A. DEAIBES

Structures ultra-uniformes et espaces éparpillés

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1972, tome 9, fascicule 3
, p. 13-53

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1972__9_3_13_0>

STRUCTURES ULTRA-UNIFORMES

ET ESPACES EPARPILLES

A. DEAIBES

INTRODUCTION.

On essaie dans ce travail d'étudier la notion non archimédienne introduite par A. F. Monna [6] dans les espaces uniformes, dans le but de généraliser les espaces ultra-métriques. Ainsi un espace uniforme $(X,\mathcal{U})$ est dit ultra-uniforme, si et seulement si, sa structure uniforme $\mathcal{U}$ admet une base d'entourages $\mathbb{B}$, telle que $v^2 = v$, pour tout $v \in \mathbb{B}$; la proposition (3.4.1) montre qu'un espace topologique séparé X est ultra-uniformisable, si et seulement si, il est éparpillé, terminologie [10]. L'étude des espaces éparpillés X est faite dans (2), où l'on considère un espace séparé X et où l'on profite des ofs de X, et des familles stables sur X, pour définir les espaces $\mathcal{A}$- $\mathcal{B}$-disconnexes (2.1.5) qui sont des espaces $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ normaux particuliers [1] . Alors les espaces éparpillés apparaissent comme étant les espaces $\mathbb{F}$-$\mathbb{F}$ disconnexes et les espaces fortement éparpillés [10], comme étant les espaces $\mathbb{F}$-$\mathbb{F}$-disconnexes (P désigne la famille des parties finies de X et $\mathbb{F}$ désigne la famille des parties fermées de X).Or l'étude des espaces éparpillés , au même titre que celle des espaces complètement réguliers [1] , peut se faire par une voie externe, aussi bien que par une voie interne ; la voie externe consiste à prendre comme ensemble auxiliaire, un corps K valué complet n.a , une bornologie b sur K, et à attribuer le premier rôle à l'algèbre des fonctions continues $C(X,K,b) = \{f : X \longmapsto K / f$ est continue, $f(X) \in b\}$. La topologie d'un espace éparpillé X est la moins fine, qui rend les fonctions de $C(X,K,b)$ continues (2.2.1). Les espaces $\mathcal{A}$-$\mathbb{F}$-disconnexes sont exactement les espaces séparés, où pour tous $A \in \mathcal{A}$, $f \in C(X,K,L)$, il existe un $h \in C(X,K,L)$ tel que $h|A = f$ (2.4) (L étant la bornologie des parties relativement Lindelöf de K (2.3.8)).

Dans la même section, on introduit la notion d'espace of-paracompact (2.3) et on démontre la propriété suivante :

ultra-métrique $\Rightarrow$ of-paracompact $\Rightarrow$ fortement éparpillé $\Rightarrow$ éparpillé ;

les 4 familles sont différentes l'une de l'autre. La proposition (3.1.2) montre que la borne supérieure d'une famille de structures ultra-uniformes sur un ensemble X, est ultra-uniforme, ce qui nous permet de définir (3.4.3) sur un espace éparpillé X, la structure ultra-uniforme universelle θ_1 comme étant la borne supérieure des structures ultra-uniformes compatibles sur X. Dans la section (3), on démontre aussi qu'une structure uniforme $\mathcal{U}$ sur un ensemble X, est ultra-uniforme si et seulement si, elle est définie par une famille d'ultra-écarts et que le séparé complété d'un espace ultra-uniforme est ultra-uniforme. La section (4) est consacrée à l'étude des srtuctures ultra-uniformes $\mathcal{U}_\beta$ définies par la famille $\mathcal{P}_\beta$ des partitions of P de X, telle que $\mathrm{Card}(P) < \aleph_\beta$, β étant un ordinal ≥ 0. Ceci nous permet de définir (4.1.3) les structures ultra-uniformes β-précompactes et de démontrer qu'il existe pour chaque espace éparpillé X, un plus petit ordinal α tel que $\theta_1 = \mathcal{U}_\alpha$ (4.1.6). On dit dans ce cas que X est α-précompact et, si X est complet pour θ_1 , on dit qu'il est α-compact. Dans la section (5), on étudie les structures ultra-uniformes définies par $C(X,K,b)$, où on retrouve les 2 espaces δX et γX introduits dans [5] , qui sont deux complétés particuliers de X, respectivement pour $\mathcal{U}_1$ et pour $\mathcal{U}_0$ et on les note respectivement par $\delta^L X$, et $\delta^P X$, puisque $\mathcal{U}_1$ est exactement la structure ultra-uniforme définie par $C(X,K;L)$, et $\mathcal{U}_0$ celle définie par $C(X,K,P)$, K étant un corps infini et P désignant la bornologie des parties relativement compactes de K (2.3.8). Dans la même section, on démontre, par analogie avec [4] et [2] , que la structure ultra-uniforme $\mathcal{U}$ d'un espace ultra-uniforme séparé $(X, \mathcal{U})$ est exactement la structure ultra-uniforme de la $\mathcal{H}$-convergence, où $\mathcal{H}$ désigne les parties uniformément équicontinues, simplement bornées de $\mathcal{U}(X,K,b) = \{f : (X, \mathcal{U}) \to K / f$ est uniformément continue, $f(X) \in b\}$, et que le séparé complété de $(X,\mathcal{U})$ est l'espace des caractères de $\mathcal{U}(X,K,b)$ ayant leurs restrictions aux $\mathcal{H}$, continues. Si X est α -précompact, $\delta^L X = \theta_1 X$, équivaut a $\chi_\alpha \leq \mathfrak{M}_0$. $\theta_1 X$ est le séparé complété de X pour θ_1 et $\mathfrak{M}_0$ est le plus petit cardinal mesurable. Enfin, on démontre le théorème (5.10.1) : $\beta = \delta^P \Leftrightarrow \upsilon = \delta^L \Leftrightarrow e = e_1$ pour tout espace éparpillé X, e étant la structure uniforme universelle, β (resp. υ) celle définie par l'algèbre $\mathcal{C}^\infty(X)$ (resp. $\mathcal{C}(X)$) des fonctions réelles continues et bornées (resp. continues).

1. BORNOLOGIES SUR UN CORPS VALUE COMPLET n.a.

1.1. DEFINITION. - *On appelle corps valué complet non archimédien un corps* K *valué complet dont la valeur absolue* $|.|$ *vérifie l'inégalité non archimédienne*

$$|x + y| \leqslant \sup \left[|x|, |y|\right] \text{ pour tous } x, y \text{ de } K.$$

1.2. DEFINITION. - *On appelle bornologie sur* K *un recouvrement* b *héréditaire de* K, *stable par réunion finie, tel que*

a) B_1, $B_2 \in b \longrightarrow B_1 + B_2$, $B_1 . B_2 \in b$.

b) $B_1 \in b \rightarrow \bar{B}_1 \in b$

c) $B_1 \in b$, $0 \notin \bar{B}_1 \longrightarrow B_1^{-1} \in b$.

1.3. DEFINITION. - *On dit qu'une partie* A *d'un espace topologique* X *est Lindelöf, si et seulement si l'espace topologique* A *muni de la topologie induite par* X *est Lindelöf.*

On dit qu'une partie A *d'un espace topologique* X *est relativement Lindelöf si et seulement si* $\bar{A}^X$ *est Lindelöf.*

1.4. *Notations :*

a) X désigne un espace topologique séparé ;

b) $(X, \mathcal{U})$ désigne un espace complètement régulier muni d'une structure uniforme compatible.

c) K est un corps valué complet n.a. (1.1), b désigne une bornologie sur K (1.2)) ;

d) $\mathscr{C}(X,K,b) = \{f : X \rightarrow K / f \text{ est continue, } f(X) \in b\}$;

e) $\mathcal{U}(X,K,b) = \{f : X \rightarrow K / f \text{ est uniformément continue, } f(X) \in b\}$

f) Si b_1 et b_2 sont deux bornologies sur K,

$$b_1 \leqslant b_2 \Longleftrightarrow b_1 \subset b_2.$$

2. LES ESPACES TOPOLOGIQUES $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ DISCONNEXES.

2.1. LA DISCONNEXITE.

2.1.1. DEFINITION. - *Soient* A *et* B *deux parties de* X. *On dit que* A *et* B *sont disconnexes s'il existe un of* ω *, tel que* $A \subset \omega$, $B \cap \omega = \emptyset$.

2.1.2. PROPOSITION. - *Pour tout* X *, pour tout* K, *et pour tout* b *sur* K, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) Deux parties A *et* B *de* X *sont disconnexes*

b) Il existe $f \in C(X,K,b)$ *telle que* $f = 1$ *sur* A, *et* $f = 0$ *sur* B.

Preuve. a) $\Longrightarrow$ b) parce que la fonction caractéristique d'un of de X dans K est continue et $\{0,1\} \in b$.

b) $\Longrightarrow$ a) Trivial.

2.1.3. DEFINITION. - *On dit qu'une famille* $\mathcal{A}$ *de parties fermées de* X *est stable sur* X *si et seulement si :*

a) pour tout $A \in \mathcal{A}$, *et pour tout* $B \in \mathcal{A}$, *on a* $A \cup B \in \mathcal{A}$,

b) pour tout fermé A *de* X *, et pour tout* $B \in \mathcal{A}$, *tels que* $A \subset B$, *on a* $A \in \mathcal{A}$.

2.1.4. DEFINITIONS.

a) On appelle $\mathcal{P}$ *la famille des parties finies de* X, *c'est une famille stable sur* X.

b) On appelle $\mathcal{K}$ *la famille des compacts de* X, *c'est une famille stable sur* X.

c) On appelle $\mathcal{F}$ *la famille des parties fermées de* X, *c'est une famille stable sur* X.

2.1.5. DEFINITIONS. - *Soient* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *deux familles stables sur* X. *Alors :*

a) On dit que X *est* $\mathcal{A}$ -$\mathcal{B}$ *disconnexe, si et seulement si deux fermés disjoints quelconques dont l'un est l'élément de* $\mathcal{A}$, *l'autre est élément de* $\mathcal{B}$ *sont disconnexes* *b) On dit que* X *est éparpillé, si* X *est* $\mathcal{P}$ - $\mathbb{F}$ *disconnexe.*

c) On dit que X *est fortement éparpillé si* X *est* $\mathbb{F}$ - $\mathbb{F}$ *disconnexe.*

Il est clair qu'un espace $\mathcal{A}$ -$\mathcal{B}$ *disconnexe est* $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ - *normal*

2.2 LES ESPACES EPARPILLES.

2.2.1. PROPOSITION. - *Soit* X *un espace séparé. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) X *est éparpillé.*

b) Tout $x \in X$ *admet une base de voisinages formée d'ofs.*

c) La topologie de X *admet une base formée d'ofs.*

d) Pour tout K *et pour tout* b *sur* K, *la topologie de* X *est la topologie initiale associée à* C(X,K,b).

Preuve. a) $\longleftrightarrow$ b) $\longleftrightarrow$ c) Trivial.

d) $\longrightarrow$ b) puisque $\bigcap_{i=1}^{n} \overset{-1}{f_i}\left[B(f_i(x),\alpha\right]$ est un of, pour

toute suite finie (f_i) ; $f_i \in C(X,K,b)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\alpha > 0$, et $B[f_i(x),\alpha] = \{x \in X / |f_i(x)| < \alpha\}$.

b) $\Longrightarrow$ d) Soient T la topologie de X, et T_1 la topologie initiale associée à C(X,K,b). T est plus fine que T_1. Soit F un fermé dans T, et soit $x \in \complement F$. Il existe $f \in C(X,K,b)$; $f(x) = 0$, et $f(F) = \{1\}$ $\overset{-1}{f}\left[B(0, \frac{1}{2})'\right] \cap F = \emptyset$.

Donc $\complement F$ est un ouvert dans T_1. F est un fermé dans T_1, et par suite $T = T_1$.

