PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

A. HUDRY

Localisations premières

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 1
, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_1_1_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1973 t.10-1

LOCALISATIONS PREMIERES

par A. HUDRY

1 - TERMINOLOGIE.

Par *localisation*, on entend localisation au sens de P. Gabriel [1]. L'anneau R étant unitaire, mais non nécessairement commutatif, Mod_R désigne la catégorie des R-modules à droite.

A une localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ de Mod_R, il est associé bijectivement :

une *topologie à droite* $\mathcal{F}$, c'est-à-dire un ensemble topologisant et idempotent d'idéaux à droite de R [1].

une *sous-catégorie localisante* $\mathcal{C}$, c'est-à-dire une sous-catégorie pleine de Mod_R, épaisse et stable par limites inductives.

une *sous-catégorie locale* $\mathcal{L}$, c'est-à-dire une sous-catégorie pleine de Mod_R tel que le foncteur inclusion i admette un adjoint à gauche ℓ, commutant aux limites projectives finies.

Le *foncteur localisation* de P. Gabriel est alors $L = i \circ \ell$.

Il est bien connu que si M est un R-module à droite d'enveloppe injective E(M) le noyau du foncteur $Hom_R(.,E(M))$ est une sous-catégorie localisante $\mathcal{C}_M$. La localisation (respectivement la topologie à droite) correspondante est notée $\tilde{\mathcal{L}}_M$ (respectivement $\mathcal{F}_M$).

2 - QUELQUES GENERALITES SUR LES LOCALISATIONS PREMIERES.

Les localisations envisagées ici sont celles qui sont données par la définition suivante :

2.1. DEFINITION (O. Goldman [2]). - *Une localisation* $\tilde{\mathscr{L}}$ *de* Mod_R *est dite* première *s'il existe un* R*-module à droite* M *non nul et satisfaisant aux conditions suivantes :*

1) M *est sans torsion pour* $\tilde{\mathscr{L}}$.

2) Pour tout sous-module non nul M' *de* M, *le module* M/M' *est de torsion pour* $\tilde{\mathscr{L}}$.

3) $\tilde{\mathscr{L}} = \tilde{\mathscr{L}}_M$.

2/2. THEOREME. - *La correspondance* $M \to \tilde{\mathscr{L}}_M$ *induit une bijection entre l'ensemble des types d'injectifs indécomposables de coeur non nul et l'ensemble des localisations premières.*

Voir [4].

2/3. QUELQUES CONSEQUENCES.

1) Si $\tilde{\mathscr{L}}$ est plate et première, alors L(R) est un anneau quasi-local c'est-à-dire admet un idéal bilatère maximum qui coïncide avec son radical de Jacobson. Si R est noethérien à droite et héréditaire à droite toute localisation première a cette propriété.

2) Toute topologie à droite de type fini $\mathscr{F}$ est intersection de topologies premières [3]. J. Raynaud a montré de plus que cette intersection peut être réduite.

3) Comme nous l'avons fait dans [3], on peut faire de SP(R) un espace topologique.

2.4. DEFINITION. - *Un sous-module* M' *de* M *est dit* primaire dans M *si* M/M' *est un module primaire de O. Goldman* [2] . *Un module* M *est dit admettre* la propriété de la décomposition primaire *(on écrit* D.P. *en abrégé) si tout sous-module propre de* M *est intersection réduite de sous-modules primaires dans* M .

Soit $\mathcal{P}$ la sous-catégorie pleine de Mod_R constituée par les R-modules à droite admettant la propriété D.P. Si M est un R-module à droite la notation $\mathbb{P}(M)$ désigne l'ensemble des topologies de la forme $\mathcal{F}_{M'}$ avec M' sous-module homogène de M (pour la définition d'un module homogène voir [3]).

2.5. THEOREME. - *$\mathcal{P}$ est une sous-catégorie localisante de* Mod_R *et en particulier tout module contient un plus grand sous-module admettant la propriété* D.P. *de plus* $\mathbb{P}$ *est une théorie de décomposition au sens de N. Popescu* [5] .

Il est remarquable que pour une vaste classe d'anneaux tout module à droite admet la propriété D.P. . Ces anneaux ont été caractérisés dans [3] où nous avons indiqué que les anneaux noethérien à droite, semi-artinien à droite et ceux pour lesquels la K-dim(Mod_R) est définie sont des exemples de tels anneaux.

3 - SUR UN PROBLEME DE C. FAITH.

C. Faith pose la question suivante : Quels sont les anneaux isomorphes à des ordres à droite dans l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel à droite sur un corps ?

3.1. DEFINITION. - *Un anneau* R *est dit* primaire à droite *si le* R*-module à droite est un module primaire de O. Goldman* [2].

