PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

PAUL NOUYRIGAT

Sur le prédual de l'algèbre de Von Neumann associée à une représentation unitaire d'un groupe localement compact

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1972, tome 9, fascicule 2 , p. 30-59

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1972__9_2_30_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1972 t.9-2

SUR LE PREDUAL DE L'ALGEBRE DE VON NEUMANN ASSOCIEE A UNE REPRESENTATION UNITAIRE D'UN GROUPE LOCALEMENT COMPACT.

Paul NOUYRIGAT

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Soit π une représentation unitaire d'un groupe localement compact G dans un espace hilbertien $\mathcal{H}_\pi$. Soit VN_π l'algèbre de Von Neumann engendrée dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$ par les opérateurs $\pi(x)$, où x parcourt G. L'objet du présent travail est d'étudier quelques propriétés du prédual A_π de VN_π, c'est-à-dire de l'espace de Banach des formes linéaires ultra-faiblement continues sur VN_π.

On peut identifier A_π à un espace de fonctions continues et bornées sur G, plus précisément à un sous-espace de Banach de l'algèbre de Fourier-Stieltjes B(G) définie et étudiée par P. Eymard dans [5]. En particulier, si π est la représentation régulière gauche de G dans $L^2(G)$, A_π s'identifie à l'algèbre de Fourier A(G) (cf. [5]). Des résultats sur les espaces A_π en général - ainsi que sur le cas particulier des représentations quasi-régulières - ont été récemment annoncés par G.Arsac dans [1]. Nous avons nous-mêmes obtenu quelques résultats de ce type, et nous les exposons dans ce travail.

Après le chapitre I, consacré à quelques préliminaires et notations, nous montrons au chapitre II que A_π, défini comme prédual de VN_π, s'identifie au sous-espace de Banach de B(G) engendré par les coefficients de π, c'est-à-dire à l'espace introduit par G. Arsac. De plus, tout $u \in A_\pi$ s'écrit $u = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i * \eta_i$ où les ξ_i et les η_i sont dans $\mathcal{H}_\pi$, où l'on pose $\xi_i * \eta_i(x) = (\pi(x)\xi_i | \eta_i)$ pour tout $x \in G$, et où on a de plus $\|u\| = \sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\| \, \|\eta_i\|$.

Nous envisageons une troisième définition équivalente de A_π, directement inspirée d'une idée de C.Herz (remarque sur la note précédente de M. Varopoulos, C.R. Acad. Sc., t. 260, 1965, p.6001-6004). Elle nous permet d'établir que, si u est une somme finie de coefficients de π, sa norme peut s'exprimer à partir des décompositions de u en telles sommes <u>finies</u>, sans avoir à utiliser de séries.

Contrairement à ce qui se passe pour A(G), l'espace A_π n'est pas en général une algèbre pour la multiplication ordinaire des fonctions. Nous donnons une condition nécessaire pour que A_π soit une algèbre : c'est que $\pi(G)$ soit un ensemble linéairement indépendant dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$.

A la fin du chapitre II, nous étudions les applications linéaires continues d'un $A_{\pi_1}(G_1)$ dans un $A_{\pi_2}(G_2)$ dont la transposée est un morphisme d'algèbresde Von Neumann. La caractérisation que nous en obtenons nous permet en particulier de retrouver que, par restriction à un sous-groupe fermé H de G, l'algèbre de Fourier A(G) s'applique <u>sur</u> A(H).

Le chapitre III est à l'origine de ce travail. La représentation π est ici la représentation quasi-régulière, induite sur G par la représentation triviale d'un sous-groupe fermé H de G. Nous démontrons que, pour que H soit distingué, il faut et il suffit que les fonctions de A_π soient constantes sur les classes x H. Dans ce cas on a $A_\pi = A(G/H)$.

Le chapitre IV est consacré à l'étude du produit tensoriel $\pi_1 \otimes \pi_2$ de deux représentations π_1 et π_2, définies respectivement sur des groupes G_1 et G_2. Nous obtenons $A_{\pi_1 \otimes \pi_2}$ comme complété de $A_{\pi_1} \otimes A_{\pi_2}$ pour une certaine norme. Le problème est alors de placer $A_{\pi_1 \otimes \pi_2}$ par rapport aux produits tensoriels $A_{\pi_1} \hat{\otimes} A_{\pi_2}$ et $A_{\pi_1} \hat{\hat{\otimes}} A_{\pi_2}$. On a deux applications canoniques $j : A_{\pi_1} \hat{\otimes} A_{\pi_2} \longrightarrow A_{\pi_1 \otimes \pi_2}$ et $i : A_{\pi_1 \otimes \pi_2} \longrightarrow A_{\pi_1} \hat{\hat{\otimes}} A_{\pi_2}$, qui sont linéaires, continues et de norme $\leqslant 1$. Nous montrons que i est une injection. D'autre part, nous prouvons que j est une isométrie surjective si, et seulement si, l'une des algèbres VN_{π_1} ou VN_{π_2} est commutative. Ceci généralise, en particulier, la formule $A(G_1 \times G_2) = A(G_1) \hat{\otimes} A(G_2)$, connue dans le cas où G_1 et G_2 sont commutatifs, au cas où l'un seulement des groupes est commutatif. Enfin, nous démontrons que, si π est une représentation irréductible, l'espace de Banach A_{π} possède la propriété d'approximation métrique. Il en résulte que, si π_1 ou π_2 est irréductible, l'application $j : A_{\pi_1} \hat{\otimes} A_{\pi_2} \longrightarrow A_{\pi_1 \otimes \pi_2}$ est une injection.

§ 1.- Topologies sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Soit $\mathcal{H}$ un espace hilbertien complexe ; outre la topologie de la norme on utilisera plusieurs topologies sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

1.1.- Topologie forte

Soit $x \in \mathcal{H}$; la fonction $T \longrightarrow \|T(x)\|$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. L'ensemble de ces semi-normes définit sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ une topologie localement convexe séparée appelée topologie forte.

1.2.- Topologie faible

Soient $x, y \in \mathcal{H}$; la fonction $T \longrightarrow |\langle T(x) \mid y\rangle|$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. L'ensemble de ces semi-normes définit sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ une topologie localement convexe séparée appelée topologie faible.

1.3.- Topologie ultra-forte

Soit (x_i) une suite d'éléments de $\mathcal{H}$ tels que $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < \infty$; la fonction $T \longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|T(x_i)\|^2\right)^{1/2}$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. L'ensemble de ces semi-normes définit sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ une topologie localement convexe séparée appelée topologie ultra-forte.

1.4.- Topologie ultra-faible

Soit $(x_i)_i$ et $(y_i)_i$ deux suites d'éléments de $\mathcal{H}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < \infty \quad , \quad \sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\|^2 < \infty \quad ;$$

la fonction $T \longrightarrow \left|\sum_{i=1}^{\infty} \langle T(x_i) \mid y_i\rangle\right|$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. L'ensemble de ces semi-normes définit sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ une topologie localement convexe séparée appelée topologie ultra-faible.

1.5.- Sur les bornés de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ les topologies forte et ultra-forte coïncident, les topologies faible et ultra-faible coïncident.

1.6.- Sur le groupe unitaire de $\mathcal{H}$ les topologies forte et faible coïncident.

§ 2.- Formes linéaires sur une algèbre de Von Neumann.

Soit V une algèbre de Von Neumann dans $\mathcal{H}$.

1.7.- Soit u une forme linéaire sur V ; les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u est faiblement continue ;

(ii) u est fortement continue ;

(iii) Il existe deux suites finies $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ d'éléments de $\mathcal{H}$ tels que, pour tout $T \in V$,

$$u(T) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(x_i) \mid y_i \rangle .$$

1.8.- Soit u une forme linéaire sur V ; les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u est ultra-faiblement continue ;

(ii) u est ultra-fortement continue ;

(iii) Il existe deux suites $(x_i)_i$ et $(y_i)_i$ d'éléments de $\mathcal{H}$ tels que $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\|^2 < \infty$ vérifiant

$$u(T) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle T(x_i) \mid y_i \rangle \quad \text{pour tout } T \in V.$$

1.9.- L'adhérence, A, au sens de la norme de l'espace de Banach dual de V, de l'ensemble des formes linéaires fortement continues est l'ensemble des formes linéaires ultra-fortement continues.

1.10.- Avec les notations de (1.9.-), V est l'espace de Banach dual de A et la topologie $\sigma(V,A)$ est la topologie ultra-faible.

1.11.- Soit u une forme linéaire positive sur V, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u est ultra-faiblement continue ;

(ii) Il existe une suite (x_i) d'éléments de $\mathcal{H}$,vérifiant $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < \infty$ tels que pour tout $T \in V$

$$u(T) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle T(x_i) \mid x_i \rangle .$$

1.12.- Soit G un groupe localement compact, π une représentation unitaire continue de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, alors les algèbres de Von Neumann engendrées dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ par $\pi(G)$ et $\pi(L^1(G))$ sont égales.

§ 3.- Théorème de densité

1.13.- Théorème de Kaplansky

Soient V et W des algèbres involutives d'opérateurs dans $\mathcal{H}$, avec $V \subset W$, et supposons que V soit fortement partout dense dans W. Alors la boule unité de V est fortement partout dense dans la boule unité de W.

§ 4.- Décomposition polaire

1.14.- Soit V une algèbre de Von Neumann, u une forme linéaire ultra-faiblement continue sur V, alors il existe un couple unique $(T, |u|)$ ayant les propriétés suivantes :

a) $|u|$ est une forme linéaire positive ultra-faiblement continue sur V ; et $\|u\| = \| |u| \|$;

b) T est un élément partiellement isométrique de V dont le projecteur final est égal au support de $|u|$;

c) Pour tout $S \in V$ on a :

$\langle S,u \rangle = \langle ST, |u| \rangle$ et $\langle S, |u| \rangle = \langle ST^*, u \rangle$.

On dit que $|u|$ est la valeur absolue de u, ([4], p. 61, th. 4).

§ 5.- Notations

Nous adopterons d'une manière générale les notations de [5].

