. On en déduit l'inclusion $E(S) \subset S$, et S est bien injectif.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) c'est le (a) du lemme 2.1.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Supposons qu'il existe $a \in A$ tel que l'équation $a = a\,x\,a$ n'ait pas de racine dans A. Soit I un idéal bilatère de A maximal pour la propriété suivante : l'équation $a = ax\,a$ n'a pas de racine modulo I. I n'est pas premier (proposition 2.3), et il existe donc deux idéaux bilatères I' et I" contenant strictement I tels que $I'.\,I'' \subset I$, soit pour que A/I est semi-premier, $I' \cap I'' \subset I$. Il existe $x, y \in A$ tels que $a - ax\,a \in I'$, $a - ay\,a \in I''$. On a $a\text{-}a\,(x\text{-}y\text{-}xay)\,a \in I' \cap I''$, d'où la contradiction.

Un anneau bi-régulier A est un anneau tel que pour tout élément $x \in A$, il existe un idempotent central h tel que $AxA = Ah$.

COROLLAIRE 2.5. - *Un anneau bi-régulier quasi-commutatif est régulier.*

Nous allons montrer que la réciproque n'est pas vraie.

PROPOSITION 2.6. - *Soient* A *un anneau commutatif et* G *un groupe, tels que* A[G] *soit un anneau régulier à identité polynomiale fidèle. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) A[G] *est irrégulier,*

(ii) le centre de G *est d'indice fini dans* G.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) A[G] étant semi-premier à identité polynomiale, on sait que G contient un sous-groupe abélien d'indice fini H d'autre part G est localement normal : Soit K un sous-groupe de type fini de G. $A[G]\omega(K)\,A[G]$ est engendré par idempotent central h. On a par suite $r\omega(H) \neq 0$, et K est donc fini. D'autre part on constate aisément que K est inclus dans le sous-groupe H' engendré par le support de h, et il est bien connu que H' est normal dans G. Dès lors, soient $(x_1,\dots,x_n)$ un système de représentants de G modulo H, et pour tout x_i, $i = 1,\dots,n$, $C(x_i)$ le centralisateur de x_i dans G. $H \cap (\bigcap_{i=1}^{n} C(x_i))$ est un sous-groupe du centre de G, et intersection de sous-groupes d'indice fini, il est d'indice fini puisque G est localement normal.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Evident d'après le théorème 2.4.

L'exemple suivant est dû à G. RENAULT [9] :

Soit p un nombre premier, n un entier non divisible par P, $k = \mathbb{Z}/p(\mathbb{Z})$, $K = k(\xi)$ où ξ est une racine primitive n-ième de l'unité. Désignons par V l'espace vectoriel sur K admettant une base dénombrable $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et par f l'endomorphisme de V défini par $f(e_i) = \xi e_i$ pour $i \in N$. On montre, au moyen de la proposition 2.6, que si G est le groupe multiplicatif engendré par les translations de V et f, C(G) est un anneau régulier à identité polynomiale, qui n'est pas bi-régulier.

III - ANNEAUX AFFINES REGULIERS.

A est un anneau affine si c'est une Z-*algèbre de type fini* et si c'est un anneau quasi-commutatif.

LEMME 3.1. - *Soient* M *un idéal maximal du centre* Z *de* A, A_M *le localisé de* A *en* M, *le localisé de* Z *en* M, (M) *l' idéal bilatère engendré par* M *dans* A. *Alors* :

(a) le centre C *de* A_M *est égal à* Z_M.

(b) Si Z *est un anneau régulier, les anneaux* A_M *et* A/(M) *sont isomorphes.*

(a) On a évidemment $Z_M \subset C$. Soit $x/s \in C$: $x \in A$, $s \in Z-M$, pour tout $y \in A$; il existe $t \in Z-M$ tel que $t(xy - yx) = 0$. Désignons par $y_1,\dots,y_n$ des éléments engendrant la Z-algèbre A et soient $t_1,\dots,t_n \in Z-M$ tels que :

$$\forall i = 1,\dots,n \ , \ t_i(xy_i - y_i\, x) = 0.$$

On voit facilement que l'élément $\tau = t_1 \dots t_n$ vérifie :

$$\forall y \in A, \quad \tau(xy - yx) = 0.$$

On a donc $\tau x \in Z$, d'où $x \in Z_M$.

(b) Il suffit de remarquer que $(M) = \{x \in A \ ; \ \exists x \in Z-M, \ sx = 0\}$.

COROLLAIRE 3.2. - *Soit* A *un anneau affine qui est un* V*-anneau à gauche ou à droite pour tout idéal maximal* M *du centre* (M) *est un idéal bilatère maximal de* A.

Il suffit de remarquer que le centre de A/(M) est un corps.

THEOREME 3.3. (G.O. MICHLER, I.E. XILLAMAYOR, 7) -

Pour un anneau affine, il y a équivalence entre les assertions suivantes :

(i) A *est birégulier,*

(ii) A *est régulier,*

(iii) A *est un* V*-anneau à gauche (resp. un* V*-anneau à droite, resp. un* V*-anneau).*

Il suffit de montrer l'implication (iii)$\Longrightarrow$(i).

(iii)$\Longrightarrow$(i). Soit $x \in A$, si $I = (x) \oplus 1[(x)]$ est différent de A, on montre facilement d'après le corollaire 3.2, que I est contenu dans (M) où M est un idéal maximal de Z. On peut alors trouver $s \in Z-M$, tel que $sx = 0$; on a $s \in 1[(x)]$ d'où la contradiction.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S.A. AMITSUR, *Prime Rings having Polynomial Identities with arbitrary coefficients*, Proc. London Math. Soc. (3), 17 (1967), 470-86.

[2] E.P. ARMENDARIZ et J.W. FISCHER, *Regular P.I. Rings*. Proc. Amer. Math. Soc. (à paraître).
(à paraître).

[3] E.P. ARMENDARIZ et S.A. STEINBERG, *Regular Left-Injective Rings with a polynomial Identity* (à paraître).

[4] J.W. FISCHER, *Structure of Semi-Prime P.I. Rings* (à paraître).

[5] J.W. FISCHER et R.L. SNIDER, *On the Von-Neumann Regularity of rings with Regular Prime Factor Rings* (à paraître).

[6] W.S. MARTINDALE, *On semi-Prime P.I. Rings,* Proc. Amer. Math. Soc. *(à paraître).*

[7] C.C. MICHLER et O.E. WILLAMAYOR, *On rings whose Simple Modules are injective,* J. of Alg. 25 (1973), 185-201.

[8] A. PAGE, *Généralisation aux Anneaux à Identité Polynomiale d'un Théorème de I. Kaplansky,* C. R. Acad. Sc. Paris, Série A (1973), 233-235.

Une caractérisation des Anneaux Réguliers à Identité Polynomiale. Séminaire d'algèbre non commutative, Paris (1972-1973).

[9] G. RENAULT; *Anneaux Biréguliers.* Séminaire d'Algèbre non commutative, Paris (1972-1973).

[10] L. ROWEN, *Some Results on the Center of a Ring with Polynomial Identity.* Bill. Amer. Math. Soc. 79 (1973), 219-233.

[11] Y. UTUMI, *A note on an Equality of Livitski.* Proc. Japan Acad., 33 (1957), 249-51.

[12] G. RENAULT, *Anneaux Auto-injectifs à droite,* Bull. S.M.F. (à paraître).

A. PAGE
Département de Mathématiques
Université de Poitiers
86022 - POITIERS