2.2.2. THEOREME. - *a) Pour tout espace topologique* Y, *il existe un espace éparpillé* Z, *et une application continue surjective* $\varphi : Y \longrightarrow Z$ *tel que le couple* (φ, Z) *soit solution du problème universel des applications continues de* Y *dans des espaces éparpillés quelconques* X. *Ce qui signifie encore que toute application continue* $u : Y \longrightarrow X$ *de* Y *dans un espace éparpillé* X *se factorise de façon unique par une application continue*

$\mathring{u} : Z \longrightarrow X$, *telle que* $u = \mathring{u} \circ \varphi$. *Le couple* (φ, Z) *est unique à un isomorphisme unique près.*

b) Pour tout K *et pour tout* b *sur* K, *on a : les deux algèbres* $C(Y,K,b)$ *et* $C(Z,K,b)$ *sont isomorphes.*

Preuve. - a) L'unicité du couple (φ, Z) à un isomorphisme unique près résulte de problèmes générales d'application universelle. Reste à prouver l'existence du couple (φ, Z). Soit K un corps valué complet n.a, et b une bornologie quelconque sur K. On met sur Y la relation d'équivalence $R : xRy \Longleftrightarrow f(x) = f(y) \ \forall f \in C(Y,K,b)$. Soit $\varphi : Y \longrightarrow \frac{Y}{R} = Z$ l'application canonique. $f \in C(Y,K,b)$ se factorise à travers Z en $f = \mathring{f} \circ \varphi$. On munit Z de la topologie initiale associée à $\{\mathring{f} / f \in C(Y,K,b)\}$. Z est alors un espace éparpillé, puisque la topologie initiale associée à $\{\mathring{f} / f \in C(Y,K,b)\}$ est séparée et admet une base d'ofs.

φ est continue, puisque $\mathring{f} \circ \varphi$ est continue pour toute $f \in C(Y,K,b)$. Soit $u : Y \longrightarrow X$ une application continue. x Ry implique $u(x) = u(y)$, puisque X est éparpillé. Donc u se factorise à travers Z en $u = \mathring{u} \circ \varphi$. $\mathring{u}$ est continue, puisque $g \circ \mathring{u} = (g \circ u)^{\circ}$ pour tout $g \in C(X,K,b)$. $\mathring{u}$ est unique, puisque φ est surjective.

b) Il suffit de considérer l'application $\psi : f \longmapsto \mathring{f}$ de $C(Y,K,b)$ dans $C(Z,K,b)$.

2.3. Les espaces of-paracompacts.

2.3.1. DEFINITION. - *On dit qu'un espace topologique séparé* X *est of-paracompact, si pour tout recouvrement ouvert de* X, *il existe un recouvrement of localement fini plus fin.*

2.3.2. PROPOSITION. - *Soit* X *un espace of-paracompact. Alors pour tout recouvrement ouvert de* X, *il existe une partition of plus fine.*

Preuve. - Soit $R = (U_j)_{j \in J}$ un recouvrement ouvert de X Il existe un recouvrement of $(X_i)_{i \in I}$ localement fini plus fin que R. On met sur I un bon ordre et on pose $Y_o = X_{i_o}, \dots, Y_\alpha = X_{i_\alpha} - \bigcup_{\xi < \alpha} Y_\xi$ pour tout ordinal α. La famille (Y_α) définit une partition of de X plus fine que R.

2.3.3. PROPOSITION. - *Pour tout recouvrement of dénombrable de* X, *il existe une partition of dénombrable plus fine.*

Preuve. - Soit $R = \{\omega_n / n \geq 1\}$ un recouvrement of de X. Posons $X_o = \omega_o, \dots, X_n = \omega_n - \bigcup_{k=1} \omega_k$. Alors la famille disjointe d'ofs $(X_n)_n$ qui ne sont pas vides est une partition of dénombrable de X plus fine que R.

2.3.4. PROPOSITION. - *Tout espace of-paracompact* X *est fortement éparpillé.*

Preuve. - Soient F_1 et F_2 deux fermés disjoints de X. Alors $\complement F_1$ et $\complement F_2$ constituent un recouvrement ouvert de X, il existe une partition of de X plus fine notée P. Pour tout $x \in F_1$ il existe un $\omega(x) \in P$, tel que $x \in \omega(x)$, et $\omega(x) \subset \complement F_2$. Posons $\omega = \bigcup_{x \in F} \omega(x)$ est un of, $\omega \supset F_1$ et $\omega \cap F_2 = \emptyset$.

2.4.5. PROPOSITION. - *Tout espace ultramétrique est of-paracompact.*

Preuve. - Soit $(O_\ell)_{\ell \in L}$ un recouvrement ouvert de X. Il existe un recouvrement of R de X plus fin, tel que $R = \{ B(x_i, \frac{1}{n}) / n_i \in N \ ; \ i \in I, x_i \in X \}$ Soit $A_n = \{ x_i / n_i = n \}$. Il est clair que $B(A_n, \frac{1}{n})$ est un of. La famille $(B(A_n, \frac{1}{n})_n)$, telle que $n \in (n_i)_{i \in I}$ est un recouvrement of dénombrable. Il existe (2.3.3) une partition of dénombrable plus fine notée $P = \{ \omega_k / k \in N \}$, telle que $\omega_k \subset B(A_{n_k}, \frac{1}{n_k})$. On considère l'espace topologique ω_k muni de la topologie induite par celle de X. Mettons sur ω_k la relation d'équivalence $R(k)$: $xR(k)y \Leftrightarrow d(x,y) < \frac{1}{n_k}$.

Soit R_k la partition of de ω_k correspondante. La famille $R' = ((R_k))_k$ est une partition of de X. R' est plus fine que R. En effet, soit $O' \in R'$. Il existe $n_k \in N$, tel que $O' \subset \omega_k$. Alors $O' \subset B(A_{n_k}, \frac{1}{n_k})$. Soit $x \in O'$, il existe $x_j \in A_{n_k}$, tel que $d(x_j, x) \leq \frac{1}{n_k}$ implique $x \in B(x_j, \frac{1}{n_k})$ ceci implique que $O' \subset B(x_j, \frac{1}{n_k})$. Donc R' est plus fine que R. Alors R' est plus fine que $(O_\ell)_{\ell \in L}$. Ainsi tout espace ultra-métrique est of-paracompact.

2.3.6. PROPOSITION. - *Tout espace ultramétrique* X *est fortement éparpillé.*

Preuve. - X est of-paracompact (2.3.5), donc X est fortement éparpillé (2.3.4).

2.3.7. PROPOSITION. - *Soit* A *une partie Lindelöf de* K ; *alors* $\bar{A}$ *est Lindelöf.*

Preuve. - Soit $R = (U_j)_{j \in J}$ un recouvrement ouvert de $\bar{A}$. $R_1 = \{R, \{\complement\bar{A}\}\}$ est un recouvrement ouvert de K. Il existe une partition of de K plus fine que R_1, notée $P = (\omega_i)_{i \in I}$. $I_1 = \{i \in I / \omega_i \cap A \neq \emptyset\}$ est dénombrable, et $\bar{A} \subset \bigcup_{i \in I_1} \omega_i$.

Donc $\bar{A}$ est Lindelöf.

2.3.8. PROPOSITION. - *La famille des parties relativement Lindelöf (resp. relativement compactes) de* K *définit une bornologie sur* K *notée* L *(resp.* P).

Preuve. - La famille des parties Lindelöf (resp. compactes) de K est stable par image continue, par adhérence dans K. De plus, une partie fermée d'un espace Lindelöf est Lindelöf.

2.3.9. PROPOSITION. - *Les quatre notions suivantes sont distinctes :*

a) X *est éparpillé ;*

b) X *est fortement éparpillé ;*

c) X *est of-paracompact ;*

d) X *est ultra-métrique.*

L'espace W ([8]) est fortement éparpillé et n'est pas of-paracompact ; le plan de Tychonoff T ([8]) est éparpillé et n'est pas fortement éparpillé. Un espace compact totalement distontinu, non métrisable est of-paracompact et non ultramétrique.

2.4. Le b-plongement.

2.4.1. DEFINITION. - *On dit qu'une partie* A *de* X *est b-plongée dans* X *si et seulement si pour toute* $f \in C(A,K,b)$, *il existe une* $h \in C(X,K,b)$ *telle que* $h|_A = f$.

2.4.2. PROPOSITION. - *Soit* $\mathcal{A}$ *une famille stable sur* X, *et soit* X *un espace* $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$ *disconnexe. Alors, pour tout* $A \in \mathcal{A}$, *on a :*

a) Chaque of ω *de* A *est la trace d'un of* Ω *de* X.

b) Chaque partition of dénombrable $(\omega_n)_{n \geq 1}$ *de* A *est la trace d'une partition of dénombrable* $(\Omega_n)_{n \geq 1}$ *de* X .

Preuve. - a) ω et $\complement_A \omega$ appartiennent à $\mathcal{A}$. Il existe alors un of Ω de X, tel que $\Omega \supset \omega$, et $\Omega \cap \complement_A \omega = \emptyset$. Alors $\Omega \cap A = \omega$.

b) Il existe une famille dénombrable d'ofs $(\Omega_n)_{n \geq 1}$ telle que $\Omega_n \cap A = \omega_n$; $n \geq 1$(a) . Posons $X_1 = \Omega_1$, $X_2 = \Omega_2 \cup \complement \Omega_1$,..., $X_n = \Omega_n \cup \left[\bigcup_{k=1}^{n-1} \complement \Omega_k\right]$,... la famille $(X_n)_{n \geq 1}$ est un recouvrement of dénombrable de X. On pose $Y_1 = X_1$, $Y_2 = X_2 - Y_1$,..., $Y_n = X_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} Y_k$,...

la famille $(Y_n)_{n \geq 1}$ est une partition dénombrable de X. $Y_n \cap A = \omega_n$; $n \geq 1$.

2.4.3. PROPOSITION. - *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) X *est* $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$ *disconnexe.*

b) Pour tout $A\in\mathcal{A}$, *pour toute* $f\in C(A,K,L)$; $\|f\| = \sup_{x\in X}|f(x)|<+\infty$, *il existe une* $h\in C(X,K,L)$, *telle que* $h_{|A} = f$.

Preuve. - a) $\Rightarrow$ b) On peut supposer que $\|f\|_A \leq 1$. Si K est discret, la famille $(y)_{y\in f(A)}$ est une partition of dénombrable de f(A), puisque f(A) est Lindelöf, et par suite $(f^{-1}(y))_{y\in f(A)}$ est une partition of dénombrable $(\omega_n)_{n\geq 1}$ de A, il existe une partition of dénombrable $(\Omega_n)_{n\geq 1}$ de X telle que $(\Omega_n\cap A) = \omega_n$; $n\geq 1$. Soit $h = \sum_{n\geq 1} f(x(\omega_n)).1_{\Omega_n}$; $x(\omega_n)\in\omega_n$; $n\geq 1$. Alors $h\in C(X,K,L)$, et $h|_A = f$. Si K n'est pas discret, il existe un $\lambda\in K$; $0<|\lambda|<1$. Mettons sur K la relation d'équivalente R : $xRy \Longleftrightarrow |x-y|\leq|\lambda| = \alpha$. Soit P la partition of de K correspondante à R. $P\cap\overline{f(A)}$ est une partition of dénombrable de $\overline{f(A)}$. $f^{-1}[P\cap\overline{f(A)}]$ est une partition of dénombrable de A, qui est la trace d'une partition of dénombrable P de X (2.4.2). Soit $f_o = \sum_{n=1}^{\infty} f(x(\omega_n)).\ 1_{\Omega_n}$; $x(\omega_n)\in\Omega_n\cap A$ pour tout $\Omega_n\in P$. Alors $f_o\in C(X,K,L)$, $\|f_o\|_X\leq 1$, et $\|f-f_{o|A}\|\leq\alpha$. Posons $\varphi = \lambda^{-1}(f-f_{o|A})$. Le même raisonnement montre qu'il existe $f_1\in C(X,K,L)$, telle que $\|f_{1|A}-\varphi\|\leq\alpha$, et $\|f_1\|_X\leq 1$. Alors $\|f-f_{o|A}-\lambda f_{1|A}\|\leq\alpha^2$. On répète le même raisonnement pour tout $n\in N$ et on pose :

$h = \sum_{n=o}^{\infty}\lambda^n f_n.h\in C(X,K,L)$, $\|h|_A-f\| = 0$. Donc $h_{|A} = f$. ($f(X)\in L$, puisque $f_n(X)\subset\{o\}\cup f(A)$; $n\geq 0$).

b) $\Rightarrow$ a) Soient A_1 et $A_2\in\mathcal{A}$, tels que $A_1\cap A_2 = \emptyset$. Soit $h\in C(A_1\cup A_2,K,L)$, telle que h = 1 sur A_1 et h = 0 sur A_2. Il existe $f\in C(X,K,L)$, telle que $f|_{A_1\cup A_2} = h$. Donc A_1 et A_2 sont disconnexes. Donc X est $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}$ disconnexe.