Soit G un groupe localement compact, soit dx une mesure de Haar à gauche sur G, choisie une fois pour toutes. Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$ on définit comme d'habitude les espaces $L^p(G)$ relatifs à dx. Pour toute fonction complexe f sur G et tout $s \in G$ on définit les fonctions $\gamma(s)f$, $\delta(s)f$, $\bar{f}$, $\check{f}$, $\tilde{f}$ par les formules

$$\gamma(s)f(x) = f(s^{-1}x) \; ; \; \delta(s)f(x) = f(xs) \; ; \; \bar{f}(x) = \overline{f(x)} \; ; \; \check{f}(x) = f(x^{-1}) \; ; \; \tilde{f} = \check{\bar{f}} .$$

Soit $\mathcal{H}$ un espace hilbertien complexe ; une représentation, π, de G dans $\mathcal{H}$ est un morphisme de G dans le groupe unitaire de $\mathcal{H}$, continu pour la topologie forte.

Soit V une algèbre de Von Neumann dans $\mathcal{H}$; On note V^+ l'ensemble des opérateurs positifs de V. Si A est un ensemble de formes linéaires sur V, on note A^+ l'ensemble des formes linéaires de A qui sont positives, c'est-à-dire l'ensemble des $u \in A$ tels que $\langle T,u \rangle \geqslant 0$ pour tout $T \in V^+$.

On note $B(G)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de toutes les fonctions continues de type positif sur G, autrement dit, l'ensemble de tous les coefficients $(\pi(x)\xi | \eta)$ des représentations unitaires continues de G. Pour $u \in B(G)$, on pose

$$\| u \| = \sup_{f \in L^1(G),\ \|f\|_{\Sigma} \leqslant 1} \left| \int f(x)\, u(x)\, dx \right|$$

où Σ désigne l'ensemble de toutes les (classes de) représentations unitaires continues de G et où $\|f\|_{\Sigma} = \sup_{\pi \in \Sigma} \|\pi(f)\|$. Alors $B(G)$ est un espace de Banach.

Soit π une représentation de G ; on désigne par $B_{\pi}(G)$ l'ensemble des fonctions u, continues et bornées sur G, vérifiant

$$\sup_{f \in L^1(G),\ \|\pi(f)\| \leqslant 1} \left| \int f(x)\, u(x)\, dx \right| < \infty .$$

Muni de la norme $\displaystyle \| u \| = \sup_{\substack{f \in L^1(G) \\ \|\pi(f)\| \leqslant 1}} \left| \int f(x)\, u(x)\, dx \right|$, l'ensemble $B_{\pi}(G)$ est un sous-espace de Banach de l'espace de Banach $B(G)$.

CHAPITRE II - L'ESPACE DE FOURIER $A_\pi(G)$

Soit π une représentation unitaire continue de G dans un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$. Soit $VN_\pi \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'algèbre de Von Neumann engendrée par $\pi(G)$. On désigne par VN'_π l'espace de Banach dual de VN_π.

§ 1.- Définition et premières propriétés

2.1.- Définition

On appelle espace de Fourier de la représentation π, et on note A_π (ou $A_\pi(G)$), l'espace de Banach des formes linéaires ultra-faiblement (ou ultra-fortement, ce qui revient au même) continues sur VN_π.

La norme de A_π est donc la norme de VN'_π. Le théorème de densité de Kaplansky, appliqué à l'algèbre involutive $\pi(L^1(G))$, montre alors que, pour $u \in A_\pi$,

2.2.- $$\|u\| = \sup_{\substack{T \in VN_\pi \\ \|T\| \leqslant 1}} |\langle T, u\rangle| = \sup_{\substack{f \in L^1(G) \\ \|\pi(f)\| \leqslant 1}} |\langle \pi(f), u\rangle|.$$

D'autre part VN_π est l'espace de Banach dual de A_π et, si $F_\pi \subset A_\pi$ désigne l'ensemble des formes linéaires fortement continues sur VN_π, alors F_π est partout dense dans A_π.

Soit $u \in A_\pi$. Alors u est déterminé par les $\langle \pi(s), u\rangle$ pour $s \in G$. Par suite, si l'on pose $u(s) = \langle \pi(s), u\rangle$, on peut considérer A_π comme un espace de fonctions sur G. Dans la suite on notera de la même façon la forme linéaire ultra-faiblement continue sur VN_π et la fonction sur G qu'elle définit.

2.3.- Exemple

Si π est la représentation régulière gauche de G, le théorème (3.10.) de [5] montre que A_π est l'algèbre de Fourier du groupe G.

Soit $u \in A_\pi$; alors u est de la forme :

$$T \longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} (T(\xi_i)|\eta_i) \quad \text{avec } \xi_i \in \mathcal{H}, \eta_i \in \mathcal{H}, \sum_i \|\xi_i\|^2 < \infty, \sum_i \|\eta_i\|^2 < \infty.$$

Soient ξ et η dans $\mathcal{H}$; notons $\xi * \eta$ la fonction sur G définie par la formule $\xi * \eta(s) = (\pi(s)\xi|\eta)$, pour $s \in G$. On note alors $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i * \eta_i$ la fonction sur G, déterminée par u. On a donc par définition

2.4.- $$u(s) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i * \eta_i\right)(s) = \sum_{i=1}^{\infty} (\pi(s)\xi_i|\eta_i).$$

2.5.- Proposition

Tout $u \in A_\pi$ s'écrit, au moins d'une façon, sous la forme

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i * \eta_i \text{ , avec } \xi_i \in \mathcal{H} \ ; \ \eta_i \in \mathcal{H} \ ; \ \sum_i \|\xi_i\|^2 < \infty \ ; \ \sum_i \|\eta_i\|^2 < \infty$$

Cela résulte de (1.8.) et (2.4.).

Adoptons la convention suivante : lorsqu'on écrira $u \in A_\pi$ sous la forme $u = \sum_i^{\infty} \xi_i * \eta_i$, on supposera que $\xi_i \in \mathcal{H}$, $\eta_i \in \mathcal{H}$, $\sum_i \|\xi_i\|^2 < \infty$ et $\sum_i \|\eta_i\|^2 < \infty$.

2.6.- Proposition

Soit $u \in A_\pi$. Alors u est une fonction continue et bornée sur G ; de plus $\|u\|_\infty \leqslant \|u\|$.

La représentation π est continue, donc, si $\sum_i \|\xi_i\|^2 < \infty$ et $\sum_i \|\eta_i\|^2 < \infty$ la fonction $s \to \sum_{i=1}^{\infty} (\pi(s)\xi_i \mid \eta_i)$ est continue d'après (1.5.) et (1.6.).

D'autre part

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in G} |\langle \pi(x), u \rangle| \leqslant \sup_{\substack{T \in VN_\pi \\ \|T\| \leqslant 1}} |\langle T, u \rangle| = \|u\| .$$

2.7.- Proposition

Soient $u \in A_\pi$ et $x \in G$; alors les fonctions $\gamma(x)u$ et $\delta(x)u$ appartiennent à A_π et

$$\|u\| = \|\gamma(x)u\| = \|\delta(x)u\| .$$

En effet, si $u = \sum_i \xi_i * \eta_i$, on a $\sum_i \|\xi_i\|^2 = \sum_i \|\pi(x)\xi_i\|^2 < \infty$

et $\sum_i \|\eta_i\|^2 = \sum_i \|\pi(x)\eta_i\|^2 < \infty$. Par suite on a

2.8.- $\gamma(x)u = \sum_i \xi_i * (\pi(x)\eta_i)$ et $\delta(x)u = \sum_i (\pi(x)\xi_i) * \eta_i$.

Donc $\gamma(x)u \in A_\pi$ et $\delta(x)u \in A_\pi$. D'autre part $T \longrightarrow \pi(x^{-1})T$ est une isométrie de la boule unité de VN_π sur elle-même, donc

$$\|\gamma(x)u\| = \operatorname*{Sup}_{\|T\| \leqslant 1} |\langle T, \gamma(x)u \rangle| = \operatorname*{Sup}_{\|T\| \leqslant 1} |\langle \pi(x^{-1})T, u \rangle| = \operatorname*{Sup}_{\|S\| \leqslant 1} |\langle S, u \rangle| = \|u\| .$$

On démontre de même que $\|u\| = \|\delta(x)u\|$.

2.9.- Proposition

Soient $\mu \in M^1(G)$ et $u \in A_\pi$; on a

2.10.- $\langle \pi(\mu), u \rangle = \int u(x)\, d\mu(x).$

En effet si $u = \xi * \eta$ on a

$$\langle \pi(\mu), \xi * \eta \rangle = (\pi(\mu)\xi | \eta) = \int (\pi(x)\xi | \eta) d\mu(x) = \int u(x)\, d\mu(x).$$

L'égalité (2.10.) est donc vérifiée pour $u \in F_\pi$ et, par continuité pour $u \in A_\pi$.

2.11.- Corollaire

A_π est un sous-espace fermé de B_π.

Cela résulte de (2.6.), (2.2.), (2.10) et de l'expression de la norme dans B_π.

§ 2.- Expression de la norme dans A_π

Nous montrons dans ce paragraphe qu'on peut obtenir la norme d'un $u \in A_\pi$ à partir d'une de ses décompositions sous la forme $u = \sum_i \xi_i * \eta_i$.

Soit $T \in VN_\pi$; alors $\varphi : S \longrightarrow ST$ est un endomorphisme ultra-faiblement continu de VN_π. Par suite, pour $u \in A_\pi$, la forme linéaire $u \circ \varphi$ est ultra-faiblement continue sur VN_π. Il existe donc un unique élément, noté Tu, de A_π vérifiant

2.12.- $\langle ST, u \rangle = \langle S, Tu \rangle$ pour tout $S \in VN_\pi$.

On vérifie immédiatement que la loi externe $(T,u) \longrightarrow Tu$ fait de A_π un VN_π-module à gauche. Lorsqu'on écrira u sous la forme $u = \sum_i \xi_i * \eta_i$, on notera $T(\sum_i \xi_i * \eta_i)$ l'élément Tu.

2.13.- Proposition

Soit $T \in VN_\pi$. L'application $\psi : u \longrightarrow Tu$ de A_π dans A_π est linéaire, continue, de norme $\|T\|$ et vérifie

2.14.- $T(\xi * \eta) = (T\xi) * \eta$ pour $\xi \in \mathcal{H}$ et $\eta \in \mathcal{H}$.

2.15.- $Tu(x) = \langle T, \gamma(x^{-1})u \rangle = \langle \pi(x)T, u \rangle$ pour $u \in A_\pi$ et $x \in G$.

