PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

CHRISTINE CHARRETTON

DENIS RICHARD

Éléments d'une théorie non standard des groupes topologiques

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1972, tome 9, fascicule 2
, p. 1-29

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1972__9_2_1_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1972 t 9-2

ELEMENTS D'UNE THEORIE NON STANDARD DES GROUPES TOPOLOGIQUES

Christine CHARRETTON et Denis RICHARD

"... D'où il s'ensuit, que si quelqu'un n'admet point les lignes infinies et infiniment petites à la rigueur métaphysique et comme des choses réelles, il peut s'en servir sûrement et comme des notions idéales qui abrègent le raisonnement, semblables à ce qu'on appelle racines imaginaires dans l'analyse commune (comme par exemple $\sqrt{-2}$)."

LEIBNIZ (1702)

INTRODUCTION. - SKOLEM montra en 1934 qu'*aucun système axiomatique donné dans un langage du premier ordre ne pouvait caractériser l'arithmétique classique de façon catégorique*. Ce résultat fut obtenu en prouvant l'existence de structures (*modèles non standards*) où tout ce qui est valable en arithmétique classique le reste et qui contiennent, en plus, d'autres "entiers" (non intuitifs) que les entiers naturels.

Ces modèles non standards de l'arithmétique furent étudiés, quinze ans après, par HENKIN, KEISLER, MENDELSON et ROBINSON. A partir de 1960, les idées utilisées en arithmétique amenèrent ROBINSON à reprendre celles de LEIBNIZ concernant les *éléments infinitésimaux*, mais cette fois dans un formalisme qui les rende "opérationnelles".

ROBINSON fait remarquer dans l'introduction de son livre "Non Standard Analysis" que, du point de vue de l'Analyse (standard !), si la distance entre deux nombres (valeur absolue de leur différence) est *infiniment petite* (i.e. plus petite que tout nombre strictement positif), c'est que ces deux nombres coïncident. Cependant, ajoute-t-il, les quantités *infinitésimales* nous viennent à l'esprit comme outil de raisonnement et existent dans notre intuition. D'où l'idée, déjà développée par LEIBNIZ, d'introduire des nombres idéaux, infiniment grands ou infiniment petits par rapport aux nombres réels, mais *qui possèdent les mêmes propriétés qu'eux*. L'Analyse non standard permet cette introduction, en s'appuyant, comme le dit ROBINSON "... on the detailed analysis of the relation between mathematical languages and mathematical structures which lies at the botton of contemporary model theory".

Les applications mathématiques de la Théorie des Modèles à l'Analyse (ou à l'Algèbre...) utilisent toujours, parmi d'autres résultats, le théorème suivant conséquence des théorèmes de LÖWENHEIM-SKOLEM et du théorème dit de *finitude* ou de *compacité*, qu'on peut formuler ainsi :

Si M est une structure mathématique, $R(x,y)$ une relation binaire de domaine D_R contenue dans M, et si pour tout entier n, on a la propriété :

$$\forall a_1 \dots \forall a_n \exists b(a_1 \in M \wedge \dots \wedge a_n \in M \wedge b \in M \wedge R(a_1,b) \wedge \dots \wedge R(a_n,b))$$

alors il existe une structure M^*, dite *enlargement de* M, telle que

(1) Si une formule F est satisfaite en un point de M, F est satisfaite au même point de M^*,

(2) $\forall a \exists b_R (a \in D_R \wedge b_R \in M^* \wedge R^*(a,b_R))$

(R^* désigne ici la *ré-interprétation* de la relation R dans le modèle M^*).

Remarque. - (1) veut dire que toute formule satisfaite dans M, l'est dans M^* (M^* est une *immersion élémentaire* de M) ; (2) signifie que D_R est *bornée* pour R dans M^*.

Le but de ce premier article est de mettre en place une Théorie non Standard des Groupes Topologiques, en donnant des preuves non standards de résultats standards connus et en établissant un certain nombre de résultats non standards. D'une part il nous semble que cet article pourrait être ultérieurement utilisé pour l'étude de la structure des groupes abéliens localement compacts. D'autre part, il peut être envisagé d'aborder avec ce matériel beaucoup d'autres problèmes de Théorie des Groupes (mesure de Haar, produits locaux, ...) et éventuellement la Théorie de GALOIS infinie. Nous espérons aborder certaines de ces questions dans une prochaine publication.