2.4.4. PROPOSITION. - *Supposons que* X *soit* $\mathcal{A}$ - $\mathbb{F}$ *disconnexe. Alors pour tout* K, *et pour tout* $A\in\mathcal{A}$, *on a :* A *est* L *-plongée dans* X.

Preuve. - Soit $f \in C(A,K,L)$ telle que $\|f\| = +\infty$. On pose

$$\omega_1 = \{x \in A / \ |f(x)| \leq 1\} , \ \omega_2 = A - \omega_1 , \ f_1 = 1_{\omega_2} + f.1_{\omega_1}$$

et $f_2 = 1_{\omega_1} + f.1_{\omega_2}$. Alors $f = f_1.f_2$. Il existe $h_1 \in C(X,K,L)$,

telle que $h_1|_A = f_1$ (2.4.3). Posons $g_2 = \frac{1}{f_2}$, il existe $h_2 \in C(X,K,L)$,

telle que $h_2|_A = g_2 = \frac{1}{f_2}$. Posons $A_1 = h_2^{-1}(0)$. $A_1 \cap A = \emptyset$. Il existe

un of ω dans X, tel que $A_1 \subset \omega$, et $A \cap \omega = \emptyset$. La fonction $h_3 = \frac{1}{1_\omega + h_2 . 1_{\complement\omega}}$

appartient à $C(X,K,L)$, puisque $[h_3(X)]^{-1} \subset [f(X)]^{-1}$, et $([f(X)]^{-1}) \in b[5]$

Posons $h = h_1.h_3$. Alors $h|_A = h_1|_A . h_3|_A = f_1.f_2 = f$.

2.4.5. COROLLAIRE 1. - *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) X *est fortement éparpillé*

b) Pour tout K*, chaque fermé de* X *est* L*-plongé dans* X.

2.4.6. COROLLAIRE 2. - *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) X *est éparpillé*

b) X *est* $\mathcal{K}$ - $\mathcal{F}$ *disconnexe* (X *est séparé).*

c) Chaque compact de X *est* L*-plongé dans* X*, pour tout* K

(X *est séparé).*

2.4.7. THEOREME (Urysohn). - $A \subset X$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) 2 parties B *et* C *de* A ***disconnexes*** *dans* A ***sont disconnexes*** *dans* X.

b) 2 ofs disjoints de A *sont contenus dans deux ofs disjoints de* X.

c) Pour tout K*,* A *est* L*-plongée dans* X .

Preuve. - a $\Leftrightarrow$ b trivial.

b $\Rightarrow$ c Il suffit de reprendre la même démonstration que dans (2.4.3., a) $\Rightarrow$ b), en remarquant que toute partition of dénombrable de A est la trace d'une partition of dénombrable de X puisque deux ofs disjoints de A sont disconnexes dans X .

c) $\Rightarrow$ b) Soient ω_1 et ω_2 deux ofs disjoints de A. $1_{\omega_1} \in C(A,K,L)$, il existe $h \in C(X,K,L)$, telle que $h|_A = 1_{\omega_1}$, et par suite $h = 1$ sur ω_1 et $h = 0$ sur ω_2. Posons $\Omega_1 = \{x \in X / h(x) < \frac{1}{2}$, et $\Omega_2 = X - \Omega_1$, il est clair que Ω_1 et Ω_2 vérifient la condition.

3. LES STRUCTURES ULTRA-UNIFORMES

3.1. Définitions et quelques propriétés.

3.1.1. DEFINITION. - *Une structure uniforme sur un espace uniforme* $(X, \mathcal{U})$ *est dite ultra-uniforme si elle admet une base d'entourages* $\mathbb{B}$ *qui vérifie la relation :*

$$v^2 = v \qquad \forall v \in \mathbb{B} \qquad (1)$$

X est dit dans ce cas un espace ultra-uniforme.

La base $\mathbb{B}$ *peut être choisie symétrique.*

Alors on suppose dans la suite que $\mathbb{B}$ *vérifie la relation*

$$v^2 = v = \overset{-1}{v} \qquad \forall v \in \mathbb{B} \qquad (1')$$

3.1.2. PROPOSITION. - *Soient* $(Y_i)_{i \in I}$ *uune famille d'espaces ultrauniformes, telle que la structure ultra-uniforme* $\mathcal{U}_i$ *de* Y_i *;* $i \in I$ *admette une base* $\mathbb{B}_i$ *vérifiant (1'),* $(f_i)_{i \in I}$ *une famille de fonctions d'un ensemble X dans* Y_i, $i \in I$, *telles que* $f_i : X \to Y_i$; $i \in I$. *Alors la structure uniforme initiale associée à* $(f_i)_{i \in I}$ *est ultra-uniforme.*

Preuve. - On désigne par $\mathcal{J}$ une partie finie de I, v_i un entourage de $\mathbb{B}_i$, et $g_i = f_i \times f_i$. D ns ces conditions, il suffit de démontrer que $\left[\bigcap_{i \in \mathcal{J}} \overset{-1}{g_i}(v_i)\right]^2 = \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \overset{-1}{g_i}(v_i)$. Soit $(x,y) \in \left[\bigcap_{i \in \mathcal{J}} \overset{-1}{g_i}(v_i)\right]^2 \Rightarrow \exists z \in X$, tel que $(f_i(x), f_i(z)) \in v_i$, et $(f_i(z), f_i(y)) \in v_i$, $i \in \mathcal{J}$. Alors $(f_i(x), f_i(y)) \in v_i^2 = v_i$; $i \in \mathcal{J} \longrightarrow (x,y) \in \overset{-1}{g_i}(v_i)$; $i \in \mathcal{J} \to (x,y) \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \overset{-1}{g_i}(v_i)$.

Et par suite $\left[\bigcap_{i \in \mathcal{J}} \overset{-1}{g_i}(v_i)\right] = \left[\bigcap_{i \in \mathcal{J}} \overset{-1}{g_i}(v_i)\right]^2$.

3.1.3. COROLLAIRE. - *a) La borne supérieure d'une famille quelconque de structures ultra-uniformes sur un ensemble* X *est ultra-uniforme.*

b) Le produit d'une famille quelconque d'espaces ultrauniformes est ultra-uniforme.

c) Chaque sous-espace d'un espace ultra-uniforme est ultra-uniforme.

3.1.4. PROPOSITION. - *Si* $v^2 = \overset{-1}{v} = v$. *Alors la relation* R(v) *sur* X, *telle que* $xR(v)y \Longleftrightarrow (x,y) \in v$ *est une relation d'équivalence. La partition* P(v) *correspondant à* R(v)*est une partition of.*

3.2. Structures ultra-unifommes et ultra-écarts.

3.2.1. DEFINITION. - *On dit qu'un écart* d *sur* X *est un ultra-écart si et seulement si* $d(x,y) \leqslant \mathrm{Max}\left[d(x,z);\ d(z,y)\right] \forall\, x,y\ ,\ z \in X$

3.2.2. PROPOSITION. *a) Chaque ultra-écart* d *sur* X *définit une structure ultra-uniforme sur* X .

b) Toute famille d'ultra-écarts sur X *définit une structure ultra-uniforme sur* X .

Preuve. - a) $B(d,\alpha) = \{(x,y) \in X \times X / d(x,y) \leqslant \alpha\} = [B(d,\alpha)]^2$, puisqu'on a la relation (2).

b) C'est un cas particulier de (3.1.3).

3.2.3. PROPOSITION.-*Pour tout* $v \in \mathbb{B}$, *l'application caractéristique de* $\complement v$ *dans* R *définit un ultra-écart* d_v *comme suit :*

$$d_v(x,y) = 1_{\complement v}(x,y)\ ;\ x,\ y \in X.$$

3.2.4. THEOREME. - *Pour qu'une structure uniforme sur* X *soit ultra-uniforme, il faut et il suffit, qu'elle soit définie par une famille d'ultra-écarts.*

Preuve. - La condition est nécessaire, il suffit de considérer la famille $(d_V)_{V\in \mathcal{B}}$.

La proposition (3.2.2) dit que la condition est suffisante.

3.2.5. THEOREME. - *Pour qu'une structure uniforme $\mathcal{U}$ soit définie par un seul ultra-écart, il faut et il suffit qu'elle admette une base dénombrable d'entourages*

$$B = \left\{ V_n / n \in N \ , \ V_n^2 = V_n = \overset{-1}{V_n} \right\}.$$

Preuve. - La condition est nécessaire. Soit d l'ultra-écart qui définit $\mathcal{U}$. Il est clair que le famille $B(d,\frac{1}{n})$; $n \in N$ est une base dénombrable d'entourages de $\mathcal{U}$ vérifiant (1').

La condition est suffisante. On pose $d = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} d_{V_n}$, en supposant que la suite $(V_n)_{n\in N}$ soit décroissante. d est un écart (évident). d est ultra-écart. En effet, soit x,y, z $\in$ X. Posons

$n(x,y) = \sup \left\{ n/(x,y) \in V_n \right\}$. Alors

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} d_{V_n}(x,y) = \sum_{n=0}^{n(x,y)} 2^{-n} d_{V_n}(x,y) + \sum_{n=n(x,y)+1}^{\infty} 2^{-n} d_{V_n}(x,y) = 2^{-n(x,y)}.$$

$n(x,y) \geqslant \inf[n(x,z), n(z,y)]$, puisque $V_n^2 = V_n$; $n \in N$. Alors

$$d(x,y) = 2^{-n(x,y)} \leqslant \sup[2^{-n(x,z)}, 2^{-n(z,y)}] \leqslant \sup[d(x,z), d(z,y)].$$

Enfin d définit la structure ultra-uniforme $\mathcal{U}$, puisque $V_n = B(d, 2^{-n})$. En effet, $(x,y) \in V_n$ implique $d(x,y) \leqslant 2^{-n}$ et $d(x,y) \leqslant 2^{-n}$ implique $n(x,y) \geqslant n$.

3.2.6. COROLLAIRE. - *Soit X un espace ultra-uniforme écartisable. Alors X est ultra-écartisable.*

3.3. Le complété d'un espace ultra-uniforme.

3.3.1. PROPOSITION. - *a) Si la structure ultra-uniforme* $\mathcal{U}$ *de* X *est définie par la famille d'ultra-écarts* $(d_i)_{i\in I}$, *alors les ultra-écarts* d_i *se prolongent par continuité uniforme en des ultra-écarts* $\hat{d}_i$ *sur* $\hat{X}$ *qui définissent la structure ultra-uniforme de* $\hat{X}$.

b) le complété $\hat{X}$ *d'un espace ultra-métrisable* X *est un espace ultra-métrisable.*

3.3.2. DEFINITION. - *On appelle of-filtre sur un espace topologique* X *tout filtre* $\mathbb{F}$ *qui admet une base d'ofs.*

3.3.3. PROPOSITION. - *Soit* X *un espace ultra-uniforme. Pour tout filtre de Cauchy* $\mathbb{F}$ *sur* X, *l'unique filtre de Cauchy minimal* $\mathbb{F}_o$ *moins fin que* $\mathbb{F}$ *est un of-filtre.*

Preuve. - Le filtre $\mathbb{F}_o$ admet comme base les ensembles v(A), lorsque A décrit une base de $\mathbb{F}$ (ou $\mathbb{F}$) et v décrit $\mathbb{B}$. Voir [1] . Donc il suffit de prouver que v(A) est un of, pour tout $v\in\mathbb{B}$ et tout $A\in\mathbb{F}$.

$y\in \bigcup_{x\in A} v(x) \implies v(y)\wedge(\bigcup_{x\in A} v(x))\neq\emptyset \implies \exists\, z\in v(y)\wedge(\bigcup_{x\in A} v(x)) \implies \exists x_o\in A$,

tel que $z\in v(y)\cap v(x_o) \implies v(y)\subset v(x_o)$, puisque $z_1\in v(y) \implies (z_1,y)\in v,(y,z)\in v$, et $(z,x_o)\in v \implies (z,x_o)\in v \implies z_1\in v(x_o)$. D'où $\overset{o}{\overline{v(A)}} = v(A) = \overline{v(A)}$.

3.3.4. THEOREME. - *Le complété séparé* $\tilde{X}$ *de l'espace ultra-uniforme* X *vérifie les propriétés suivantes :*

a) $\tilde{X}$ *est un espace ultra-uniforme* .

b) $(\tilde{X},i)$ *est solution du problème universel des applications uniformément continues des espaces ultra-uniformes* X *dans les espaces ultra-uniformes complets séparés quelconques.*

3.4. Les structures ultra-uniformes compatibles.

3.4.1. PROPOSITION. - *Soit* X *un espace topologique ; pour qu'il existe une structure ultra-uniforme* $\mathcal{U}$ *compatible sur* X, *il faut et il suffit que la topologie admette une base d'ofs.*

Preuve. - a) $v(x)$ est un of. Voir (3.3.3. preuve).

b) la condition est suffisante. Il suffit de considérer par exemple, la structure ultra-uniforme définie par $C(X,K,b)$. Cette structure ultra-uniforme sera étudiée dans la section (5).