L'égalité (2.12.) montre que ψ est la restriction à A_π de la transposée de φ. Donc ψ est linéaire et continue. D'autre part φ est la transposée de ψ, d'où

$$\|T\| = \|\varphi\| = \|\psi\| .$$

Pour tout $S \in VN_\pi$ et ξ et η dans $\mathcal{H}$, on a :

$$\langle S, T(\xi * \eta) \rangle = \langle ST, \xi * \eta \rangle = (ST\xi | \eta) = \langle S, (T\xi) * \eta \rangle ,$$

d'où (2.14.).

La formule (2.15.) résulte de (2.8.) et (2.12.). On a, de plus

2.16.- $T\left(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i * \eta_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} (T\xi_i) * \eta_i .$

2.17.- Proposition

Soit $u \in A_\pi$. Alors pour toute écriture de u sous la forme $u = \sum_i \xi_i * \eta_i$, on a

$$\|u\| \leqslant \sum_i \|\xi_i\| \, \|\eta_i\| .$$

Cela résulte du lemme (2.14.) de [5].

2.18.- Corollaire

Avec les notations de la proposition (2.17.) on a

$$u = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \xi_i * \eta_i .$$

Soit $u_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i * \eta_i$; on a $u-u_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \xi_i * \eta_i$ d'où $\|u-u_n\| \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \|\xi_i\| \, \|\eta_i\|$; ce qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

2.19.- Proposition

Soit $u \in A_\pi$ et soit (T_α) une suite d'éléments de VN_π , convergeant ultra-fortement vers 0. Alors $(T_\alpha u)$ converge en norme dans A_π vers 0.

On peut écrire $u = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i * \eta_i$ avec $\sum_i \|\xi_i\|^2 < \infty$ et $\sum_i \|\eta_i\|^2 < \infty$.

On a alors $\lim_\alpha \sum_i \|T_\alpha \xi_i\|^2 = 0$ d'où

$$\|T_\alpha u\| = \|\sum_i (T_\alpha \xi_i) * \eta_i\| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|T_\alpha \xi_i\| \, \|\eta_i\| \leqslant (\sum_i \|T_\alpha \xi_i\|^2)^{1/2} (\sum_i \|\eta_i\|^2)^{1/2}$$

et $\lim_\alpha \|T_\alpha u\| = \lim_\alpha \sum_i \|T_\alpha \xi_i\|^2 = 0$.

Soit $u \in A_\pi$. Alors u possède une décomposition polaire unique $u = T|u|$, où $|u|$ est une forme linéaire positive normale sur VN_π , et $T \in VN_\pi$ est un opérateur partiellement isométrique. De plus $\|u\| = \| \, |u| \, \|$.

2.20.- Théorème (G. Arsac [1])

Soit $u \in A_\pi$. On peut écrire $u = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i * \eta_i$ avec $\sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\|^2 < \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} \|\eta_i\|^2 < \infty$ de telle sorte que l'on ait exactement :

2.21.- $\|u\| = \sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\| \, \|\eta_i\|$.

Soit $u = T|u|$ la décomposition polaire de u. Alors $|u|$ est de la forme $S \longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} (S\xi_i \mid \xi_i)$, avec $\sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\|^2 \leqslant \infty$; c'est-à-dire $|u| = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i * \xi_i$. Par suite $\| \, |u| \, \| = \sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\|^2$ car l'inégalité $|\langle S, |u| \rangle| \leqslant \|S\| (\sum_i \|\xi_i\|^2)$ est une égalité pour $S = \pi(e)$.

D'autre part

$$u = T|u| = \sum_{i=1}^{\infty} (T\xi_i) * \xi_i$$ donc, puisque T est partiellement isométrique,

$$\|u\| = \|T|u|\| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|T\xi_i\| \, \|\xi_i\| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\|^2 = \|u\|$$ et

$$\|u\| = \sum_{i=1}^{\infty} \|T\xi_i\| \, \|\xi_i\| .$$

L'énoncé suivant précise le lemme (2.14.) de [5] :

2.22.- Proposition

Soit $u = \xi' * \eta'$ un coefficient de π. Alors il existe ξ et η dans $\mathcal{H}$ tels que $u = \xi * \eta$ et tels qu'on ait exactement :

$$\|u\| = \|\xi\| \|\eta\| \quad .$$

Soit $u = T|u|$ la décomposition polaire de u ; on a $|u| = T^* u$ d'où $|u| = (T^*\xi') * \eta'$. Par suite ([4], p. 48, Lemme 2.) il existe $\xi \in \mathcal{H}$ tel que $|u| = \xi * \xi$; donc $u = (T\xi) * \xi$. Alors, puisque T est partiellement isométrique, on a

$$\|u\| \leqslant \|T\xi\| \quad \|\xi\| \leqslant \|\xi\|^2 = |u|(e) = \| |u| \| = \|u\|$$

donc

$$\|u\| = \|T\xi\| \quad \|\xi\| .$$

2.23.- Proposition

Soit $u = \sum_i \xi_i * \eta_i \in A_\pi$, avec $\|u\| = \sum_i \|\xi_i\| \|\eta_i\|$. Soit $K \subset \mathbb{N}$. Alors, si on pose $u_K = \sum_{i \in K} \xi_i * \eta_i$, on a

$$\|u_K\| = \sum_{i \in K} \|\xi_i\| \|\eta_i\| .$$

Il est clair que $u_K \in A_\pi$. La série $\sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\| \|\eta_i\|$ est commutativement convergente, donc

$$\|u\| = \|u_K + u_{\complement K}\| \leqslant \|u_K\| + \|u_{\complement K}\| \leqslant \sum_{i \in K} \|\xi_i\| \|\eta_i\| + \sum_{i \in \complement K} \|\xi_i\| \|\eta_i\| = \|u\| ;$$

Ceci donne

$$\|u_K\| = \sum_{i \in K} \|\xi_i\| \|\eta_i\| .$$

§ 3.- Condition nécessaire pour que A_π soit une Algèbre

2.24.- Proposition

Si A_π est une algèbre (pour la multiplication des fonctions), alors $\pi(G)$ est une partie libre de l'espace vectoriel VN_π.

On va démontrer, par récurrence sur n, que la relation $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \pi(s_i) = 0$, où les $\pi(s_i)$ sont deux à deux distincts, implique $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Pour $n = 1$ le résultat est évident.

Soient $\pi(s_1) \neq \pi(s_2)$. Supposons $\lambda_1 \pi(s_1) + \lambda_2 (\pi(s_2) = 0$ avec λ_1 et λ_2 non nuls. Alors on peut écrire $\pi(s_1) = - \lambda_1^{-1} \lambda_2 \pi(s_2)$ et $\pi(e) = - \lambda_1^{-1} \lambda_2 \pi(s_2 s_1^{-1})$. On se ramène ainsi à l'égalité :

$$\pi(e) = \lambda \pi(s), \text{ où } \lambda \neq 0 \text{ et } \pi(e) \neq \pi(s).$$

Pour tout $v \in A_\pi$ on a donc

2.25.- $v(e) = \lambda v(s)$.

Soit $u \in A_\pi$ tel que $u(e) \neq 0$. On a alors, d'après (2.25.), $u^2(e) = \lambda u^2(s)$. Or $u^2(e) = u(e)^2 = \lambda^2 u(s)^2 = \lambda^2 u^2(s)$; on peut donc écrire $\lambda u^2(s) = \lambda^2 u^2(s) \neq 0$. Il s'ensuit que $\lambda = 1$, puis que $\pi(e) = \pi(s)$, ce qui est contradictoire. Par suite on a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Supposons la relation vraie pour $n-1 \geqslant 2$. Soient des $\pi(s'_i)$ deux à deux distincts, $i = 1,2,\dots,n$. Supposons $\sum_{i=1}^{n} \lambda'_i \pi(s'_i) = 0$ où aucun des λ'_i n'est nul.

On obtient alors

$$\pi(s'_1) = -\sum_{i=2}^{n} (\lambda_1'^{-1} \lambda'_i) \pi(s'_i) \quad \text{et}$$

$$\pi(e) = -\sum_{i=2}^{n} (\lambda_1'^{-1} \lambda'_i) \pi(s'_i s_1'^{-1})$$

On se ramène alors à l'égalité

2.26.- $\pi(e) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \pi(s_i)$ où les $\pi(s_i)$ sont deux à deux distincts et les λ_i non nuls.

D'après l'hypothèse de récurrence, les $\pi(s_i)$, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, sont linéairement indépendants. Il existe donc $u \in A_\pi$ tel que :

$$\langle \pi(s_2),u\rangle = \dots = \langle \pi(s_{n-1}), u\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \pi(s_1),u\rangle \neq 0.$$

On a alors, d'après (2.26.),

$$u(e) = \langle \pi(e),u\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \langle \pi(s_i),u\rangle = \lambda_1 \langle \pi(s_1),u\rangle .$$

De même on a,

$$u^2(e) = \langle \pi(e),u^2\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \langle \pi(s_i),u^2\rangle = \lambda_1 \langle \pi(s_1),u^2\rangle .$$

Par suite, on obtient

$$u^2(e) = \lambda_1^2 \langle \pi(s_1),u\rangle^2 = \lambda_1^2 \langle \pi(s_1),u^2\rangle = \lambda_1 \langle \pi(s_1),u^2\rangle \neq 0 .$$

Il s'ensuit que $\lambda_1 = 1$. On démontre de même $\lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = 1$.

La formule (2.26.) s'écrit alors

2.27. $\pi(e) = \sum_{i=1}^{n-1} \pi(s_i)$.

On a donc, pour tout $u \in A_\pi$, $u(e) = \sum_{i=1}^{n-1} u(s_i)$; ce qui donne, en élevant au carré,

$$u(e)^2 = u^2(e) = \sum_{i=1}^{n-1} u(s_i)^2 + 2 \sum_{i<j} u(s_i)\, u(s_j) .$$

D'autre part on a aussi

$$u^2(e) = \sum_{i=1}^{n-1} u^2(s_i).$$

En comparant les deux écritures de $u^2(e)$, on déduit que

$\sum_{i<j} u(s_i)u(s_j) = 0$, pour tout $u \in A_\pi$; cette somme comporte au moins un terme car $n-1 \geqslant 2$. Prenons alors $u \in A_\pi$ non nul sur $\pi(s_1)$ et $\pi(s_2)$ et nul sur $\pi(s_3),\ldots,\pi(s_{n-1})$. On obtient $u(s_1)\,u(s_2) = 0$ ce qui est contradictoire. Par suite, il existe au moins un λ_i' nul. L'hypothèse de récurrence montre qu'alors tous les λ_i' sont nuls. Donc $\pi(G)$ est une partie libre de VN_π .