3.2. PROPOSITION. - *Si* R *est un anneau primaire à droite, alors soit* R *est non non singulier c'est-à-dire* $Z_r(R) = 0$, *soit* R *est de torsion, c'est-à-dire* $Z_r^2(R) = R$.

Ici seuls nous intéressent les anneaux primaires à droite non singuliers. En voici des exemples :

1) un anneau intègre R est primaire à droite si et seulement si c'est un domaine de Ore à droite.

2) Un anneau premier est primaire à droite si et seulement s'il satisfait à l'une quelconque des conditions équivalentes suivantes :

(i) R est non singulier et le treillis des compléments est atomique ;

(ii) L'extension rationnelle maximale de R est isomorphe à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel à droite.

(iii) Il existe un complément maximal et il existe un annulateur à droite d'un élément maximal.

3) L'anneau $T_n(K)$ des matrices triangulaires inférieures à coefficients dans un corps K est primaire à droite et non premier.

Si dans la question de C. Faith, la dimension de l'espace vectoriel est finie il est bien connu que les anneaux répondant à la question sont les anneaux premiers, de Goldie à droite. Ces anneaux sont encore les anneaux premiers satisfaisant à la condition (C) suivante :

(C) Les idéaux à droite de R, engendrés par les éléments réguliers de R; forment un système co-final pour l'ensemble des idéaux à droite essentiels de R.

L'exemple suivant montre que ces anneaux ne sont pas les seuls à répondre à la question de C. Faith : soient, D un domaine de Ore à droite, K le corps des fractions à droite de D, L un D-module libre de base infinie, V le K-espace vectoriel à droite défini par $V = L \otimes_D K$, alors $R = \mathrm{End}_D L$ est isomorphe à un ordre à droite dans $Q = \mathrm{End}_K V_K$.

Ici il est montré que les anneaux répondant à la question de C. Faith sont les anneaux primaires à droite satisfaisant à une condition (C') de la même forme que la condition (C).

Soit B(R), l'ensemble des éléments réguliers $s \in R$ tels que $sR \in \mathcal{F}_R$. Alors B(R) est une partie multiplicative de R. Soit $\mathcal{E}$, l'ensemble des idéaux à droite I de R tels qu'il existe $f \in \mathrm{Hom}_R(I,R)$ non prolongeable strictement en un homomorphisme d'un idéal à droite contenant I dans R. Ces idéaux à droite ont été considérés, dans un autre contexte, par K. Mazaiké qui a remarqué que $\mathcal{E}$ est une famille d'idéaux à droite essentiels stable par résiduation à droite. Dans ce qui suit les idéaux à droite de $\mathcal{E}$ sont appelés *fortement essentiels*.

3.3. THEOREME. - *Pour que* R *soit isomorphe à un ordre à droite dans l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel à droite sur un corps il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées :*

1) l'anneau R *est primaire à droite et non singulier,*

2) tout idéal à droite fortement essentiel coupe B(R).

3.4. COROLLAIRE. - R *admet un anneau classique des fractions à droite isomorphe à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel à droite sur un corps si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :*

1) l'anneau R *est primaire à droite et non singulier.*

2) Les idéaux à droite de R *engendrés par les éléments réguliers de* R *forment un système co-final pour l'ensemble* $\mathcal{E}$ *des idéaux à droite fortement essentiels.*

4 - LOCALISATIONS PREMIERES ET LOCALISATIONS DEFINIES PAR UN IDEAL BILATERE PREMIER.

Si P est un idéal bilatère premier, soit R_P le localisé de R pour la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_{R/P}$. L'application canonique de R dans R_P est notée Ψ_P. En général R_P n'est pas le localisé de Goldie de R pour P même dans le cas noethérien. Cette localisation $\tilde{\mathcal{L}}_{R/P}$ a été étudiée par J. Lambek et G. Michler dans le cas où R est noethérien à droite.

4.1. PROPOSITION. - *Soit* R *un anneau unitaire quelconque, alors pour tout idéal premier* P*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $\tilde{\mathscr{L}}_{R/P}$ *est première.*

2) R/P *est un anneau primaire à droite.*

3) R/P *est un* R*-module à droite primaire ;*

4) l'extension rationnelle maximale à droite de R/P *est isomorphe à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel à droite.*

En particulier, il en résulte que si R admet la propriété D.P. à droite alors pour tout idéal premier P, la localisation $\tilde{\mathscr{L}}_{R/P}$ est première.

Pour l'anneau R_P on a les renseignements suivants :

1) Si $\tilde{\mathscr{L}}_{R/P}$ est plate et première alors R_P est quasi-local. Donnons quelques exemples de cette situation :

a) Si R est noethérien à droite, héréditaire à droite tout idéal premier P satisfait à 1),

b) Si R est non singulier et de dimension de Goldie à droite finie, pour tout idéal premier $P \in \mathrm{Ass}R$ la condition 1) est satisfaite.

c) Si R est noethérien à droite, tout premier P non essentiel satisfait à 1) ; il en est ainsi pour tous les idéaux premiers minimaux P d'un anneau noethérien à droite ordre à droite dans un anneau artinien à droite.