3.4.2. PROPOSITION. - *Soit* $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ *une famille de structures ultra-uniformes compatibles sur* X. *Alors leur borne supérieure est compatible.*

Preuve. - La topologie associée à la borne supérieure est la borne supérieure des topologies associées à $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$, qui est celle de X.

3.4.3. DEFINITION. - *La proposition nous permet de définir la structure ultra-uniforme universelle comme étant la borne supérieure de toutes les structures ultra-uniformes compatibles.*
On note dans la suite cette structure ultra-uniforme par θ_1 *et son complété par* $\theta_1 X$.

3.4.4. COROLLAIRE. - *a) La structure ultra-uniforme universelle* θ_1 *est compatible.*

b) la structure ultra-uniforme universelle est définie par tous les ultra-écarts continus sur $X \times X$.

3.4.5. PROPOSITION. - *Il existe une seule structure uniforme compatible sur un espace compact totalement discontinu. Cette structure uniforme est ultra-uniforme.*

3.4.6. PROPOSITION. - *Soit* (X,d) *un espace métrique compact totalement discontinu. Alors il existe sur* X *une ultra-distance* d_1 *équivalente à* d.

Preuve. - C'est un corollaire de (3.2.6.).

4. LES STRUCTURES ULTRA-UNIFORMES $\mathcal{U}_\beta$ ET LES ESPACES α-COMPACTS

4.1. Les structures ultra-uniformes $\mathcal{U}_\beta$.

4.1.1. NOTATIONS. -

a) X désigne un espace topologique éparpillé.

b) P désigne une partition of de X .

c) $\bar{P}$ désigne toutes les partitions of de X.

d) α, β, γ désignent des ordinaux quelconques .

e) χ_α désigne le cardinal aleph α.

f) Card(P) désigne le cardinal de $\{\omega/\omega \in P\}$.

g) 1. $P_0 = \{P \in \bar{P}/\mathrm{Card}(P) < \chi_0\}$,

2. $P_1 = \{P \in \bar{P}/\mathrm{Card}(P) < \chi_1\}$,

....

$P_\beta = \{P \in \bar{P}/\mathrm{Card}(P) < \chi_\beta\}$,

....

h) $v(P) = \bigcup\limits_{\omega \in P} \omega \times \omega$.

4.1.2. PROPOSITION. - *Pour chaque espace X, il existe un plus petit ordinal α, tel que $P_\alpha = \bar{P}$. On dit dans ce cas que X est α-précompact.*

Preuve. - On pose $a = \sup\{\mathrm{Card}(P)/P \in \bar{P}\}$, $\beta = \sup\{\xi/\mathrm{Card}(\xi) < a\}$. Alors $a = \chi_\beta$ (voir [6, page 125]). Si $\mathrm{Card}(P) < \chi_\beta$ pour tout $P \in \bar{P}$, on pose $\alpha = \beta$, et on pose $\alpha = \beta + 1$ dans le cas contraire.

4.1.3. DEFINITION. - *Soit X un espace ultra-uniforme, et soit $\mathcal{U}$ la structure ultra-uniforme de X. On dit que $\mathcal{U}$ est β-précompact si et seulement si pour tout $v \in \mathcal{B}$, on a :*

$$\mathrm{Card}(P(v)) < \chi_\beta .$$

4.1.4. THEOREME. - *Soit X un espace éparpillé. Alors chaque P_β définit une structure ultra-uniforme compatible sur X notée $\mathcal{U}_\beta$.*

Preuve. - a) Pour tout $p \in P_\beta$ on a : $\Delta \subset v(P)$.

b) Quels que soient P et P' de P_β on a :

$$v(P \cap P') \subset v(P) \wedge v(P), \ P \wedge P' \in P_\beta .$$

c) Pour tout $P \in P_\beta$, on a : $v(P) = [v(P)]^{-1}$.

d) $v(P) = [v(P)]^2$, pour tout $P \in P_\beta$.

Alors la famille $(v(P))_{P \in P_\beta}$ définit une base d'une structure ultra-uniforme $\mathcal{U}_\beta$ sur X. $\mathcal{U}_\beta$ est compatible, puisque pour tout $P \in P_\beta$ et pour tout $x \in X$, il existe un seul $\omega_x \in P$, tel que $x \in \omega_x$, et $v(P)\ (x) = \omega(x)$, de plus pour tout of ω de X la partition of $(\omega, \complement\omega) \in P_\beta$, pour tout β.

4.1.5. THEOREME. - *$\mathcal{U}_\beta$ est la plus fine structure ultra-uniforme β-précompacte, compatible avec la topologie de l'espace éparpillé* X.

Preuve. - Soit $\mathcal{U}$ une structure ultra-uniforme compatible avec la topologie de l'espace éparpillé X. Alors pour tout $v = v^2 = \bar{v}^1 \in \mathcal{U}$, on a : $P(v) \in P_\beta$, et $v(P(v)) = v$. Donc $\mathcal{U}_\beta$ est plus fine que $\mathcal{U}$.

4.1.6. THEOREME. - *La structure ultra-uniforme universelle est exactement la structure ultra-uniforme sur l'espace éparpillé* X, *définie par* $\bar{P}$.

Preuve. - $\bar{P}$ définit une structure ultra-uniforme $\mathcal{U}$ compatible sur X, qui est d'ailleurs α-précompacte puisque $\bar{P} = P_\alpha$, si on suppose X α-précompact (4.1.2). $\mathcal{U}$ est plus fine que toute autre structure ultra-uniforme $\mathcal{U}'$ compatible sur X. En effet, soit $v = v^2 = \bar{v}^1 \in \mathcal{U}'$. $P(v) \in \bar{P}$ et $v(P(v)) = v \in \mathcal{U}$. Donc $\mathcal{U}$ est plus fine que $\mathcal{U}'$ et, par suite, $\mathcal{U}$ est la structure ultra-uniforme universelle.

4.1.6. THEOREME. - *Pour chaque espace éparpillé* X, *il existe un plus petit ordinal* α *tel que* X *soit* α*-précompact et la structure ultra-uniforme universelle soit* α*-précompacte.*

4.2. Les filtres de Cauchy pour les $\mathcal{U}_\beta$.

4.2.1. DEFINITION. - *Soit* $\mathbb{F}$ *un of-filtre sur* $\mathcal{X}$*(3.3.2). On dit que* $\mathbb{F}$ *est un* β*-of-filtre, si et seulement si pour toute* $P \in P_\beta$ *, il existe un* $\omega \in P$ *tel que* $\omega \in \mathbb{F}$ *. Ceci revient à dire que* $\mathbb{F}$ *est un of-filtre de Cauchy pour* $\mathcal{U}_\beta$*. De plus, un* β*-of-filtre est un of-filtre maximal, et il est filtre de Cauchy pour toute* $\mathcal{U}_\gamma$*, avec* $\gamma \leq \beta$.

4.2.2. DEFINITION. - *On appelle* δ*-of-filtre sur* X *tout of-filtre maximal* $\mathbb{F}$ *sur* X *tel que* $\mathbb{F} = \bigcap_{n\geq 1} \omega_n \neq \emptyset$ *, pour toute famille dénombrable* $(\omega_n)_{n\geq 1}$ *d'éléments de* $\mathbb{F}$.

4.2.3. PROPOSITION. - *Pour un of-filtre* $\mathbb{F}$*, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathbb{F}$ *est un filtre de Cauchy pour* $\mathcal{U}_1$ *(1-of-filtre).*

b) $\mathbb{F}$ *est un* δ*-of-filtre.*

Preuve. - a)$\Longrightarrow$b) Supposons que $\mathbb{F}$ ne soit pas un δ-of-filtre. S'il n'est pas maximal ce n'est pas un 1-of-filtre. S'il est maximal, il existe une suite $(\omega_n)_{n\geq 0}$ strictement décroissante, telle que $\omega_n \in \mathbb{F}$. pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\omega_0 = X$, $\bigcap_{n\geq 0} \omega_n = \emptyset$. On pose : $X_1 = X - \omega_1$, $X_2 = X_1 - \omega_2, \ldots, X_n = X_{n-1} - \omega_n, \ldots$. Il est clair que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une partition of P de X ; $P \in P_1$. $X_n \notin \mathbb{F}$; $n \geq 1$. Donc $\mathbb{F}$ n'est pas de Cauchy pour $\mathcal{U}_1$.

b)$\Longrightarrow$a) Supposons que $\mathbb{F}$ n'est pas un 1-of-filtre. Il existe $P \in P_1$, telle que pour tout $\omega \in P$, on a : $\omega \notin \mathbb{F}$. Si $\mathbb{F}$ est maximal $\complement\omega \in \mathbb{F}$, et $\bigcap_{\omega\in P} \complement\omega = \complement \bigcup_{\omega\in P} = \emptyset$. Alors F n'est pas un δ-of-filtre. Si $\mathbb{F}$ n'est pas maximal, alors $\mathbb{F}$ n'est pas un δ-of-filtre.

4.3. Les fonctions β-additives.

4.3.1. NOTATIONS.

a) $\bar{2}$ désigne le corps à 2 éléments $\{0,1\}$.

b) $of(X) = \{\omega / \omega \subset X,\ \omega \text{ est un of}\}$.

4.3.2. DEFINITION. - *On dit qu'une fonction* $\varphi : of(X) \to \bar{2}$ *est* β*-additive, si et seulement si :*

a) $\varphi(\emptyset) = 0$.

b) $\varphi(X) = 1$.

c) Pour tout $P \in P_\beta$ *, il existe un* $\omega_0 \in P$ *, tel que* $\varphi(\omega_0)=1$*, et pour tout* $\omega \in P$ $\omega \neq \omega$, $\varphi(\omega) = 0$.

4.3.3. PROPOSITION. *Il y a une correspondance bijective entre les fonctions* β*-additives sur* $of(X)$*, et les* β*-of-filtres sur* X

Preuve.- Soit $\mathbb{F}$ un β-of-filtre sur X. On pose $\varphi(\mathbb{F}) : of(X) \mapsto \bar{2}$ l'application, telle que $\varphi(\mathbb{F})(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in \mathbb{F}, \\ 0 \text{ si } \omega \notin \mathbb{F}. \end{cases}$

Alors : a) $\varphi(\mathbb{F})(\emptyset) = 0$, puisque $\emptyset \notin \mathbb{F}$.

b) $\varphi(\mathbb{F})(X) = 1$, puisque $X \in \mathbb{F}$.

c) Pour tout $P \in P_\beta$, il existe un seul $\omega_0 \in P$, tel que $\omega_0 \in \mathbb{F}_0$, qui satisfait alors la condition c) ci-dessus.

Réciproquement, soit φ une application β-additive. On pose $\mathbb{F}(\varphi) = \{A \subset X / \exists\, \omega \in of(X)\ ;\ A \supset \omega\ ,\ \text{et } \varphi(\omega) = 1\}$.
$\mathbb{F}(\varphi)$ est un β-of-filtre (évident). Il est clair que $\mathbb{F} \mapsto \varphi(\mathbb{F})$ et $\varphi \mapsto \mathbb{F}(\varphi)$ sont deux applications réciproques l'une de l'autre.

4.3.4. PROPOSITION. - *Les filtres de Cauchy minimaux sur* X *pour la structure ultra-uniforme* $\mathcal{U}_\beta$ *définie par* $\mathbf{P}_\beta$ *sont exactement les* β *-of-filtres sur* X.

Preuve. - Tout filtre de Cauchy pour $\mathcal{U}_\beta$, minimal, est un of-filtre (3.3.3), donc un β-of-filtre (4.2.1). Réciproquement, il suffit de montrer que deux β-of-filtres distincts sont incomparables. Or les β-of-filtres sont des of-filtres maximaux.

4.3.5. COROLLAIRE. - *Le complété séparé de* X *pour* $\mathcal{U}_\beta$, *la structure ultra-uniforme définie par* P_β, *est exactement l'espace des* β*-of-filtres sur* X, *c'est exactement l'espace des fonctions* β*-additives de* $of(X)$ *dans* $\bar{2}$.

Preuve. - Trivial.