Remarque : Pour que A_π soit une algèbre, il faut et il suffit que u^2 soit dans A_π dès que u est dans A_π .

Une réciproque partielle de la proposition (2.24.) est donnée par la proposition suivante :

2.28.- Proposition

Soit π une représentation de dimension finie. Si $\pi(G)$ est une partie libre de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, alors A_π est une algèbre.

En effet, toute fonction sur $\pi(G)$ se prolonge en une forme linéaire sur l'espace vectoriel engendré par $\pi(G)$; celui-ci étant de dimension finie, cette forme linéaire est ultra-faiblement continue, donc appartient à A_π . Soient u et v dans A_π . La fonction $\pi(s) \longrightarrow \langle \pi(s),u \rangle \langle \pi(s),v \rangle$ définit donc un élément de A_π . Par suite uv appartient à A_π .

Supposons que $\pi(G)$ est une partie libre de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Soit $\xi \in \mathcal{H}$; alors la fonction $\sum_{i=1}^n \lambda_i\ \pi(s_i) \longrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i(\pi(s_i)\xi/\xi)^2$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel engendré par $\pi(G)$. Pour que $(\xi * \xi)^2$ appartienne à A_π , il faut et il suffit que cette application soit ultra-faiblement continue. C'est en particulier le cas dès que l'application $\sum_{i=1}^n \lambda_i\ \pi(s_i) \longrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i\ \pi(s_i) \otimes \pi(s_i)$ est ultra-faiblement continue.

Si π est quasi-équivalente à $\pi \otimes \pi$, on retrouve le fait que A_π est une algèbre (cf. G.Arsac [1]).

§ 4.- Utilisation des produits tensoriels dans l'étude de A_π ; application au calcul de la norme dans F_π .

Le but essentiel de ce paragraphe est de démontrer que si $u \in F_\pi$, la norme de u est donnée par

$$\|u\| = \inf\left\{ \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|\ \|\eta_i\| ,\ u = \sum_{i=1}^n \xi_i * \eta_i \right\} .$$

Soit $\overline{\mathcal{H}}$ l'espace hilbertien conjugué de $\mathcal{H}$. Sur $\mathcal{H} \otimes \overline{\mathcal{H}}$ on met la norme projective :

$$2.29.- \qquad \|x\| = \inf\left\{ \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|\ \|\eta_i\| ,\ x = \sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i \right\} .$$

Soit $\mathcal{H} \hat{\otimes} \bar{\mathcal{H}}$ le complété de $\mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}}$ pour cette norme. Tout x de $\mathcal{H} \hat{\otimes} \bar{\mathcal{H}}$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \otimes \eta_i$ où la série $\sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\| \, \|\eta_i\|$ converge et on a ([6] théorème 1 p. 51)

2.30.- $$\|x\| = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\| \, \|\eta_i\| \, , \, x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \otimes \eta_i \right\} .$$

L'application $p' : \mathcal{H} \times \bar{\mathcal{H}} \longrightarrow A_{\pi}$, définie par $p'(\xi, \eta) = \xi * \eta$ est bilinéaire et continue. Soit $p : \mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}} \longrightarrow A_{\pi}$ sa linéarisée ; p est continue et $p(\mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}}) = F_{\pi}$. Soit $\hat{p} : \mathcal{H} \hat{\otimes} \bar{\mathcal{H}} \longrightarrow A_{\pi}$ le prolongement de p à $\mathcal{H} \hat{\otimes} \bar{\mathcal{H}}$, on a alors

$$\hat{p}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \otimes \eta_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i * \eta_i \, .$$

2.31.- Proposition

L'application canonique $\tilde{\hat{p}} : \mathcal{H} \hat{\otimes} \bar{\mathcal{H}} /_{\mathrm{Ker}(\hat{p})} \longrightarrow A_{\pi}$ est une isométrie surjective.

Cela résulte du théorème (2.20.) et de la formule (2.30.)

2.32.- Proposition

La bijection canonique $\tilde{p} : \mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}} /_{\mathrm{Ker}(p)} \longrightarrow F_{\pi}$ est une isométrie de l'espace normé quotient $\mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}} /_{\mathrm{Ker}(p)}$ sur le sous-espace F_{π} de A_{π} .

En effet le dual de l'espace normé $\mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}}$ est l'espace de Banach des formes bilinéaires continues sur $\mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}}$. Si φ est une telle forme et si $\sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \eta_i \in \mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}}$ on a $\langle \varphi, \sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \eta_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i, \eta_i)$. Par suite le dual de $\mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}}$ s'identifie à $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ au moyen de la relation

$$\langle T, \sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \eta_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} (T\xi_i | \eta_i) \quad \text{pour} \quad T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \eta_i \in \mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}} .$$

D'autre part, dans la dualité $(\mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$, l'ensemble $\mathrm{Ker}(p)$ est l'orthogonal de $\pi(G)$, car la relation " $\langle \pi(s), \sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \eta_i \rangle = 0$ pour tout $s \in G$ " équivaut à " $p(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \eta_i) = 0$ ". Par suite le dual de $\mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}} /_{\mathrm{Ker}(p)}$, qui d'identifie isométriquement à l'orthogonal de $\mathrm{Ker}(p)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, est le bi-orthogonal de $\pi(G)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$; D'après (1.7.) la topologie $\sigma(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}})$ est la topologie faible de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Donc le bi-orthogonal de $\pi(G)$, qui est l'adhérence faible, dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, de l'espace vectoriel engendré par $\pi(G)$, n'est autre que VN_{π} . Le dual de $\mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}} /_{\mathrm{Ker}(p)}$ s'identifie alors à VN_{π} au moyen de la formule

$$\langle T, \sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \eta_i + \mathrm{Ker}(p) \rangle = \sum_{i=1}^{n} (T\xi_i | \eta_i) .$$

On en déduit donc

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \eta_i + \mathrm{Ker}(p) \right\| = \sup_{\substack{T \in VN_\pi \\ \|T\| \leqslant 1}} \left| \left\langle T, \sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \eta_i + \mathrm{Ker}(p) \right\rangle \right| =$$

$$= \sup_{\substack{T \in VN_\pi \\ \|T\| \leqslant 1}} \left| \left\langle T, \sum_{i=1}^{n} \xi_i * \eta_i \right\rangle \right| = \left\| \tilde{p}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \eta_i + \mathrm{Ker}(p) \right) \right\| .$$

Par suite, $\tilde{p}$ est une isométrie.

2.33.- <u>Corollaire</u>

Soit $u \in F_\pi$; alors on a

$$\|u\| = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\| \, \|\eta_i\| \, , \; u = \sum_{i=1}^{n} \xi_i * \eta_i \right\} .$$

Cela résulte de (2.29.) et (2.32.).

§ 5.- <u>Etude de certains morphismes de</u> A_{π_1} <u>dans</u> A_{π_2}.

Soit $u \in A_\pi$; alors $T \longrightarrow \overline{\langle T^*, u \rangle}$ est une forme linéaire ultra-faiblement continue sur VN_π . Il existe donc un unique élément de A_π , noté $\tilde{u}$, tel que

2.34.- $\langle T, \tilde{u} \rangle = \overline{\langle T^*, u \rangle}$ pour tout $T \in VN_\pi$.

Nous allons voir, que, considérée comme fonction sur G, on a : $\tilde{u}(x) = \overline{u(x^{-1})}$, et que, d'autre part, l'application $u \longrightarrow \tilde{u}$ est une isométrie de A_π .

2.35.- <u>Proposition</u>

Soit $u = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i * \eta_i$; alors on a $\tilde{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i * \xi_i$.

En effet on a, pour tout $T \in VN_\pi$,

$$\overline{\left\langle T^*, \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i * \eta_i \right\rangle} = \overline{\sum_{i=1}^{\infty} (T^* \xi_i \mid \eta_i)} = \sum_{i=1}^{\infty} (T \eta_i \mid \xi_i) = \left\langle T, \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i * \xi_i \right\rangle .$$

2.36.- <u>Corollaire</u>

Soit $u \in A_\pi$; alors on a

$$\|u\| = \|\tilde{u}\| , \text{ et } \tilde{u}(x) = \overline{u(x^{-1})}, \text{ pour tout } x \in G.$$

Les vérifications sont immédiates.

Soient G_1 et G_2 des groupes localement compacts et π_1 et π_2 des représentations de G_1 et G_2 respectivement.

2.37.- <u>Proposition</u>

Soit $i : VN_{\pi_1} \longrightarrow VN_{\pi_2}$ un morphisme injectif ultra-faiblement continu d'algèbres involutives. Alors l'espace de Banach A_{π_1} est un quotient de l'espace de Banach A_{π_2}. Plus précisément, si θ désigne la restriction à A_{π_2} de la transposée de i, l'application canonique $\varphi : A_{\pi_2}/_{Ker(\theta)} \longrightarrow A_{\pi_1}$ est une isométrie surjective.

En effet, puisque i est ultra-faiblement continue, on a $\theta(A_{\pi_2}) \subset A_{\pi_1}$. L'application i est alors la transposée de θ ; par suite $\theta(A_{\pi_2})$ est partout dense dans A_{π_1}. L'application θ se décompose en $\theta = \varphi \circ \psi$ où $\psi : A_{\pi_2} \longrightarrow A_{\pi_2}/Ker(\theta)$ est la surjection canonique, et $\varphi : A_{\pi_2}/Ker(\theta) \longrightarrow A_{\pi_1}$.

L'ensemble $Ker(\theta)$ est l'orthogonal de $i(VN_{\pi_1})$ dans A_{π_2} ([2] ch. IV - § 4. Corollaire de la proposition 2. p. 101). Par suite l'espace de Banach dual de $A_{\pi_2}/Ker(\theta)$ s'identifie isométriquement au bi-orthogonal de $i(VN_{\pi_1})$ dans VN_{π_2}([2] ch. IV, § 5, proposition 9). Un élément T_2 de ce bi-orthogonal est identifié à la forme linéaire $u_2 + Ker(\theta) \longrightarrow \langle T_2, u_2 \rangle$.