2) Pour que R_P soit local (c'est-à-dire quasi local avec $R_P/\mathrm{Rad}R_P$ simple artinien) de radical de Jacobson $\Psi_P(P)R_P$ il faut et il suffit que R/P soit de Goldie à droite et que $\mathscr{C}(P)$ soit calculable à droite. $\mathscr{C}(P)$ désigne l'ensemble des $c \in R$ tels que $cx \in P$ implique $x \in P$. Il en est ainsi pour tout idéal premier inversible dans un anneau noethérien à droite et à gauche ou dans un anneau noethérien à droite avec assez d'idéaux bilatères à droite.

3) Pour que R_P soit local scalaire (C'est-à-dire local avec $R_P/\mathrm{Rad}R_P$ corps) de radical de Jacobson $\Psi_P(P)R_P$ il faut et il suffit que P soit complètement premier et que $\mathscr{C}(P)$ soit calculable à droite.

4.2. THEOREME. - *Pour un anneau noethérien à droite* R, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) toute localisation première est de la forme $\tilde{\mathcal{L}}_{R/P}$ *avec* P *idéal bilatère premier ;*

(ii) toute topologie à droite $\mathcal{F}$ *de* R *admet pour système co-final les produits finis des idéaux bilatères premiers lui appartenant ;*

(iii) pour tout injectif indécomposable E, *il existe un sous-module non nul* M *du coeur de* E, *tel que les idéaux à droite annulateurs de* M, *satisfont à la* C.C.D.*;*

(iv) tout module tertiaire est primaire ;

(v) R *a assez d'idéaux bilatères à droite au sens de P. Gabriel.*

L'implication (ii)$\Longrightarrow$(v) est la réciproque d'un résultat démontré par P. Gabriel. La condition (iv) est analogue à la condition suivante due à G. Michler "tout module de type fini et tertiaire est primaire". Le corollaire suivant répond partiellement à une question de Silver.

4.3. COROLLAIRE. - *Si* R *est noethérien à droite avec assez d'idéaux bilatère à droite alors il en est de même pour* $R[S^{-1}]$ *, où* S *est une partie multiplicative quelconque de* R, *satisfaisant à la condition de Ore à droite.*

4.4. COROLLAIRE. - *Si* R *est noethérien à droite avec assez d'idéaux bilatères à droite, alors* SP(R) *est un espace topologique quasi-compact et noethérien.*

4.5. PROPOSITION. - *Si* R *est noethérien à droite avec assez d'idéaux bilatères à droite, alors pour tout idéal bilatère premier* P *inversible dans un sur-anneau,* R_P *est local, noethérien à droite avec assez d'idéaux bilatères à droite et premier. De plus tout idéal à droite* I *de* R_P *est fermé dans la topologie* $\mathrm{Rad}R_P$*-adique, c'est-à-dire :* $I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (I+(\mathrm{Rad}R_P)^n)$.

4.6. PROPOSITION. - *Si* R *est premier, noethérien à droite, avec assez d'idéaux bilatères à droite et si tout idéal premier non nul est inversible alors* R *est héréditaire à droite et à gauche, noethérien à gauche, avec assez d'idéaux bilatères à gauche.*

Les anneaux R considérés dans la proposition 4-6 sont alors exactement, les ordres de Dedekind de J.C. Robson, essentiellement bornés, dans Q simple artinien La proposition 4.6 est à rapprocher d'un théorème bien connu, dit d'Asano-Michler, établi pour un anneau premier, noethérien à droite et à gauche, borné à droite et à gauche et dans lequel tout idéal premier non nul est inversible.

5 - BIBLIOGRAPHIE.

[1] P. GABRIEL, *Des catégories abéliennes,* Bull. Soc. Math. France, 90, 1962, p. 323-448.

[2] O. GOLDMAN, *Rings and modules of quotients,* J. of Algebra, 13, p. 10-47, september 1969.

[3] A. HUDRY, *Sur la localisation dans une catégorie de modules,* C. R. Acad. Sc. Paris, T. 270, p. 925-928, 13 avril 1970.

[4] A. HUDRY, *Sur les anneaux localement homogènes,* C.R. Acad. Sc. Paris, t. 271, p. 1214-1217, 21 décembre 1970.

[5] N. POPESCU, *Théorie générale de la décomposition,* Revue Roumaine, 12, n°9, 1967.

A. HUDRY
Département de mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621-VILLEURBANNE