4.3.6. COROLLAIRE. - *Soit* X *un espace éparpillé* α*-précompact. Alors son séparé complété ultra-universel est exactement l'espace des fonctions* α*-additives de* $of(X)$ *dans* $\bar{2}$, *c'est exactement l'espace des* α*-of-filtres sur* X .

Preuve. - Trivial.

4.4. Les espaces α-compacts.

4.4.1. DEFINITION.- *On dit qu'un espace* X *est* α*-compact si et seulement si :*

a) X *est* α*-précompact (4.1.2).*

b) X *est complet pour sa structure ultra-uniforme universelle* $\theta_1 = \mathcal{U}_\alpha$.

4.4.2. LEMME. - *Soit* $\hat{X}_\beta$ *le complété de* $(X, \mathcal{U}_\beta)$. *Soit* $P \in P_\beta$, *alors* $\hat{P} = \{\bar{\omega}^\beta \,/ \omega \in P\}$ *est une partition of de* $\hat{X}_\beta$, *telle que* $\hat{P}_\wedge X = P$.

Preuve. - Soit $\omega_0 \in P$. 1_{ω_0} est uniformément continue pour $\mathcal{U}_\beta$, donc se prolonge en l'application caractéristique de $\bar{\omega}_0^\beta$, qui est donc un of de $\hat{X}_\beta$. Comme $\bigcup_{\omega \in P, \omega \neq \omega_0} \bar{\omega}^\beta \subset \overline{\bigcup \omega}^\beta = [\bar{\omega}_0^\beta$, on en déduit que les $\bar{\omega}^\beta$; $\omega \in P$ sont deux à deux disjoints. $\hat{P}$ est un recouvrement de $\hat{X}_\beta$ (définition 4.3.2. et corollaire 4.3.5).

4.4.3. PROPOSITION. - *L'application* $P \mapsto \hat{P}$ *est une bijection de* $P_\beta(X)$ *sur* $P_\beta(\hat{X}_\beta)$.

Preuve. - Voir (4.4.2).

4.4.4. COROLLAIRE. - *Pour tout espace X éparpillé et pour tout ordinal* β *;* $0 \leq \beta \leq \alpha$ *(4.1.2), la structure ultra-uniforme du complété* $\hat{X}_\beta$ *est exactement la structure* $\mathcal{U}_\beta$ *sur l'espace éparpillé* $\hat{X}_\beta$.

4.4.5. COROLLAIRE. - $\hat{X}_\beta$ *est un espace éparpillé complet pour sa structure ultra-uniforme* $\mathcal{U}_\beta$.

4.4.6. THEOREME. *Soit X un espace* α*-précompact (4.1.2). Alors* $\theta_1 X$*, le séparé complété de* X *pour* $\mathcal{U}_\alpha = \theta_1$ *, est un espace* α*-compact.*

Preuve. - $\theta_1 X$ est complet pour $\mathcal{U}_\alpha$ (4.4.5) . $\theta_1 X$ est α-précompact (4.4.3). Alors $\theta_1 X$ est α-compact.

4.4.7. PROPOSITION. - *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) X est 0-compact .

b) X est un compact totalement discontinu.

Preuve. - a) $\Longrightarrow$ b) Soit $\mathbb{F}$ un ultra-filtre sur X. Alors $\mathbb{F}$ est un filtre de Cauchy pour $\mathcal{U}_0$, donc $\mathbb{F}$ est convergent, et par suite X est compact totalement discontinu.

b) $\Longrightarrow$ a) X est éparpillé [10, p. 128] , X est 0-précompact (évident) et il est complet pour $\mathcal{U}_0$.

4.4.8. PROPOSITION. - *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) X est of-paracompact, et 1-compact.

b) X est Lindelöf (X est éparpillé).

Preuve. - a) $\Longrightarrow$ b) Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X, il existe une partition of dénombrable plus fine. Donc X est Lindelöf.

b) $\Longrightarrow$ a) X est 1-précompact (évident), X = $\theta_1 X$ (5.7.9.). X est of-paracompact (2.3.3).

5. LES ESPACES $\delta^b X$ ET LA STRUCTURE ULTRA-UNIFORME UNIVERSELLE.

5.1. Parties uniformément équicontinues de $\mathcal{U}(X,K,b)$.

5.1.1. DEFINITION. - *On appelle transformation de Dirac l'application qui à* $x \in X$ *fait correspondre* ε_x, *tel que* $\varepsilon_x(f) = f(x)$, *pour toute application* f *de* X *dans* K.

5.1.2. DEFINITIONS. - *Soit* H *une partie de* $\mathcal{U}(X,K,b)$. *Alors :*

a) On dit que H *est simplement bornée, si et seulement si* $\sup_{f\in H} |f(x)| < +\infty$.

b) On dit que H *est uniformément équicontinue, si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $v \in \mathcal{U}$, *tel que* $(x,y) \in v$ *entraîne* $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$, *pour tout* $f \in H$.

c) On associe à chaque partie H *simplement bornée l'ultra-écart fini* d_H , *tel que* $d_H(x,y) = \sup_{f\in H} |f(x) - f(y)|$.

5.1.3. PROPOSITION. - *Soit* H *une partie de* $\mathcal{U}(X,K,b)$ *simplement bornée. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) H *est uniformément équicontinue.*

b) d_H *est uniformément continue sur* $X \times X$.

Preuve. - a) $\Longrightarrow$ b) Soit $\varepsilon > 0$, il existe $v \in \mathcal{U}$, tel que $(x,y) \in v$ entraîne $\sup_{f\in H} |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Soit $\mathcal{U} = \{((x_1,x_2),(y_1,y_2))/(x_1,y_1) \in v,(x_2,y_2) \in v\}$ l'entourage dans $(X,X)^2$. Alors

$|d_H(x_1,x_2) - d_H(y_1,y_2)| \leq d_H(x_1,x_2) + d_H(y_1,y_2) \leq \varepsilon$, pour tout $((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \in \mathcal{U}$.

b) $\Longrightarrow$ a) Trivial.

5.1.4. PROPOSITION. - *Soit* b *la bornologie de toutes les parties de* K . *Alors, pour toute partie uniformément équicontinue* H *de* $\mathcal{U}(X,K,b)$, *l'adhérence* $\bar{H}^s$ *de* H *dans l'espace produit de toutes les fonctions définies sur* X *(muni de la topologie de la convergence simple)*

est uniformément équicontinue, donc contenue dans $\mathcal{U}(X,K,b)$.
En particulier, une fonction f, *limite simple d'une famille* $(f_i)_{i\in I}$ *uniformément équicontinue est uniformément continue.*
De plus, si H *est simplement bornée, alors* $\bar{H}^s$ *est aussi simplement bornée, et*

$$d_{\bar{H}^s} = d_H .$$

Preuve. - Fixons $\varepsilon>0$; soit $v\in\mathcal{U}$ l'entourage de $\mathcal{U}$ associé à (H,ε) Pour tout $(x,y)\in v$, l'application de K^X dans R définie par $|f(x)-f(y)|$ est uniformément continue. Il en résulte que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ pour toute $f\in\bar{H}^s$, puisque cette condition est satisfaite pour toute $f\in H$. Pour les mêmes raisons, on a lorsque H est de plus simplement bornée $d_{\bar{H}^s}\leq d_H$, d'où $d_{\bar{H}^s} = d_H$ puisque $H\subset\bar{H}^s$.

5.1.5. DEFINITION. - *Pour chaque famille* $(f_i)_{i\in I}$ *d'idempotents de* $\mathcal{U}(X,K,b)$, *on pose :*

a) $f = \sup\limits_{i\in I} f_i$ *telle que* $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x\in\bigcap\limits_{i\in I} Z(f_i) , \\ 1 \text{ ailleurs} ;\end{cases}$

b) $h = \inf\limits_{i\in I} f_i$, *telle que* $h(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x\in\bigcap\limits_{i\in I} coZ(f_i) , \\ 0 \text{ ailleurs} ;\end{cases}$

$$Z(f) = f^{-1}(o), \qquad coZ(f) = X-Z(f).$$

5.1.6. PROPOSITION. - *Soit* f *un idempotent de* K^X. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $f\in\mathcal{U}(X,K,b)$.

b) $v(f) = [Z(f)^2 \cup (\complement Z(f))^2] \in\mathcal{U}$.

Preuve. - a)$\Longrightarrow$b) puisque $(f\times f)^{-1}[B(|.|,\frac{1}{2})] = v(f)$
b)$\Longrightarrow$a) puisque $(f\times f)(v(f))\subset\Delta^2$, la diagonale de K^2.

5.1.7. PROPOSITION. - *Soient* f_1, f_2 *deux idempotents de* $\mathcal{U}(X,K,b)$.
Alors on a :

a) $f_1.f_2\in\mathcal{U}(X,K,b)$.

b) $\sup(f_1,f_2)\in\mathcal{U}(X,K,b)$.

Preuve. - a) $f_1 \cdot f_2 = f_1 + f_2 - \sup(f_1, f_2)$. Donc il suffit de démontrer b).

b) $v(f_1) \cap v(f_2) \subset v(\sup(f_1, f_2))$. En effet, si $(x,y) \in v(f_1) \cap v(f_2)$, et $(x,y) \in [Z(f_1)]^2 \wedge [Z(f_2)]^2$, alors $(x,y) \in v(\sup(f_1,f_2))$. Si $(x,y) \in v(f_1) \cap v(f_2)$ et $(x,y) \in [\complement Z(f_1)]^2$, par exemple, alors $(x,y) \in [\complement Z(f_1) \cap Z(f_2)]^2$ et par suite $(x,y) \in v(\sup(f_1,f_2))$.

5.1.8. PROPOSITION. - *Soit* $(f_i)_{i \in I}$ *une famille d'idempotents de* $\mathcal{U}(X,K,b)$ *uniformément équicontinue. Si* $\mathbb{F}(I) = \{ \mathcal{J} \subset I / \mathcal{J}$ *est fini*$\}$. *Alors :*

a) La famille $(f_{\mathcal{J}})_{\mathcal{J} \in \mathbb{F}(i)}$, *telle que* $f_{\mathcal{J}} = \sup_{i \in \mathcal{J}} f_i$ *est uniformément équicontinue.*

b) $\sup_{i \in I} f_i$ *est uniformément continue.*

c) $Z[(f_i)_{i \in I}] = Z[\sup_{i \in I} f_i]$ *est un of.*

Preuve. - a) On applique (5.1.7) en raisonnant par récurrence sur le nombre d'éléments de $\mathcal{J}$.

b) $\sup_{i \in I} f_i$ est uniformément équicontinue puisque $\sup_{i \in I} f_i$ est la limite simple de la famille $(f_{\mathcal{J}})_{\mathcal{J} \in \mathbb{F}(I)}$. On applique (5.1.4) en remarquant que si H est une famille d'idempotents de $\mathcal{U}(X,K,b)$. $\bar{H}^s$ l'est aussi.

c) Trivial.

5.1.9. REMARQUE.-Dans toute la suite, on considère l'espace vectoriel $\mathcal{U}(X,K,b)$ muni de la topologie de la convergence simple. On pose aussi $\mathcal{H} = \{H\}$ la famille de toutes les parties uniformément équicontinues, simplement bornées de $\mathcal{U}(X,K,b)$.

5.1.10. PROPOSITION.-*Les parties* H *munies de la topologie de la convergence simple sur* X *notée* $\mathcal{T}_H$ *pour toute partie* $H \subset \mathcal{H}$ *définissent sur* $\mathcal{U}(X,K,b)$ *un recouvrement stable par réunion finie, par somme vectorielle et par homothétie, tel que :*

a) Pour toutes deux parties H_1 *et* H_2 *de* $\mathcal{H}$, *telles que* $H_1 \subset H_2$, *on a* $\mathcal{T}_{H_2}|_{H_1} = \mathcal{T}_{H_1}$.

b) Pour toutes deux parties H_1 *et* H_2 *telles que* $H_1 \in \mathcal{H}$; $H_1 \subset H_2$, *on a* $\bar{H}_1 \in \mathcal{H}$.