D'autre part $i(VN_{\pi_1})$ est une algèbre de Von Neumann, donc $i(VN_{\pi_1})$ est ultra-faiblement fermé. Il en résulte que $i(VN_{\pi_1})$ est égal à son bi-orthogonal et que le dual de $A_{\pi_2}/Ker(\theta)$ s'identifie à $i(VN_{\pi_1})$.

La norme d'un élément $u_2 + Ker(\theta) \in A_{\pi_2}/Ker(\theta)$, est alors donnée par

$$\| u_2 + Ker(\theta)\| = \sup_{\substack{T_1 \in VN_{\pi_1} \\ \|T_1\| \leqslant 1}} \left| \langle i(T_1), u_2 \rangle \right| .$$

On obtient donc

$$\|u_2 + Ker(\theta)\| = \sup_{\substack{T_1 \in VN_{\pi_1} \\ \|T_1\| \leqslant 1}} \left| \langle i(T_1), u_2 \rangle \right| = \sup_{\|T_1\| \leqslant 1} \left| \langle T_1, \theta(u_2) \rangle \right| =$$

$$= \sup_{\|T_1\| \leqslant 1} \left| \langle T_1, \varphi(u_2 + Ker(\theta)) \rangle \right| .$$

Par suite on a

$$\|u_2 + Ker(\theta)\| = \| \varphi(u_2 + Ker(\theta)) \| .$$

Et l'application φ est une isométrie ; elle est surjective car $\varphi(A_{\pi_1}/_{Ker(\theta)}) = \theta(A_{\pi_2})$ est partout dense dans A_{π_1}.

2.38.- <u>Proposition</u>

Soit $p : VN_{\pi_1} \longrightarrow VN_{\pi_2}$ un morphisme d'algèbres involutives ultra-faiblement continu

On suppose que $p(VN_{\pi_1})$ est ultra-faiblement dense dans VN_{π_2}. Alors la transposée i de p est une isométrie de A_{π_2} dans A_{π_1}.

Soit $p = \tilde{p} \circ q$ la décomposition canonique de p, avec $q : VN_{\pi_1} \longrightarrow VN_{\pi_{1/\mathrm{Ker}(p)}}$ et $\tilde{p} : VN_{\pi_{1/\mathrm{Ker}(p)}} \longrightarrow VN_{\pi_2}$. L'application $\tilde{p}$ est une isométrie ([3] p.18, 1.8.3.) ; Soit i la restriction de ${}^t p$ à A_{π_2} ; alors $i(A_{\pi_2}) \subset A_{\pi_1}$, car p est ultra-faiblement continu. Soit $u_2 \in A_{\pi_2}$; on a $\| u_2 \| = \sup\limits_{\| p(T_1) \| \leq 1} | \langle p(T_1), u_2 \rangle |$ car $p(VN_{\pi_1})$ est ultra-faiblement dense dans VN_{π_2}. Soit $\mathcal{B}_1$ la boule unité de VN_{π_1}. Alors $q(\mathcal{B}_1)$ est la boule unité de $VN_{\pi_{1/\mathrm{Ker}(p)}}$, et $\tilde{p}(q(\mathcal{B}_1))$ est la boule unité de $p(VN_{\pi_1})$. On a donc

$$\| u_2 \| = \sup_{\| p(T_1) \leq 1 \|} | \langle p(T_1), u_2 \rangle = \sup_{T_1 \in \mathcal{B}_1} | \langle p(T_1), u_2 \rangle | = \sup_{T_1 \in \mathcal{B}_1} | \langle T_1, i(u_2) \rangle | .$$

d'où $$\| u_2 \| = \| i(u_2) \| .$$

L'application i est donc une isométrie.

2.39.- Corollaire

Supposons qu'il existe un isomorphisme d'algèbres involutives, $p : VN_{\pi_1} \longrightarrow VN_{\pi_2}$. Alors les espaces de Banach A_{π_1} et A_{π_2} sont isométriques.

Ce corollaire s'applique en particulier lorsque π_1 et π_2 sont deux représentations quasi-équivalentes d'un même groupe G ([3] p.106, 5.3.2.). Alors $A_{\pi_1} = A_{\pi_2}$ (cf. G. Arsac [1])

2.40.- Proposition

Soit $\theta : A_{\pi_1} \longrightarrow A_{\pi_2}$ une application linéaire continue. Alors pour que $\varphi = {}^t\theta : VN_{\pi_2} \longrightarrow VN_{\pi_1}$ soit un morphisme d'algèbres involutives, il faut et il suffit que θ vérifie

2.41.- $$\theta(\tilde{u}_1) = \widetilde{\theta(u_1)} \quad \text{pour tout } u_1 \in A_{\pi_1} ,$$

2.42.- $$T_2\, \theta(u_1) = \theta({}^t\theta(T_2)\, u_1) \quad \text{pour tout } u_1 \in A_{\pi_1} \text{ et } T_2 \in VN_{\pi_2} .$$

En effet, soient $T_2, S_2 \in VN_{\pi_2}$ et $u_1 \in A_{\pi_1}$. On a

$$\langle \varphi(T_2^*), u_1 \rangle = \langle T_2^*, \theta(u_1) \rangle = \overline{\langle T_2, \widetilde{\theta(u_1)} \rangle} , \quad \text{et}$$

$$\langle \varphi(T_2)^*, u_1 \rangle = \overline{\langle \varphi(T_2), \tilde{u}_1 \rangle} = \overline{\langle T_2, \theta(\tilde{u}_1) \rangle} .$$

L'égalité (2.41.) est donc équivalente à $\varphi(T_2^*) = \varphi(T_2)^*$.

On a, d'autre part :

$$\langle \varphi(T_2S_2),u_1 \rangle = \langle T_2\, S_2, \theta(u_1)\rangle = \langle T_2, S_2\, \theta(u_1)\rangle \quad \text{et}$$

$$\langle \varphi(T_2)\varphi(S_2),u_1 \rangle = \langle \varphi(T_2),\varphi(S_2)u_1 \rangle = \langle T_2, \theta({}^t\theta(S_2)u_1 \rangle .$$

Ceci montre que l'égalité (2.42.) est équivalente à

$$\varphi(T_2S_2) = \varphi(T_2)\,\varphi(S_2).$$

2.43.- Corollaire

Soit $\theta : A_{\pi_1} \longrightarrow A_{\pi_2}$ une application linéaire continue vérifiant (2.42.). Alors (2.41.) est équivalent à

2.44.- $$\theta(A_{\pi_1}^+) \subset A_{\pi_2}^+ .$$

Supposons que θ vérifie (2.41.), alors, d'après 2.40., $\varphi = {}^t\theta$ est un morphisme d'algèbres involutives ; par suite ([4], p. 8, proposition 8.) $\varphi(VN_{\pi_2}^+) \subset VN_{\pi_1}^+$ et $\theta(A_{\pi_1}^+) \subset A_{\pi_2}^+$.

Réciproquement, si $\theta(A_{\pi_1}^+) \subset A_{\pi_2}^+$, on a $\varphi(VN_{\pi_2}^+) \subset VN_{\pi_1}^+$; ce qui entraîne $\varphi(T_2^*) = \varphi(T_2)^*$ pour tout $T_2 \in VN_{\pi_2}$ ([4] , p. 53, Déf. 2.). Par suite φ est un morphisme d'algèbres involutives, et θ vérifie (2.41.).

2.45.- Proposition

Soit $\theta : A_{\pi_1} \longrightarrow A_{\pi_2}$ une application linéaire continue, vérifiant (2.41.) et (2.42.) ; si θ est surjective alors A_{π_2} est isométrique à l'espace de Banach quotient $A_{\pi_1}/\mathrm{Ker}(\theta)$. Si θ est injective, θ est une isométrie de A_{π_1} dans A_{π_2}.

Supposons θ injective ; soit $\varphi = {}^t\theta$. D'après (1.10.) on sait que la topologie de dualité $\sigma(VN_{\pi}, A_{\pi})$ est la topologie ultra-faible, donc, d'après Bourbaki ([2] p. 103, corollaire de la proposition 6.), φ est ultra-faiblement continu. D'autre part, θ étant injective, $\varphi(VN_{\pi_2})$ est ultra-faiblement dense dans VN_{π_1}. Alors d'après (2.38.) θ est une isométrie.

Supposons θ surjective. Alors $\varphi = {}^t\theta$ est une injection ultra-faiblement continue. La proposition (2.37.) montre que A_{π_2} est isométrique à $A_{\pi_1}/\mathrm{Ker}(\theta)$.

2.46.- Remarque

On peut remplacer, dans l'énoncé de la proposition (2.45.) l'hypothèse " θ est surjective" par " $\theta(A_{\pi_1})$ est partout dense dans A_{π_2} ". Cela suffit, en effet, pour que φ soit injective.

2.47.- <u>Exemple</u>

Soit H un sous-groupe fermé de G. Alors, $A(H)$ s'identifie aux restrictions à H des fonctions de $A(G)$. On retrouve ainsi un théorème de C. Herz (C.R. Acad. Sc. t. 271, n° 4, p. 244-246) à partir du fait, simple à vérifier, que $A(G)|H$ est dense dans $A(H)$. Ce dernier fait, par exemple, est évident si G est un groupe de Lie, car alors toute fonction de $\mathcal{D}(H)$ se prolonge en une fonction de $\mathcal{D}(G)$, et de plus $\mathcal{D}(G)$ est dense dans $A(G)$, (cf. [5] proposition (3.26.).).

Soit H un sous-groupe fermé de G ; soit G/H l'espace homogène des classes à gauche $\dot{x} = xH$ de G selon H, sur lequel G opère continûment à gauche : si $\dot{x} \in G/H$ et $s \in G$, on désigne par $s\dot{x}$ la classe $\dot{\widehat{sx}}$ de sx. On désigne par λ une mesure > 0 sur G/H quasi-invariante, c'est-à-dire

3.1.- $$\int_{G/H} f(s\dot{x})d\lambda\dot{x} = \int_{G/H} \chi(s^{-1},\dot{x})\, f(\dot{x})\, d\lambda\dot{x}$$

où

3.2.- $$\chi(s,\dot{x}) = \frac{\rho(sx)}{\rho(x)} \quad \text{où } s \in G \text{ et } \dot{x} = xH \in G/H ,$$

ρ étant une certaine fonction continue > 0 sur G telle que

3.3.- $$\rho(x\xi) = \frac{\Delta_H(\xi)}{\Delta_G(\xi)}\, \rho(x) \quad \text{pour } x \in G \text{ et } \xi \in H,$$

où Δ_G et Δ_H sont les fonctions modulaires de G et H respectivement. On définit la représentation quasi-régulière, π , de G dans $L^2(G/H , \lambda)$ par la formule

3.4.- $$\pi(s)f(\dot{x}) = f(s^{-1}\dot{x})\ \sqrt{\chi(s^{-1},\dot{x})} \quad \text{pour } s \in G \text{ et } f \in L^2(G/H, \lambda).$$

La représentation π n'est autre que la représentation <u>induite</u> sur G par la représentation triviale de H([7]).