PRELIMINAIRES ET NOTATIONS. - Soit G un groupe topologique, G^* un α-enlargement de G pour un ordinal limite α ([2] p. 16). La projection idéale A^* de A, une partie de G, est l'ensemble des éléments de A au sens de G^*. On écrira donc $x \in A^*$ pour exprimer l'appartenance de x à un ensemble A dans G^*. Plus généralement $G^* \models x \in I$ s'écrira, même si I n'est pas standard, $x \in I^*$.

$\mathcal{V}_e$ désignera le filtre des voisinages de l'élément neutre de G ; une première notion essentielle est celle de *monade* de e parcequ'elle est "l'ensemble" des éléments "infiniment proches" de e : on la notera $\mu_G(e)$ ou $\mu(e)$ et elle est égale à l'intersection des projections idéales des éléments de $\mathcal{V}_e$, soit :

$$\mu_G(e) = \bigcap_{V \in \mathcal{V}_e} V^*.$$

Une deuxième notion essentielle est celle de voisinage *infinitésimal* de e, contenu, au sens de G^*, dans la monade de e, et dont l'existence et les propriétés résultent du théorème rappelé dans l'introduction ; et on les trouvera en [1] p. 90. Les monades des points, x, de G, seront définies de façon strictement analogues, à partir des filtres de voisinages. On les notera $\mu_G(x)$ ou $\mu(x)$.

Une troisième et dernière notion essentielle est celle de points *quasi-standards* qui sont les points de G^* appartenant à la monade d'au moins un point de G. Ils permettent de caractériser les espaces quasi-compacts : A est un sous-espace quasi-compact d'un espace topologique X si et seulement si tous les *-points de A sont quasi-standards. On désignera par qs(A) l'ensemble des points quasi-standards qui appartiennent à la monade d'un point de A.

Dans [1] et [2] on trouve la traduction non-standard de la définition des groupes topologiques introduits comme groupes munis d'une topologie qui rend les applications $(x,y) \to xy$ et $x \to x^{-1}$ continues ; comme pour tout espace topologique, les monades des points caractérisent la topologie dans les groupes topologiques mais de plus dans ce dernier cas $\mu_G(e)$ est un sous-groupe de G^* qui suffit à cette caractérisation.

Les notations utilisées dans cet article sont en général celles de [1] et [2], avec, éventuellement, les mêmes "abus" : on écrira par exemple "contenu" au lieu de "*-contenu" s'il ne peut y avoir ambiguité. Le noyau d'un ensemble F de parties, noté Nuc(F), est l'intersection des projections idéales des éléments de F. Ainsi une monade est un noyau de filtre par exemple. L'existence d'infinitésimaux contenus dans $\mu(e)$, rappelée plus haut, est un cas particulier de la même propriété pour les familles de parties possédant la condition d'intersection finie : le noyau d'une telle famille contient également ses infinitésimaux.

1. - <u>DEFINITIONS STANDARDS ET NON STANDARDS DES GROUPES TOPOLOGIQUES</u>. Dans ce paragraphe, nous allons montrer l'équivalence entre les deux définitions standards suivantes : celle basée sur la continuité des opérations et celle s'appuyant sur des propriétés du filtre des voisinages de e. Nous donnerons ensuite une définition non-standard qui fait appel aux voisinages infinitésimaux de e, dont l'intérêt est, dans bien des démonstrations, d'éviter d'avoir à construire des voisinages particuliers.

(1.1) <u>THEOREME</u> (St.) *: Soit $\mathcal{U}$ une base d'ouverts en* e *du groupe topologique* G, *alors :*

(i) pour tout $U \in \mathcal{U}$, *il existe* $V \in \mathcal{U}$ *tel que* $V^2 \subset U$,

(ii) pour tout $U \in \mathcal{U}$, *il existe* $V \in \mathcal{U}$ *tel que* $V^{-1} \subset U$,

(iii) pour tout $U \in \mathcal{U}$, *pour tout* $x \in U$, *il existe* $V \in \mathcal{U}$ *tel que* $xV \subset U$,

(iv) pour tout $U \in \mathcal{U}$, *pour tout* $x \in G$, *il existe* $V \in \mathcal{U}$ *tel que* $xVx^{-1} \subset U$.