5.2. Le spectre de $\mathcal{U}(X,K,b)$.

5.2.1. DEFINITIONS.

a) On appelle caractère de $\mathcal{U}(X,K,b)$ *toute forme linéaire non nulle* u *sur* $\mathcal{U}(X,K,b)$ *telle que :*

$f,g \in \mathcal{U}(X,K,b)$, $f.g \in \mathcal{U}(X,K,b)$ *entraînent* $u(f.g) = u(f).u(g)$ [4],

b) On appelle caractère du spectre de $\mathcal{U}(X,K,b)$ *tout caractère de* $\mathcal{U}(X,K,b)$ *ayant ses restrictions aux parties* H *uniformément équicontinues, et simplement bornées continues. On appelle* $\Theta_{\mathcal{U}} X$ *l'espace des caractères du spectre de* $\mathcal{U}(X,K,b)$ *muni de la structure uniforme de la convergence uniforme sur les parties* H *et de la topologie associée.*

c) On appelle caractère de $C(X,K,b)$ *toute forme linéaire non nulle sur* $C(X,K,b)$ *, telle que*

$$u(f.g) = u(f).u(g) \ \forall \ f,g \in C(X,K,b) .$$

5.2.2. PROPOSITION. - *Pour tout* $u \in \Theta_{\mathcal{U}} X$, *et pour toute* $f \in \mathcal{U}(X,K,b)$, *on a :* $u(f) \in \overline{f(X)}$.

Preuve. - Supposons tout d'abord que $u(f) = 0$, et $0 \notin \overline{f(X)}$. Il existe $\alpha > 0$, tel que $\overline{f(X)} \subset \complement B(0,\alpha)$. Alors $\frac{1}{f} \in \mathcal{U}(X,K,b)$ et par suite $u(\frac{1}{f} \times f) = u(\frac{1}{f}).u(f) = 0 = u(1)$ (absurde). Si $u(f) \neq 0$, on pose $h = f$ $h = f-u(f).u(h) = 0$, alors $0 \in \overline{f(X)}-u(f)$ ainsi $u(f) \in \overline{f(X)}$.

5.2.3. PROPOSITION. - *Soit* $f \in \mathcal{U}(X,K,b)$ *et soit* $\alpha > 0$. *Alors :*

a) La fonction caractéristique q *de* $\{x \in X / |f(x)| > \alpha\}$ *est uniformément continue.*

b) f.q *est uniformément continue.*

c) 1 - q, *la fonction caractéristique de* $\{x \in X / |f(x)| > \alpha\}$ *est uniformément continue.*

d) f.(1-q) *est uniformément continue.*

Preuve. - a) Il existe $v \in \mathcal{U}$, tel que $(x,y) \in v$ entraîne $|f(x) - f(y)| < \alpha$. Donc $(x,y) \in v$ entraîne $|q(x) - q(y)| = 0$ et, par suite, $q \in \mathcal{U}(X,K,b)$.

b) Il existe $v \in \mathcal{U}$, tel que $(x,y) \in v$ entraîne $|f(x) - f(y)| < \alpha$ et, par suite, $(x,y) \in v$ entraîne $|q(x)f(x) - q(y)f(y)| < \alpha$, puisque $(x,y) \in v$ entraîne $q(x) = q(y)$.

c) Trivial.

d) Trivial.

5.2.4. PROPOSITION. - *Soit* H *une partie uniformément équicontinue, et soit* $u \in \theta_u X$. *Alors, pour tout* $\alpha > 0$, *il existe* $x \in X$, *tel que* $|u(f) - f(x)| < \alpha$, *pour toute* $f \in H$.

Preuve. - On pose $H_1 = \{g / g = f - u(f),\ f \in H\}$. H_1 est uniformément équicontinue et $g \in H_1$ entraîne $u(g) = 0$. Pour chaque $g \in H_1$, on pose $q(g)$ la fonction caractéristique de $\{x \in X / |g(x)| \geq \alpha\}$. Alors $u(q(g)) = 0$. La famille $(q(g))_{g \in H_1}$ est uniformément équicontinue (évident). Donc $u(\sup_{g \in H_1} q(g)) = 0$, et par suite $Z[H_1] = Z[\sup_{g \in H_1} q(g)] \neq \emptyset$ et, par suite, il existe $x \in X$, tel que $|u(f) - f(x)| < \alpha$, pour toute $f \in H$.

5.2.5. THEOREME. - *a) La transformation de Dirac* $\mathcal{E}$ *est une application de* X *dans* $\theta_u X$.

b) $\mathcal{E}$ *est uniformément continue.*

c) $\mathcal{E}$ *est injective.*

d) $\mathcal{E}^{-1} : \mathcal{E}(X) \longmapsto X$ *est uniformément continue.*

e) $\mathcal{E}(X)$ *est partout dense dans* $\Theta_u X$.

f) $\Theta_u X$ *est le séparé complété de* $(X, \mathcal{U})$.

Preuve. - a) $\mathcal{E}_x$ est un caractère de $\mathcal{U}(X,K,b)$ (évident). $\mathcal{E}_x|_H$ est continue, puisque H est uniformément équicontinue.

b) $\mathcal{E}$ est uniformément continue, puisque chaque H est uniformément équicontinue.

c) $\mathcal{U}(X,K,b)$ sépare X. En effet, si $x \neq y$, il existe $v = v^2$, tel que $(x,y) \notin v$. L'application $d_x : X \to K$, telle que $d_x(y) = 1_{\complement v}(x,y)$ est uniformément continue, et $d_x(x) = 0$, $d_x(y) = 1$. Donc $\mathcal{E}$ est injective.

d) Soit $v^2 = v = \bar{v}^1$. Alors la famille $(1_\omega)_{\omega \in P(v)}$ est uniformément équicontinue, et simplement bornée. De plus $(1_\omega)_{\omega \in P(v)}$ est simplement fermée.

$$(\mathcal{E}^{-1}\times\mathcal{E}^{-1})[W(H,\tfrac{1}{2})\wedge \mathcal{E}(X)\times \mathcal{E}(X)] = v.W(H,\tfrac{1}{2}) = \{(u,v)\in [\theta_u X]^2 / |u(f)-v(f)|<\tfrac{1}{2}, f\in H\}.$$

e) Voir (5.2.4).

f) $\theta_u X$ est un espace ultra-uniforme séparé, et complet puisque la limite uniforme sur chaque H d'une famille de caractères de $\theta_u X$, est un caractère de $\theta_u X$. Donc $\theta_u X$ est le séparé complété de $(X,\mathcal{U})$.

5.2.6. COROLLAIRE. - *Soit $(X,\mathcal{U})$ un espace ultra-uniforme séparé. Alors la structure ultra-uniforme $\mathcal{U}$ est exactement la structure ultra-uniforme de la convergence uniforme sur les parties $\mathcal{H}$, c'est-à-dire, c'est la structure ultra-uniforme de la $\mathcal{H}$-convergence.*

5.3. Les espace $\delta^b X$.

DEFINITION. - On appelle $\delta^b X$ l'espace des caractères de C(X,K,b) muni de la structure ultra-uniforme de la convergence simple sur C(X,K,b), et de la topologie associée.

5.3.1. PROPOSITION. - $\delta^b X$ *est un espace ultra-uniforme séparé complet.*

Preuve. - $\delta^b X$ est un sous-espace ultra-uniforme du dual $C(X,K,b)^*$, le dual algebrique, muni de la structure ultra-uniforme de convergence simple sur C(M,K,b). $\delta^b X$ est une partie fermée de $C(X,K,b)^*$, puisque toute limite simple de caractères est une forme multiplicative, et unitaire, donc un caractère et par suite $\delta^b X$ est un espace ultra-uniforme séparé complet.

5.3.2. PROPOSITION. -

a) $\mathcal{E}$ *est continue.*

b) $\mathcal{E}(X)$ *est partout dense dans* $\delta^b X$.

c) $\mathcal{E}$ *est un homéomorphisme de* X *sur* $\mathcal{E}(X)$.

d) $\delta^b X$ *est le séparé complété de* X *pour la structure ultra-uniforme définie par* C(X,K,b), *c'est-à-dire la structure ultra-uniforme définie par les ultra-écarts continue* $(d_f)_{f\in C(X,K,b)}$, *tels que* $d_f(x,y) = |f(x)-f(y)|$; $(x,y)\in X\times X$.

Preuve. a) Soit $W(f_1,\dots,f_n,X)\,(\mathcal{E}_{x_0})$ un voisinage de $\mathcal{E}_{x_0}$, il est clair que $\mathcal{E}\left[\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}\,(B(f_i(x_0),\alpha))\right] \subset W(f_1,\dots,f_n,X)\,(\mathcal{E}_{x_0})$.

($\mathcal{E}$ est continue même si X n'est pas séparé).

b) C'est un cas particulier de (5.2.4).

c) $\mathcal{E}$ est injective, puisque X est éparpillé. $\mathcal{E}^{-1}$ est continue, puisque la topologie de X est celle associée à $C(X,K,b)$.

d) Trivial.

5.3.3. PROPOSITION. - *a) L'application* $\psi : f \longrightarrow f^b$ *de* $C(X,K,b)$ *dans* $C(\delta^b X,K,b)$ *telle que* $f^b(u) = u(f)$ *pour tout* $u \in \delta^b X$, *est un isomorphisme.*

b) $f(X) \subset f^b(\delta^b X) \subset \overline{f(X)}$.

Preuve. - Trivial.

5.3.4. THEOREME. - *Soient* X *et* Y *deux espaces éparpillés. Alors pour toute fonction continue* $f : X \longmapsto Y$, *il existe une application* $f : \delta^b X \longrightarrow \delta^b Y$, *telle que la diagramme :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, dash, "\mathcal{E}"'] & Y \arrow[d, "\mathcal{E}"] \\ \delta^b X \arrow[r, "\hat{f}"'] & \delta^b Y \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Preuve. - On définit $\hat{f}$ de la façon suivante; $\hat{f}(u)$ est le caractère de $\delta^b Y$, tel que $\hat{f}(u)(h) = u(h \circ f)$, $\forall h \in C(Y,K,b)$. $f(\mathcal{E}_x)(h) = \mathcal{E}_x(h \circ f) = \mathcal{E}_{f(x)}(h)$. Donc le diagramme est commutatif. $\hat{f}$ est unique, puisque $\mathcal{E}(X)$ est dense dans $\delta^b X$.

5.3.5. THEOREME. - *Le couple* $(\mathcal{E}, \delta^b X)$ *est solution du problème universel des applications continues de* X *dans les espaces éparpillés* Y, *tel que* $Y = \delta^b Y$.

Preuve. - Cas particulier de (5.3.4).

5.4. Relations entre les $\delta^b X$.

5.4.1. PROPOSITION. - *Soient* b_1 *et* b_2 *deux bornologies sur* K, *telles que* $b_1 \subset b_2$. *Alors* $C(X,K,b_1)$ *est isomorphe à* $C(\delta^{b_2}X,K,b_1)$.

Preuve. - L'application $f \longmapsto f^{b_2}$ de $C(X,K,b_2)$ dans $C(\delta^{b_2}X,K,b_2)$ est un isomorphisme (5.3.3) . Soit $f \in C(X,K,b_1)$; $f(X) \in b_1$, donc $f(X) \in b_2$. $f \in C(X,K,b_2)$ implique $f^{b_2} : \delta^{b_2}X \longrightarrow K$ existe. $f^{b_2}(\delta^{b_2}X) \in b_1$, puisque $f(X) \subset f^{b_2}(\delta^{b_2}X) \subset \overline{f(X)}$. D'autre part, soit $h \in C(\delta^{b_2}X,K,b_1)$, alors $h_{|X}(X) \in b_1$, il est évident que $(h_{|X})^{b_2} = h$.

5.4.2. THEOREME. - *Soient* b_1 *et* b_2 *deux bornologies sur* K, *telles que* $b_1 \subset b_2$. *Alors* $\delta^{b_2}X$ *est un sous-espace topologique partout dense dans* $\delta^{b_1}X$.

Preuve. - $C(\delta^{b_2}X,K,b_1) = C(X,K,b_1)$, alors $\delta^{b_1}(\delta^{b_2}X) = \delta^{b_1}X$. Donc $\delta^{b_2}X$ est un sous-espace topologique partout dense dans $\delta^{b_1}X$.

5.4.3. PROPOSITION. - *Soient* F *la bornologie des parties finies de* K, *et* b_o *la bornologie de toutes les parties de* K . *Soient* b_1 *et* b_2 *deux bornologies sur* K. *Alors, on a :*

a) $X \subset \delta^{b_o}X \subset \delta^{b_1}X \subset \delta^F X$ *(topologiquement).*

b) $X \subset \delta^{b_1}X \subset \delta^b X$, *et* $X \subset \delta^{b_2}X \subset \delta^b X$ *(topologiquement),* *b étant la bornologie* $\sup(b_1,b_2)$. $\delta^{b_1}X$ *et* $\delta^{b_2}X$ *ne sont pas nécessairement comparables.*

Preuve. - Voir (5.4.2).