3.5.- <u>Lemme</u>

Le noyau de π dans G est contenu dans H.

Soit $s \in G$ tel que $s \notin H$. Alors $s^{-1}\dot{s} \neq \dot{s}$ et il existe une fonction f continue, à support compact, sur G/H, telle que

$$f(s^{-1}\dot{s})\ \sqrt{\rho(s^{-1}s)} \neq f(\dot{s})\ \sqrt{\rho(s)} \quad \text{donc}$$

$\pi(s)f(\dot{s}) \neq f(\dot{s})$ et $\pi(s)f \neq f$. Par suite $\pi(s) \neq 1_{L^2(G/H, \lambda)}$ et $s \notin \mathrm{Ker}(\pi)$. On a donc $\mathrm{Ker}(\pi) \subset H$.

3.6.- <u>Proposition</u>

Soit π la représentation quasi-régulière de G dans $L^2(G/H, \lambda)$. Soit $u \in A_\pi$; alors les fonctions $\bar{u}$ et $\check{u}$ appartiennent à A_π et

3.7.- $$\|\bar{u}\| = \|\check{u}\| = \|u\| .$$

Soient f et g dans $L^2(G/H, \lambda)$; on a

$$\overline{f*g}\ (x) = \overline{(\pi(x)f\ g)} = (\ \pi(x)\bar{f}\,|\,\bar{g}) = \bar{f}*\bar{g}(x) \quad \text{et}$$

$$(f*g)^{\vee}\ (x) = (\pi(x^{-1})f\,|\,g) = (\pi(x)\bar{g}\,|\,\bar{f}) = \bar{g}*\bar{f}(x) \quad \text{pour tout } x \in G.$$

Ceci montre que $\bar{u}$ et $\check{u}$ sont dans A_π pour tout $u \in A_\pi$. D'autre part l'égalité $\|f\| = \|\bar{f}\|$ pour tout $f \in L^2(G/H,\lambda)$ entraîne les égalités (3.7.).

3.8.- Proposition

Pour que H soit distingué, il faut et il suffit que les fonctions de A_π soient constantes sur les classes xH. Dans ce cas A_π s'identifie canoniquement à $A(G/H)$.

Supposons H distingué : Soit $p : G \longrightarrow G/H$ la surjection canonique. La mesure de Haar sur G/H est G-invariante. Soit σ la représentation régulière gauche de G/H ; alors π et σ sont à valeurs dans le même espace de Hilbert et $\pi = \sigma \circ p$. En effet soit $s \in G$ et $f \in L^2(G/H)$; on a

$$\sigma(\dot{s})(f)(\dot{x}) = f(\dot{s}^{-1}\dot{x}) = f(s^{-1}\dot{x}) = \pi(s)(f)(\dot{x}) \quad \text{pour tout } \dot{x} \in G/H.$$

Il en résulte que l'application qui à $\pi(s)$ associe $\sigma(p(s))$ se prolonge en un isomorphisme (d'algèbres involutives car H est distingué) de VN_π sur VN_σ. D'après (2.39.), on obtient par transposition une isométrie θ de $A(G/H)$ sur A_π, qui à $u \in A(G/H)$ fait correspondre $\theta(u)$ défini par

$$\theta(u)(s) = \langle \pi(s), \theta(u) \rangle = \langle \sigma(p(s)), u \rangle = u(\dot{s}), \text{ pour } s \in G.$$

Ceci montre que les fonctions de A_π sont constantes sur les classes xH et que A_π s'identifie à $A(G/H)$.

Réciproquement supposons que les fonctions de A_π sont constantes sur les classes xH. Soit $x \in H$; alors pour tout $u \in A_\pi$ on a $u(x) = u(e)$. Par suite $\pi(x) = \pi(e)$ et $x \in \mathrm{Ker}(\pi)$.

On obtient alors $H \subset \mathrm{Ker}(\pi)$; d'après (3.5.) on a donc $H = \mathrm{Ker}(\pi)$ et H est distingué.

3.9.- Remarque

Soit H un sous-groupe distingué non compact de G. Alors toute fonction non nulle $u \in A_\pi$, ne tend pas vers zéro à l'infini. On voit aussi qu'on ne peut obtenir de partitions de l'unité dans A_π. La situation est donc ici moins riche en possibilités que dans le cas où $H = \{e\}$, c'est-à-dire dans le cas de l'algèbre de Fourier $A(G)$ (cf [5]).

Soient G_1 et G_2 des groupes localement compacts ; soit π_1 (resp. π_2) une représentation de G_1 (resp. G_2) dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_1$ (resp. $\mathcal{H}_2$). Soit $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$ la représentation de $G_1 \times G_2$ dans $\mathcal{H}_1 \overset{h}{\otimes} \mathcal{H}_2$, produit tensoriel de π_1 et π_2 ($\mathcal{H}_1 \overset{h}{\otimes} \mathcal{H}_2$ désigne le produit tensoriel hilbertien de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$). On rappelle que π est définie par

$$\pi(s_1, s_2) = \pi(s_1) \otimes \pi(s_2) \quad \text{pour} \quad (s_1, s_2) \in G_1 \times G_2 .$$

Le but de ce chapitre est de construire A_π à partir de A_{π_1} et A_{π_2} et de comparer A_π aux produits tensoriels $A_{\pi_1} \hat{\otimes} A_{\pi_2}$ et $A_{\pi_1} \hat{\hat{\otimes}} A_{\pi_2}$.

Posons, pour simplifier les écritures,

$$A_1 = A_{\pi_1} \;;\; A_2 = A_{\pi_2} \;;\; A = A_\pi \;;\; V_1 = VN_{\pi_1} \;;\; V_2 = VN_{\pi_2} \;;\; V = VN_\pi .$$

§ 1.- L'injection de $A_{\pi_1 \otimes \pi_2}(G_1 \times G_2)$ dans $A_{\pi_1}(G_1) \hat{\hat{\otimes}} A_{\pi_2}(G_2)$

4.1.- Proposition

L'algèbre de Von Neumann V est le produit tensoriel des algèbres de Von Neumann V_1 et V_2.

En effet V est engendré par les éléments de la forme $\pi(s_1, s_2) = \pi(s_1) \otimes \pi(s_2)$ pour $(s_1, s_2) \in G_1 \times G_2$. De plus $V_1 \otimes V_2$ est l'algèbre engendrée par $\pi(G_1 \times G_2)$, donc est dense dans V pour l'une quelconque des topologies, forte, faible, ultra-forte, ultra-faible.

4.2.- Corollaire

La boule unité de $V_1 \otimes V_2$ est dense dans la boule unité de V pour la topologie forte.

4.3.- Proposition (T. Turumaru [9]).

On a $A_1 \otimes A_2 \subset A$ et $A_1 \otimes A_2$ est partout dense en norme dans A. De plus, si $u = u_1 \otimes u_2 \in A$, avec $u_1 \in A_1$, $u_2 \in A_2$, on a

$$\|u\| \leqslant \|u_1\| \; \|u_2\| .$$

Soient $u_1 \in A_1$ et $u_2 \in A_2$; on peut écrire

$$u_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{i_1} * \eta_{i_1} \quad \text{avec} \quad \xi_{i_1} \in \mathcal{H}_1 \;;\; \eta_{i_1} \in \mathcal{H}_1 \;;\; \|u_1\| = \sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_{i_1}\| \; \|\eta_{i_1}\| \quad \text{, et}$$

$$u_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_{j_2} * \eta_{j_2} \quad \text{avec} \quad \xi_{j_2} \in \mathcal{H}_2 \;;\; \eta_{j_2} \in \mathcal{H}_2 \;;\; \|u_2\| = \sum_{j=1}^{\infty} \|\xi_{j_2}\| \; \|\eta_{j_2}\| .$$

d'où 4.4.-

$$\sum_{i,j} \|\xi_{i_1}\| \; \|\eta_{i_1}\| \; \|\xi_{j_2}\| \; \|\eta_{j_2}\| = \sum_{i,j} \|\xi_{i_1} \otimes \xi_{j_2}\| \; \|\eta_{i_1} \otimes \eta_{j_2}\| = \|u_1\| \; \|u_2\| .$$

Par suite $\sum_{i,j} (\xi_{i_1} \otimes \xi_{j_2}) * (\eta_{i_1} \otimes \eta_{j_2})$ appartient à A.

Soit $s = (s_1, s_2) \in G_1 \times G_2$; alors

$$\sum_{i,j} (\xi_{i_1} \otimes \xi_{j_2}) * (\eta_{i_1} \otimes \eta_{j_2})(s) = \sum_{i,j} ((\pi_1(s_1) \otimes \pi_2(s_2))(\xi_{i_1} \otimes \xi_{j_2}) | \eta_{i_1} \otimes \eta_{j_2})$$

$$= \sum_{i,j} (\pi_1(s_1)\xi_{i_1} | \eta_{i_1})(\pi_2(s_2)\xi_{j_2} | \eta_{j_2})$$

$$= u_1(s_1)\, u_2(s_2) = u_1 \otimes u_2(s) .$$

Donc $u_1 \otimes u_2$ appartient à A, les égalités (4.4.) montrent que

$$\| u_1 \otimes u_2 \| \leqslant \| u_1 \| \quad \| u_2 \| .$$

Soit maintenant $T \in V$ tel que $\langle T, u \rangle = 0$ pour tout u de $A_1 \otimes A_2$. Si T est non nul, il existe des vecteurs de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ tels que

$$(T(\sum_{i=1}^{n} \xi_{i_1} \otimes \xi_{i_2}) \Big| \sum_{j=1}^{p} \eta_{j_1} \otimes \eta_{j_2}) \neq 0 \quad \text{d'où}$$

$$\langle T, (\sum_{i=1}^{n} \xi_{i_1} \otimes \xi_{i_2}) * (\sum_{j=1}^{p} \eta_{j_1} \otimes \eta_{j_2}) \rangle \neq 0 \quad \text{soit}$$

$$\langle T, \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (\xi_{i_1} * \eta_{j_1}) \otimes (\xi_{i_2} * \eta_{j_2}) \rangle \neq 0 .$$

Ceci est contradictoire, donc $T = 0$ et $A_1 \otimes A_2$ est partout dense dans A.

4.5.- <u>Remarque</u>

En général on considère deux représentations σ_1 et σ_2 d'un même groupe G. La représentation $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ est définie comme représentation de G. L'algèbre de Von Neumann associée à $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ est alors une sous-algèbre du produit tensoriel des algèbres de Von Neumann VN_{σ_1} et VN_{σ_2}. D'après G. Arsac ([1]) l'application restriction à la diagonale de $G \times G$, est une application de $A_{\sigma_1} \otimes A_{\sigma_2}$ dans $A_{\sigma_1 \otimes \sigma_2}$. La proposition (2.37.) montre alors que $A_{\sigma_1 \otimes \sigma_2}$ est le quotient de l'espace de Fourier associé à la représentation $\sigma_1 \otimes \sigma_2$, considérée comme représentation de $G \times G$, par le sous-espace des fonctions nulles sur la diagonale de $G \times G$.

Sur $A_1 \otimes A_2$ on peut considérer trois normes :

$$\| u \|_{\wedge} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \| u_{i_1} \| \ \| u_{i_2} \| , \ u = \sum_{i=1}^{n} u_{i_1} \otimes u_{i_2} \right\}$$

$$\| u \| = \operatorname{Sup} \left\{ | \langle T, u \rangle | , \ T \in V , \ \| T \| \leqslant 1 \right\}$$

$$\lambda(u) = \operatorname{Sup} \left\{ | \langle T_1 \otimes T_2, u \rangle | , \ T_1 \in V_1, \ T_2 \in V_2, \ \| T_1 \| \leqslant 1, \ \| T_2 \| \leqslant 1 \right\} .$$

Soit $u \in A_1 \otimes A_2$; on a

4.6.- $\lambda(u) \leqslant \| u \| \leqslant \| u \|_\wedge$.

La première inégalité est évidente. La seconde résulte de (4.3.). D'autre part, de $\lambda(u_1 \otimes u_2) = \| u_1 \| \; \| u_2 \|$ et de (4.3.), on déduit $\| u_1 \otimes u_2 \| = \| u_1 \| \; \| u_2 \|$.

Soit $u = \sum_{i=1}^{n} u_{i_1} \otimes u_{i_2}$; alors, si on identifie u à l'opérateur $T_1 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} \langle T_1, u_{i_1} \rangle u_{i_2}$, on définit une isométrie i de $A_1 \otimes A_2$, muni de la norme λ, dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(V_1, A_2)$ muni de la norme d'opérateur. On note $A_1 \hat{\hat{\otimes}} A_2$ l'adhérence dans $\mathcal{L}(V_1, A_2)$ de $i(A_1 \otimes A_2)$, et l'on note λ la norme dans $A_1 \hat{\hat{\otimes}} A_2$.(Cf. R. Schatten, A theory of cross-spaces, Princeton university press, 1950).

Soit $u = \sum_{i=1}^{n} u_{i_1} \otimes u_{i_2}$ et soient $T_1 \in V_1$ et $T_2 \in V_2$. On a

$$i(u)T_1 = \sum_{i=1}^{n} \langle T_1, u_{i_1} \rangle \; u_{i_2} \text{ ; d'où}$$

$$\langle T_2, i(u)T_1 \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle T_1, u_{i_1} \rangle \langle T_2, u_{i_2} \rangle = \langle T_1 \otimes T_2, \sum_{i=1}^{n} u_{i_1} \otimes u_{i_2} \rangle .$$

On a donc

4.7.- $\langle T_2, i(u)T_1 \rangle = \langle T_1 \otimes T_2, u \rangle$.

Si maintenant $u \in A_1 \hat{\hat{\otimes}} A_2$, alors on a $u = \lim_n i(u_n)$.

Par suite $u(T_1) = \lim_n i(u_n)T_1$ d'où

4.8.- $\langle T_2, u(T_1) \rangle = \lim_n \langle T_1 \otimes T_2, u_n \rangle$.

D'après (4.6.), l'injection canonique $\hat{\hat{i}}$, de $A_1 \otimes A_2$ dans $A_1 \hat{\hat{\otimes}} A_2$ est continue si l'on met sur $A_1 \otimes A_2$ la norme de A et sur $A_1 \hat{\hat{\otimes}} A_2$ la norme λ . Et on a le résultat suivant :

4.9.- <u>Proposition</u>

L'application i se prolonge en une injection abaissant les normes, encore notée i, de A muni de la norme $\| \cdot \|$ dans $A_1 \hat{\hat{\otimes}} A_2$.

Soit $u \in A$, tel que $i(u) = 0$. On a donc pour $T_1 \in V_1$ et $T_2 \in V_2$, $\langle T_2, i(u)T_1 \rangle = 0$. D'après la proposition (4.3.), il existe une suite (u_n) d'éléments de $A_1 \otimes A_2$, telle que $\lim_{n \to \infty} \| u - u_n \| = 0$. On en déduit, d'une part que $\langle T, u \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle T, u_n \rangle$ pour $T \in V$, d'autre part que $\lim_{n \to \infty} i(u_n) = i(u) = 0$.

D'après (4.8.) on a, pour tout $T_1 \in V_1$, $T_2 \in V_2$,

$$\langle T_1 \otimes T_2, u \rangle = \lim_n \langle T_1 \otimes T_2, u_n \rangle = \langle T_2, i(u)T_1 \rangle = 0 \quad \text{donc} \quad u = 0.$$

4.10.- Corollaire
Soit u un élément positif de A ; alors $\lambda(u) = \|u\|$.

En effet, dans ce cas on a $\|u\| = \langle \pi(e),u\rangle = \langle \pi_1(e_1)\otimes\pi_2(e_2),u\rangle \leqslant \lambda(u)$.

Donc $\|u\| = \lambda(u)$.

§ 2.- Comparaison entre $A_{\pi_1\otimes\pi_2}$ et $A_{\pi_1}\hat{\otimes}A_{\pi_2}$.

D'après (4.6.) l'application identité de $A_1\otimes A_2$ se prolonge en une application continue $\hat{j} : A_1\hat{\otimes}A_2 \longrightarrow A$ et l'application $i\circ j$ est l'application canonique de $A_1\hat{\otimes}A_2$ dans $A_1\check{\otimes}A_2$. Pour que $i\circ j$ soit une injection il faut et il suffit (d'après 4.9.) que j soit une injection. C'est le cas lorsque l'espace A_1 (ou A_2) vérifie la propriété d'approximation ([6] prop. 35, p. 165), en particulier lorsque V_1 (ou V_2) vérifie la propriété d'approximation ([6] prop. 36, p. 167).

Si V_1 (ou V_2) est une algèbre commutative, V_1 est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{C}(\Omega)$, où Ω est un compact. Or $\mathcal{C}(\Omega)$ vérifie la propriété d'approximation, donc V_1 la vérifie aussi et on a le résultat suivant :

4.11.- Théorème
Pour que l'application canonique j de $A_1\hat{\otimes}A_2$ dans l'espace de Banach $(A, \|\cdot\|)$ soit une isométrie, il faut et il suffit que V_1 ou V_2 soit une algèbre commutative.

Supposons l'algèbre V_1 commutative. D'après ce qui précède j est une injection. D'autre part d'après M. Takesaki [8], la norme de $T\in V_1\otimes V_2$ est alors donnée par

$$\|T\| = \operatorname{Sup}\left\{|\langle T,\varphi_1\otimes\varphi_2\rangle| , \varphi_1\in V_1', \varphi_2\in V_2' , \|\varphi_1\|\leqslant 1, \|\varphi_2\|\leqslant 1\right\}.$$

4.12.- Lemme (R. Schatten)
Soit $T\in V_1\otimes V_2$ et soit $\mathcal{A}_1$ (resp $\mathcal{A}_2$) la boule unité de A_1 (resp. A_2). Alors on a

4.13.- $$\|T\| = \operatorname{Sup}\left\{|\langle T,u_1\otimes u_2\rangle| , u_1\in\mathcal{A}_1, u_2\in\mathcal{A}_2\right\}$$

Soit $T = \sum_{i=1}^{n} T_{i_1}\otimes T_{i_2}$ et, pour $j = 1,2$ soit $\varphi_j\in V_j'$, $\|\varphi_j\|\leqslant 1$.

Pour la topologie $\sigma(V_j', V_j)$ la boule $\mathcal{A}_j$ est dense dans la boule unité de V_j', pour $j = 1,2$. Par suite il existe des $u_{1\alpha}\in\mathcal{A}_1$ et des $u_{2\alpha}\in\mathcal{A}_2$ tels que $\varphi_1 = \lim_\alpha u_{1\alpha}$ et $\varphi_2 = \lim_\alpha u_{2\alpha}$. Donc, on a, pour $1\leqslant i\leqslant n$

$$\langle T_{i_1},\varphi_1\rangle = \lim_\alpha \langle T_{i_1}, u_{1\alpha}\rangle \text{ et } \langle T_{i_2},\varphi_2\rangle = \lim_\alpha\langle T_{i_2}, u_{2\alpha}\rangle.$$

Par suite

$$\langle T,\varphi_1\otimes\varphi_2\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle T_{i_1},\varphi_1\rangle\langle T_{i_2},\varphi_2\rangle = \lim_{\alpha,\beta}\sum_{i=1}^{n}\langle T_{i_1},u_{1\alpha}\rangle\langle T_{i_2}, u_{2\beta}\rangle$$

$$= \lim_{\alpha,\beta}\langle T, u_{1\alpha}\otimes u_{2\beta}\rangle$$

d'où 4.13.-

Soit $\Gamma(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ l'enveloppe convexe dans $A_1 \otimes A_2$, des éléments de la forme $u_1 \otimes u_2$, avec $u_1 \in \mathcal{A}_1$ et $u_2 \in \mathcal{A}_2$. Soit $\mathcal{A}$ la boule unité de A et $\mathcal{A}'$ celle de $A_1 \hat{\otimes} A_2$. On sait, d'après [6] (prop. 1, p. 28) que $\mathcal{A}'$ est l'adhérence dans $A_1 \hat{\otimes} A_2$ de $\Gamma(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$.