5.5. L'espace $\delta^P X$.

5.5.1. Notations. a) P est la bornologie de toutes les parties relativement compacte de K.

b) b désigne une bornologie sur K, tel que $b \subset P$.

c) $\overline{2}$ est le corps à 2 éléments.

5.5.2. THEOREME. - *Pour tout espace* X, $\delta^b X$ *est un espace compact totalement discontinu.*

Preuve. - $\delta^b X$ est une partie fermée de $\prod_{f \in C(X,K,b)} \overline{f(X)}$. Donc $\delta^b X$ est un compact totalement discontinu.

5.5.3. PROPOSITION. - *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $X = \delta^b X$.

b) X *est un espace compact totalement discontinu.*

Preuve. - Un compact est éparpillé si et seulement si il est totalement discontinu [10, p. 128].

5.5.4. PROPOSITION. - *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) X *est éparpillé.*

b) Il existe un ensemble I, *tel que* X *soit homéomorphe à une partie de* $\bar{2}^I$.

c) X *est homéomorphe à un sous-espace d'un (c.t.d.).*

Preuve. - a) $\longrightarrow$ b) X est homéomorphe à une partie partout dense de $\bar{2}^{C(X,\bar{2})}$.

b) $\Longrightarrow$ c) Soit $Y \subset \bar{2}^I$. $\bar{Y}$ est un compact totalement discontinu.

c) $\longrightarrow$ a) Un sous-espace d'un (c.t.d.) est éparpillé.

5.5.5. PROPOSITION. - *Pour toute bornologie* $b \subset P$, *on a :*
$\delta^b X = \delta^P X$ *à un isomorphisme près laissant* X *ponctuellement invariant.*

Preuve. - $\delta^P X$ est compact (5.5.2) partout dense dans $\delta^b X$ (5.4.2). Donc $\delta^P X = \delta^b X$ (topologiquement) donc uniformément.

5.5.6. Remarque. - On identifie les espaces ultra-uniformes $\delta^b X$ pour tout $b \subset P$, et on note $\delta^P X$ ces espaces.

5.5.7. PROPOSITION. - *Posons* $\mathcal{U}_P$ *la structure ultra-uniforme définie par* $C(X,K,P)$. *Alors* $\mathcal{U}_P = \mathcal{U}_o$, K *étant infini.*

Preuve. - Soit $P \in P_o$, l'application définie par $f(x) = a_n$ si $x \in \omega_n$; $1 \leq n \leq k = \mathrm{card}(P)$, avec $a_n \neq a_m$, quel que soit $n \neq m$, vérifie $v(P) = B(d_f, \alpha)$ pour $\alpha < \inf_{n \neq m} |a_n - a_m|$. Donc $\mathcal{U}_P$ est plus fine que $\mathcal{U}_o$.

Réciproquement, soit $f \in C(X,K,P)$ et soit $\alpha > 0$, de la partition of de K définie par $|x-y| \leq \alpha$, on peut extraire un recouvrement fini de $\overline{f(X)}$, soit $(\omega_i)_{1 \leq i \leq n}$. Les $f^{-1}(\omega_i \cap f(X))$ forment une partition finie P de X, et $(x,x') \in v(P)$ entraîne $|f(x) - f(x')| \leq \alpha$ ce qui montre que f est $\mathcal{U}_o$-uniformément continue, et $\mathcal{U}_o$ est plus fine que $\mathcal{U}_P$.

5.6. L'espace $\delta^L X$.

5.6.1. PROPOSITION. - *Pour tout* $\alpha \in R^+$; $0 < \alpha < 1$. *Il existe une suite infinie* $(a_n)_{n \geq 1}$, *telle que* $\inf \{|a_n - a_m| \ ; \ n \neq m\} \geq \alpha$.
K *est infini.*

Preuve. - Si K est discret, une suite quelconque infinie $(a_n)_{n \geq 1}$, telle que $a_n \neq a_m$, pour tout $n \neq m$, vérifie la condition.
Si K n'est pas discret, il existe un $\lambda \in K$; $|\lambda| > 1$. La suite λ^n ; $n \geq 1$ vérifie la condition.

5.6.2. PROPOSITION. - *La structure ultra-uniforme* $\mathcal{U}_1$ *est identique à* $\mathcal{U}_L$
$\mathcal{U}_L$ *est la structure ultra-uniforme définie par* $C(X,K,L)$.

Preuve. - Même démonstration que (5.5.7) en tenant compte de (5.6.1).

5.6.3. PROPOSITION. - *Soit* A *une partie fermée non compacte de* K. *Alors il existe dans* A *une suite* $(a_n)_{n \geq 1}$, *telle que*
$\inf \{|a_n - a_m| \ ; \ n \neq m\} = \alpha > 0$.

Preuve. - Il existe dans A une suite $(a_n)_{n \geq 1}$, telle qu aucune de ses sous-suites ne soit convergente; c'est une propriété connue des espaces métriques compacts. Alors $\inf \{|a_n - a_m| \ ; \ n \neq m\} = \alpha > 0$; car sinon on peut extraire de $\{a_n\}_{n \geq 1}$ une sous-suite $(b_n)_{n \geq 1}$, telle que $\lim_{n \to \infty} |b_n - b_{n+1}| = 0$. Donc $(b_n)_{n \geq 1}$ converge, puisque K est ultra-métrique.

Donc $\inf \{ |a_n - a_m| \ ; \ n \neq m \} = \alpha > 0$.

5.6.4. PROPOSITION. - *Soit* $b \subset L$, $b \not\subset P$ *; les propriétés suivantes sont équivalentes pour un espace éparpillé* X.

a) $X = \delta^b X$.

b) $X = \delta^L X$.

Preuve. - a) $\Longrightarrow$ b) Si $X = \delta^b X$, d'après (5.4.2) on a : $X \subset \delta^L X \subset \delta^b X$ d'où l'égalité.

b) $\Longrightarrow$ a) Soit $u \in \delta^b X$, et $\mathbb{F} = \{ A \subset X \ | \exists \omega \subset A, \text{ avec } u(1_\omega) = 1 \}$. $\mathbb{F}$ est un of-filtre maximal qui converge évidemment vers u dans $\delta^b X$. Montrons que c'est un δ-of-filtre : sinon il existerait une suite strictement décroissante d'of $(\omega_n)_{n \geq 0}$, $\omega_0 = X$, $\omega_n \in \mathbb{F}$, telle que $\bigcap_{m \geq 0} \omega_n = \emptyset$.

Soient $X_n = \omega_{n-1} - \omega_n$, pour $n \geq 1$. Il existe une suite dénombrable $(a_n)_{n \geq 1}$ qui appartient à b, et $\inf \{ |a_n - a_m| \ , \ n \neq m \} = \alpha > 0$ (5.6.3). Soit $g : X \to K$ l'application définie par $g(X_n) = \{ a_n \}$, pour $n \geq 1$. $g \in C(X,K,b)$ et $u(g) = u(g).u(1_\omega)$, pour tout $n \geq 0$ montre que $u(g) \in \bigcap_{n \geq 0} \overline{\{ a_m / m \geq n \}} = \emptyset$ ce qui est absurde. En définitive, $\mathbb{F}$ converge dans X vers x, et $u = \varepsilon_x$.

5.6.5. COROLLAIRE. - *Soit* X *un espace éparpillé, et soit* b *une bornologie sur* K*;* $b \subset L$, *et* $b \not\subset P$. *Alors* $\delta^b X = \delta^L X$ *à un homéomorphisme près laissant* X *ponctuellement invariant.*

Preuve. - Désignons par $\delta^b : X \longrightarrow \delta^b X$ et $\delta^L : X \longrightarrow \delta^L X$ l'application de Dirac. On a : $\delta^b(\delta^L X) = \delta^L X$ (5.6.4) et $\delta^L(\delta^b X) = \delta^b X$ (5.6.4). Il existe donc $u : \delta^b X \longrightarrow \delta^L X$ et $v : \delta^L X \longrightarrow \delta^b X$, des applications continues, telles que $u \circ \delta^b = \delta^L$ et $v \circ \delta^L = \delta^b$. Alors $v \circ u \circ \delta^b = \delta^b$ et $u \circ v \circ \delta^L = \delta^L$, ainsi u et v sont deux homéomorphismes réciproques.

5.6.6. Remarque. - On identifie les espaces topologiques $\delta^b X$ et $\delta^L X$ satisfaisant aux conditions de (5.6.5) et on note ces espaces $\delta^L X$.

5.6.7. Remarque. - D'après (5.6.3) si K est infini, il existe des parties relativement Lindelöf qui ne sont pas relativement compactes. Par suite, les espaces topologiques $\delta^P X$ et $\delta^L X$ ne dépendent pas du corps K, mais seulement de l'espace éparpillé X, ce sont respectivement les supports des complétés de X pour $\mathcal{U}_0$ et $\mathcal{U}_1$.

5.6.8. PROPOSITION. - *Soit* E *un espace éparpillé tel que* $E = \delta^L E$. *Soit* X *une partie partout dense de* E *et* L-*plongée dans* E. *Alors toute application continue* $f : X \to Y$ *tel que* $Y = \delta^L Y$. *admet un prolongement continu unique* $\hat{f} : E \to Y$.

Preuve. - Soit $x \in E$, et soit $\mathbb{F}(x)$ le filtre de voisinages de x. $\mathbb{F}(x)$ est un 1-of-filtre. $\mathbb{F}(x) \cap X$ est un 1-of-filtre, puisque chaque $P \in P_1(X)$ est la trace d'un $P' \in P_1(E)$ (4.4.2), $f[\mathbb{F}(x) \cap X]$ est un 1-of-filtre, et par suite il converge vers l'unique point $z \in Y$. On pose $\hat{f}(x) = z$. $\hat{f}$ prolonge f, puisque si $x \in X$ $f[\mathbb{F}(x) \cap X]$ converge vers $f(x)$. $\hat{f}$ est continue. Soit ω un voisinage of de z, il existe un of $\omega_0 \in \mathbb{F}(x)$, tel que $f[\omega_0 \cap X] \subset \omega$, puisque $f[\mathbb{F}(x) \cap X]$ converge vers z. Soit $y \in \omega_0$, $\hat{f}(y) \in \omega$, puisque $\omega_0 \in \mathbb{F}(y)$. Donc $\hat{f}(\omega_0) \subset \omega$, et par suite $\hat{f}$ est continue, et elle est unique.

5.6.9. PROPOSITION. - *Soit* E *un c.t.d. Soit* X *une partie partout dense de* E, *et* P-*plongée dans* E. *Alors toute application continue* $f : X \to Y$, *tel que* $Y = \delta^P Y$ *admet un prolongement continue unique* $\hat{f} : E \to Y$.

Preuve. - Même raisonnement que dans (5.6.8).

5.6.10. PROPOSITION. - *Soit* E *un compactifié totalement discontinu de* X. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) X *est* P-*plongé dans* E.

b) $E = \delta^P X$.

Preuve. - a) $\to$ b) On considère les deux diagrammes

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & E \\ \delta^P X \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd} \quad (5.3.5) \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "i"'] & \delta^P X \\ E \arrow[ur, "\hat{\varepsilon}"'] & \end{tikzcd} \quad (5.6.9).$$

Alors : $(\hat{\imath} \circ \hat{\mathcal{E}})|_X = 1_X$ et $(\hat{\mathcal{E}} \circ i)|_X = 1_X$. Donc $\hat{\imath} \circ \hat{\mathcal{E}} = 1_E$ et $\hat{\mathcal{E}} \circ i = 1_{\delta^P X}$

d'où $E = \delta^P X$.

b) $\Longrightarrow$ a) Voir (5.3.5).

5.6.11. PROPOSITION. - *Soit* E *un espace éparpillé tel que* $E = \delta^L E$ *, et soit* X *une partie partout dense de* X. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $E = \delta^L X$.

b) X *est* L-*plongé dans* E.

Preuve. - Même raisonnement que dans (5.6.10)

5.7. La complétion ultra-universelle.

5.7.1. THEOREME. - *La structure ultra-uniforme universelle* θ_1 *est exactement la structure ultra-uniforme de la convergence uniforme sur les parties* $\mathcal{H}$ *, équicontinues, simplement bornées de* C(X,K,b).

Preuve. - Il suffit de démontrer que $C(X,K,b) = \theta_1(X,K,b)$ et qu'une partie H équicontinue, simplement bornée de C(X,K,b) est uniformément équicontinue, et simplement bornée dans $\theta_1(X,K,b)$. $C(X,K,b) = \theta_1(X,K,b)$ est évident. Si H est équicontinue, simplement bornée, d_H est continu, et fini, donc d_H est uniformément continue et, par suite, H est uniformément équicontinue, simplement bornée.

5.7.2. THEOREME. - *Le séparé complété ultra-universel de* X *est exactement le spectre* $\theta_1 X$ *de* C(X,K,b) *c'est-à-dire l'espace des caractères de* C(X,K,b) *ayant leurs restrictions aux parties équicontinues, simplement bornées de* C(X,K,b) *, continues, muni de la structure de la convergence uniforme sur les* H .

Preuve. - Voir (5.2) et (5.7.11).

5.7.3. DEFINITION. - *On dit qu'un espace* X *est non archimédien si et seulement si* $\theta_1 X = X$.

5.7.4. PROPOSITION. - *Il existe un isomorphisme entre* $\theta_1(X,K,b) = C(X,K,b)$ *et* $\theta_1(\theta_1 X,K,b)$ *qui échange les parties* H *(Les parties uniformément équicontinues, et simplement bornées).*

Preuve. - L'application de $\theta_1(X,K,b)$ dans $\theta_1(\theta_1 X,K,b)$, $\varphi : f \mapsto f^{\theta}$ telle $f^{\theta}(u) = u(f)$; $u \in \theta_1 X$, est un isomorphisme (évident). Si $H \in \mathcal{H}$, $H^{\theta} \in \mathcal{H}$ puisque $d_H = d_{H^\theta}$; $H^{\theta} = \varphi(H)$, et réciproquement.

5.7.5. COROLLAIRE. - $\theta_1(\theta_1 X) = \theta_1 X$.

5.7.6. PROPOSITION. - *Pour toute* b *sur* K, *on a :*

a) $\delta^b(\theta_1 X) = \delta^b X$.

b) $\theta_1 X$ *est un sous-espace topologique partout dense de* $\delta^b X$.

Preuve. - $C(X,K,b) = C(\theta_1 X,K,b)$. Alors $\delta^b(\theta_1 X) = \delta^b X$. $\theta_1 X$ est éparpillé donc $\theta_1 X$ est un sous-espace topologique partout dense de $\delta^b X$.

5.7.5. THEOREME. - *Pour deux espaces éparpillés* X *et* Y *et pour toute application continue* $f : X \to Y$, *il existe une application continue* $\hat{f} : \theta_1 X \to \theta_1 Y$ *telle que le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & Y \arrow[d, "\varepsilon"] \\ \theta_1 X \arrow[r, mapsto, "\hat{f}"] & \theta_1 Y \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Preuve. - Soit b la bornologie de toutes les parties de K. On pose $\hat{f}(u)$ pour tout $u \in \theta_1 X$, le caractère sur $\theta_1(Y,K,b)$ tel que $\hat{f}(u) = u(h \circ f)$; $h \in \theta_1(Y,K,b)$. $\hat{f}(\varepsilon_x)(h) = \varepsilon_x(h \circ f) = \varepsilon_{f(x)}(h)$. $\hat{f}$ est unique, puisque X est partout dense dans $\theta_1 X$. Enfin prouvons que $\hat{f}(u)$ est un caractère du spectre de $\theta_1(Y,K,b)$. Soit $H \in \mathcal{H}$ de $\theta_1(Y,K,b)$. Alors $H \circ f$ est uniformément équicontinue, puisque $H \circ f$ est équicontinue, $H \circ f$ est simplement bornée de $\theta_1(X,K,b)$ et par suite $u_{H \circ f}$ est continu. Donc $\hat{f}(u)|_H$ est continue.

5.7.8. THEOREME. - $(\varepsilon, \theta_1 X)$ *est solution du problème universel des applications continues de* X *dans les espaces non archimédiens* Y.

5.7.9. PROPOSITION. -

a) Chaque espace discret est b n.a.

b) Chaque espace éparpillé Lindelöf est n.a.

c) Chaque espace of-paracompact est n.a.

Preuve. - Chaque espace discret est of-paracompact (évident). Chaque espace Lindelöf est n.a. En effet, pour chaque recouvrement ouvert de X, il existe un recouvrement of dénombrable plus fin. Donc il existe une partition of dénombrable plus fine (2.3.3) et, par suite, il suffit de prouver b). b) Soit $u \in \theta_1 X$, il existe $x \in X$ tel que $\varepsilon_x = u$. En effet, supposons que $\varepsilon_x \neq u$, pour tout $x \in X$. Alors il existe une partie $H \in \mathcal{H}$ de $\theta_1(X,K,b)$ telle que $u(f) = 0$, pour toute $f \in H$, et pour tout $x \in X$, il existe $f_x \in H$; $f_x(x) \neq 0$. Donc pour tout $x \in X$, il existe un of $\omega(x)$; $x \in \omega(x)$, et $0 \notin f_x(\omega(x))$ X étant of-para-compact, il existe une partition of P de X plus fine que $(\omega(x))_x$. Alors $u(1_\omega) = 0$ pour tout $\omega \in P$. La famille $(1_\omega)_{\omega \in P}$ est uniformément équicontinue, et $\sup_{\omega \in P} 1_\omega = 1$. Donc $u(1) = 0$ (absurde) et, par suite, il existe $x \in X$ tel que $u = \omega_x$. Alors $\theta_1 X = X$.

5.8. Relations entre $\delta^L X$ et $\theta_1 X$.

5.8.1. THEOREME. - *Soit* X *un espace* α*-précompact. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $\delta^L X = \theta_1 X$,

b) $\chi_\alpha < \mathfrak{m}_0$. $\mathfrak{m}_0$ *étant le plus petit cardinal mesurable.*

Preuve. - a) $\Longrightarrow$ b) Soit $P \in \bar{P} = P_\alpha$ de $\theta_1 X$. $d_{v(P)}$ est continue. La famille $(x_\omega)_{\omega \in P_L} = \{x_\omega \mid \omega \in P,\ x_\omega \in \omega\}$ est $d_{v(P)}$-discrète. $\delta^L X$ est replet, puisque $\delta^L X$ est une partie fermée de $\prod_{f \in C(X,K,L)} \overline{f(X)}$. Donc $(x_\omega)_{\omega \in P}$ est modéré (Shirota) et par suite $\chi_\alpha < \mathfrak{m}_0$.

b) $\Longrightarrow$ a) $\delta^L X = \theta_1 X \Longleftrightarrow \delta^L(\theta_1 X) = \theta_1 X$, puisque $\delta^L(\theta_1 X) = \delta^L X$.

Supposons que $\delta^L(\theta_1 X) \neq \theta_1 X$. Il existe donc un 1-of-filtre sur $\theta_1 X$ noté $\mathbb{F}$ qui n'est par convergent. Alors F n'est par un α-of-filtre, et par suite, il existe une $P \in \bar{P}$, telle que $\omega \in P$ entraîne $\omega \notin \mathbb{F}$. L'espace

$\frac{\theta_1 X}{R(v(P))}$ est modéré. Soit $\varphi : \theta_1 X \to \frac{\theta_1 X}{R(v(P))}$ l'application canonique.

$\varphi(\mathbb{F})$ est une base d'ultra-filtres qui ne converge pas. Il existe donc [7] une famille dénombrable $(\omega_n)_{n \geq 1}$; $\omega_n \in \varphi(\mathbb{F})$; $n \in \mathbb{N}$, et $\bigcap_{n \geq 1} \omega_n = \emptyset$. Alors $\varphi^{-1}(\omega_n) \in \mathbb{F}$ et $\bigcap_{n \geq 1} \varphi^{-1}(\omega_n) = \emptyset$ (absurde), puisque $\mathbb{F}$ est un δ-of-filtre. Donc $\delta^L(\theta_1 X) = \theta_1 X$, et $\delta^L X = \theta_1 X$.

5.8.2. COROLLAIRE. - *Soit* X *un espace éparpillé. Alors toute fonction* $\varphi : Of(X) \to \bar{2}$, *1-additive est* γ*-additive pour tout* γ *, tel que* $\chi_\gamma \leq \mathfrak{M}_0$.

Preuve. - Il suffit de démontrer que $\delta^L(\hat{X}_\gamma) = \hat{X}_\gamma$. Pour cela, on applique le même raisonnement que (5.8.1, b) $\Longrightarrow$ a)).

5.8.3. COROLLAIRE.-*Soit* X *un espace éparpillé. Alors tout 1-of-filtre sur* X*, est un* γ*-of-filtre pour tout* γ *, tel que* $\chi_\gamma \leq \mathfrak{M}_0$.

5.9. Les espaces discrets.

5.9.1. THEOREME. - *Soit* X *un espace discret. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) X *est complet pour* $\mathcal{U}_1$ *,*

b) $X = \delta^L X$*,*

c) X *est modéré,*

d) Tout δ*-of-filtre sur* X *est convergent .*

Preuve. - a) $\Longrightarrow$ b) voir (5.4.3) .
c) $\Longrightarrow$ d) voir (6.5.1) .
a) $\longrightarrow$ d) voir [7] .

5.9.2. COROLLAIRE. - *Soit* X *un espace discret. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $\delta^L X \neq X$

b) X *est mesurable.*

5.10. Relations entre θ_1 et θ, β et δ^P, υ et δ^L.

5.10.1. THEOREME. - *Pour un espace éparpillé* X, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $\theta = \theta_1$,

b) $\upsilon = \delta^L$,

c) $\beta = \delta^P$,

d) $\beta X = \delta^P X$.

Preuve. - L'espace uniforme (X, θ) est un espace fin [12] ;donc "θ est définie par une famille des partitions ofs" équivaut à "β est définie par une famille des partitions ofs" .[12, p. 147]. Donc a)$\Longleftrightarrow$ c). c)$\Longleftrightarrow$ d) évident.

b)$\Longrightarrow$ c) Soient $f \in C^{\infty}(X)$, et $\alpha > o$; il existe une partition of $P = (\omega_k)_{k \geq 1}$, telle que $v(P) \subset B(d_f, \alpha)$.. Il existe un nombre fini de boules $B_{d_f}(x_i, \alpha)$ $\{1 \leq i \leq n\}$ telles que leur réunion est X. Chaque $\omega_k \in P$ est contenu dans un $B_{d_f}(x_i, \alpha)$. Posons $\Omega_1 = \{\cup \omega_k / \omega_k \subset B_{d_f}(x_1, \alpha)\}$, et $\Omega_m = \{\cup \omega_k / \omega_k \subset B_{d_f}(x_m, \alpha),\ \omega_k \not\subset B_{d_f}(x_q, \alpha)\ ;\ q < m\}$ pour tout $1 < m \leq n$. $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une partition of P_1 de X, telle que $\upsilon(P_1) \subset B(d_f, \alpha)$. Donc $\beta = \delta^P$.

a) $\Longrightarrow$ b) même démonstration que b) $\Longrightarrow$ c).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] H. BUCHWALTER, *Cours D.E.A. 1969-1970,* Dep. Math. Lyon.

[2] H. BUCHWALTER, *Topologies et compactologies,* Pub. Dép. Math. Lyon t. 6 fasc. 2, 1969, p. 1-74.

[3] H. BUCHWALTER, *Topologies, bornologies et compactologies,* Thèse Doct-ès-sc. Lyon, 1968.

[4] R. PUPIER, *Méthodes fonctiorielles en topologie générale,* Thèse Doct-ès-sc. Lyon , 1971.

[5] M. VAN DER PUT, *Algèbres de fonctions p-adiques,* Proc. Kon. Nederl. Acad. Wet. séries A, t. 71, 1968, p. 401-412.

[6] A.F. MONNA, *Remarques sur les métriques non archimédiennes,* Proc. Kon. Nederl. Acad. Wet. série A, 1950, p. 470-481 et p. 625-637.

[7] G. CHOQUET, *Cardinaux non mesurables et cônes faiblement complets,* Ann. Inst. Fourier, t. 17, 1967, p. 383-393.

[8] L. GILMAN et N. JERISON, *Rings of continuous functions,* Van Nostrand, 1960.

[9] N. BOURBAKI, *Topologie générale,* Chap. II, Hermann, Paris 1961.

[10] N. BOURBAKI, *Topologie générale,* chap. IX, Hermann, Paris, 1958.

[11] N. BOURBAKI, *Théories des ensembles,* chap. III, Hermann, Paris, 1954?

[12] N. ISBELL, *Uniform spaces,* Math. Surveys n° 12, Amer. Math. Soc. 1964.

Manuscrit remis le 10 mai 1972

A. DEAIBES
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918.
69621 - VILLEURBANNE