On a d'autre part,

$$j(\Gamma(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)) \subset j(\overline{\Gamma(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)}) \subset j(\mathcal{A}') \subset \mathcal{A}$$

car $\|j(u)\| \leqslant \|u\|_\wedge$ pour $u \in A_1 \hat{\otimes} A_2$. D'après (4.13.) $j(\Gamma(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2))$ est dense dans $\mathcal{A}$. Par suite, $\overline{j(\mathcal{A}')} = \mathcal{A}$ et j est une isométrie surjective (A. Grothendieck, Espaces vectoriels topologiques, Sao Paulo, 1964 ; corollaire 1, p. 54).

Réciproquement, si j est une isométrie, alors j est surjective, car $A_1 \otimes A_2$ est partout dense dans $A_1 \hat{\otimes} A_2$ et dans A. Par suite, on a $\mathcal{A} = j(\overline{\Gamma(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)})$, donc, pour $T \in V$,

$$\|T\| = \sup_{u \in \mathcal{A}} |\langle T, u \rangle| = \sup_{\substack{u_1 \in \mathcal{A}_1 \\ u_2 \in \mathcal{A}_2}} |\langle T, u_1 \otimes u_2 \rangle|$$

donc, d'après (4.12.), on a

$$\|T\| = \sup \left\{ |\langle T, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle| \ , \ \varphi_1 \in V_1', \ \varphi_2 \in V_2' \ , \ \|\varphi_1\| \leqslant 1, \ \|\varphi_2\| \leqslant 1 \right\}.$$

Alors, d'après M. Takesaki [8], V_1 ou V_2 est une algèbre commutative.

4.14.- Corollaire

Si G_1 ou G_2 est commutatif, alors $A_{\pi_1 \otimes \pi_2} = A_{\pi_1} \hat{\otimes} A_{\pi_2}$ pour toutes représentations π_1 et π_2.

Ce corollaire s'applique, en particulier, si l'on prend pour π_1 et π_2 les représentations régulières gauches. On obtient alors la formule

$$A(G_1 \times G_2) = A(G_1) \hat{\otimes} A(G_2).$$

§ 3.- Cas où π est irréductible : propriété d'approximation pour A_π.

Dans ce paragraphe nous montrons que si π_1 ou π_2 est irréductible, alors l'application $j : A_1 \hat{\otimes} A_2 \longrightarrow A$ est une injection.

4.15.- Proposition

Soit π une représentation irréductible de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$; alors l'espace A_π vérifie la propriété d'approximation métrique ([6] p. 178).

Il faut montrer que $Id_{A_\pi} \in \mathcal{L}(A_\pi, A_\pi)$ est adhérent, pour la topologie de la convergence compacte, à l'ensemble des opérateurs de rang fini, de A_π dans A_π. Sur la boule unité de $\mathcal{L}(A_\pi, A_\pi)$ la topologie de la convergence compacte est égale à la topologie de la convergence simple sur une partie partout dense de A_π. Nous prendrons F_π pour une telle partie dense.

Soit $\varepsilon > 0$ et $v_1, \ldots, v_n$ des éléments de F_π ; On va construire un opérateur de rang fini, T, sur A_π, de norme $\leqslant 1$ tel que

4.16.- $\quad \|T(v_k)-v_k\| \leqslant \varepsilon$ pour $1 \leqslant k \leqslant n.$

On peut écrire, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $v_k = \sum_{i=1}^{p_k} \xi_{ik} * \eta_{ik}$.

Soit $N = \underset{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant p_k}}{\mathrm{Max}} \left\{ p_k, \|\xi_{ik}\|, \|\eta_{ik}\| \right\}$ et $\gamma = \dfrac{\varepsilon}{2N^2}$.

Soit K un compact de $\mathcal{H}$ contenant les ξ_{ik} et les η_{ik}, pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et $1 \leqslant i \leqslant p_k$. L'espace hilbertien $\mathcal{H}$ vérifie la propriété d'approximation métrique ([6] p. 181, corollaire 2). Il existe donc un entier p, et pour $1 \leqslant i \leqslant p$, des éléments α_i et β_i de $\mathcal{H}$, tels que

4.17.- $$\left\| \sum_{i=1}^{p} (\xi \mid \alpha_i)\, \beta_i - \xi \right\| \leqslant \gamma \quad \text{pour } \xi \in K$$

et 4.18.- $$\left\| \sum_{i=1}^{p} (\xi \mid \alpha_i)\, \beta_i \right\| \leqslant \|\xi\| \quad \text{pour } \xi \in K.$$

Soient ξ et η dans K. On a les formules suivantes :

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} (\xi \mid \alpha_i) \beta_i * \eta - \xi * \eta \right\| = \left\| \left(\sum_{i=1}^{p} (\xi \mid \alpha_i) \beta_i - \xi \right) * \eta \right\| \leqslant \gamma \|\eta\|$$

et

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{p} (\xi \mid \alpha_i) \beta_i * \eta \right) - \left(\sum_{i=1}^{p} (\xi_i \mid \alpha_i) \beta_i \right) * \left(\sum_{i=1}^{p} (\eta \mid \alpha_i) \beta_i \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{p} (\xi \mid \alpha_i) \beta_i * \right.$$

$$\left. * \left(\eta - \sum_{i=1}^{p} (\eta \mid \alpha_i) \beta_i \right\| \leqslant \gamma \|\xi\| .$$

D'autre part

$$\left(\sum_{i=1}^{p} (\xi_i \mid \alpha_i) \eta_i \right) * \sum_{i=1}^{p} (\eta \mid \alpha_i) \beta_i = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} (\xi \mid \alpha_i) \left(\overline{\eta \mid \alpha_j} \right) \beta_i * \beta_j .$$

Or, il existe un unique $T_{ij} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) = VN_\pi$, tel que

$(T_{ij}(\xi') \mid \eta') = (\xi' \mid \alpha_i)(\overline{\eta' \mid \alpha_j})$ pour tous ξ' et η' de $\mathcal{H}$. On peut alors écrire

$$\left(\sum_{i=1}^{p} (\xi \mid \alpha_i) \beta_i \right) * \left(\sum_{i=1}^{p} (\eta \mid \alpha_i) \beta_i \right) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} (T_{ij} \xi \mid \eta) \beta_i * \beta_j .$$

On a donc

$$\|\xi * \eta - \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} (T_{ij}\xi | \eta)\beta_i * \beta_j\| \leqslant \|\xi * \eta - \sum_{i=1}^{p} (\xi | \alpha_i)\beta_i * \eta\| +$$

$$\|\sum_{i=1}^{p}(\xi|\alpha_i)\beta_i * \eta - \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p}(T_{ij}\xi|\eta)\beta_i * \beta_j\|$$

$$\leqslant \gamma\|\xi\| + \gamma\|\eta\| \leqslant 2N\gamma .$$

Ceci pour tous ξ et η dans K. Posons alors $u_{ij} = \beta_i * \beta_j$. Considérant v_k, on obtient :

$$\|v_k - \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \langle T_{ij}, v_k\rangle u_{ij}\| = \|\left(\sum_{m=1}^{p_k} \xi_{mk} * \eta_{mk}\right) - \sum_{m=1}^{p_k} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p}(T_{ij}\xi_{mk}|\eta_{mk})\beta_i * \beta_j\|$$

$$\leqslant p_k\, 2N\gamma \leqslant \varepsilon.$$

Il reste alors à démontrer que l'application continue de A_π dans A_π,
$v \longrightarrow \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \langle T_{ij}, v\rangle u_{ij}$ est de norme $\leqslant 1$.

On peut écrire $v = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i * \eta_i$ avec $\|v\| = \sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\|\,\|\eta_i\|$.

On a alors

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p}\langle T_{ij}, v\rangle u_{ij} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k|\alpha_i)(\overline{\eta_k|\alpha_j})\beta_i * \beta_j$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{i=1}^{p} (\xi_k|\alpha_i)\beta_i\right) * \left(\sum_{i=1}^{p}(\eta_k|\alpha_i)\beta_i\right)\right] \quad \text{d'où}$$

$$\|\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \langle T_{ij}, v\rangle u_{ij}\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|\xi_k\|\,\|\eta_k\| = \|v\| \quad \text{et le résultat.}$$

4.19.- <u>Corollaire</u>
Si π_1 ou π_2 est une représentation irréductible, alors $j : A_1 \hat{\otimes} A_2 \longrightarrow A$ est une injection.

En effet $i \circ j : A_1 \hat{\otimes} A_2 \longrightarrow A_1 \hat{\hat{\otimes}} A_2$ est une injection ([6] prop. 35, p. 165). Par suite j est une injection.

B I B L I O G R A P H I E

[1] G. ARSAC - Sur un espace fonctionnel associé à une représentation unitaire d'un groupe localement compact, C.R. Acad. Sc., t. 273, 1971, p. 298-300.

[2] N. BOURBAKI - Livre V : Espaces vectoriels topologiques, chap. 3-5 - Paris, Hermann 1955.

[3] J. DIXMIER - Les C^* - algèbres et leurs représentations - Paris, Gauthier -Villars, 1964.

[4] J. DIXMIER - Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de Von Neumann) - Paris, Gauthier -Villars, 1969 ; deuxième édition.

[5] P. EYMARD - L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 181-236.

[6] A. GROTHENDIECK - Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Memoirs of the American Mathematical Society, n° 16, 1955.

[7] G.W. MACKEY - Induced representation of locally compact groups, Ann of Math, t. 55, 1952, p. 101-139.

[8] M. TAKESAKI - On the cross-norm of the direct product of C^* - algèbres, Tohoku Math. Journal, t. 16, 1964, p. 111-122.

[9] T. TURUMARU - On the direct product of operator algebras, III, Tohoku Math. Journal, t. 6, 1954, p. 208-211.

Manuscrit remis le 1er mai 1972.

Paul NOUYRIGAT
Assistant
Département de Mathématiques
43, bd du 11 novembre 1918
59621 - VILLEURBANNE