Preuve : Soit $I \in \mathcal{V}_e^*$ un voisinage infinitésimal de e. Comme $\mathcal{U}$ est une base pour $\mathcal{V}_e$, $I \in \mathcal{U}^*$ (Th. 5.1.2 [2]). On a donc pour tout U appartenant à $\mathcal{U}$:

$U^* \supset \mu(e) = \mu(e) \, . \, \mu(e) \supset I^* . \, I^*$,
$U^* \supset \mu(e) = (\mu(e))^{-1} \supset (I^*)^{-1} = (I^{-1})^*$;

par ailleurs, puisque U est ouvert, U^* contient la monade de chacun des points de U et par conséquent :

$\forall x((x \in U) \wedge (U^* \supset \mu(x) = x\mu(e) \supset xI^*))$.

Ces trois propriétés du modèle G, ré-interprétées dans G^*, prouvent (i), (ii), (iii). Cette ré-interprétation est aisée : nous allons l'expliciter pour (iv). D'après le Th. 5.7.2. ([2]) $\mu(e)$ est un sous-groupe distingué de qs(G), on a donc, pour tout élément x de G, $x\mu(e)x^{-1} = \mu(e)$, et par suite $xI^* x^{-1} \subset U^*$, pour tout U de $\mathcal{U}$ et tout x de U. On a :

$G^* \vdash \exists I((I \in \mathcal{V}_e) \wedge (xIx^{-1} \subset U))$, et par suite
$G \vdash \exists I((I \in \mathcal{V}_e) \wedge (xIx^{-1} \subset U))$.

Nous allons prouver un lemme non standard qui permet de montrer la réciproque du théorème ci-dessus. On obtiendra ainsi la structure de groupe topologique par la caractérisation classique de $\mathcal{V}_e$.

(1.2) LEMME (N.St.) : *Soit $\mathcal{U}$ une famille de parties de* G, *groupe topologique vérifiant la condition d'intersection finie ainsi que les conditions (i), (ii), (iii), (iv) du théorème précédent ; $\mathcal{U}$ satisfait les propositions suivantes :*

(1) Nuc($\mathcal{U}$) *est un sous-groupe de* G,

(2) pour tout g *de* G^*, gNuc($\mathcal{U}$) = Nuc($\mathcal{U}$)g.

Preuve : L'ensemble Nuc($\mathcal{U}$) dont il s'agit est tout d'abord non vide comme il est montré au Th. 2.4.1. ([4]).

Soient x et y deux éléments de Nuc($\mathcal{U}$) ; x et y appartiennent à U^* pour tout U de $\mathcal{U}$. Pour tout U de $\mathcal{U}$, il existe V et W éléments de $\mathcal{U}$ tels que $VW^{-1} \subset U$, d'après les conditions (i) et (ii) du théorème précédent. Par suite $xy^{-1} \in V^* W^{-1*}$, soit $xy^{-1} \in U^*$. L'élément xy^{-1} est donc dans Nuc($\mathcal{U}$), ce qui achève la démonstration de (1).

Montrons que pour tout y de Nuc(U), et pour tout x de G, xyx^{-1} appartient à Nuc(U). Pour un U quelconque de U et pour tout x de G, il existe V de U, tel que $xV^{*}x^{-1} \subset U^{*}$, donc $xyx^{-1} \in U^{*}$.

Remarque : Si $\widetilde{U}$ est l'ensemble des intersections finies d'éléments de U, et si $\tilde{\tilde{U}}$ est le filtre engendré par $\widetilde{U}$, alors d'après le Th. 5.1.1. ([2]), Nuc($\tilde{\tilde{U}}$) = Nuc($\widetilde{U}$) = Nuc(U). Dès qu'il est question de filtres, on voit ici que l'analyse non standard permet de raisonner sur le noyau d'une famille de parties engendrant le filtre pour étudier ce dernier.

Les deux résultats précédents permettent maintenant d'introduire la définition qui suit :

(1.3) DEFINITION (St.) : *Si* U *est une famille de parties d'un groupe topologique* G *et si* U *vérifie les conditions du lemme précédent,* G *est alors un groupe topologique dont tout élément* x *admet pour filtre de voisinages le filtre engendré par les* xU(U ∈ U), *qui en constituent une sous-base ouverte.*

Justification : Les éléments de U sont ouverts par construction. Nuc(U) est un sous-groupe qui vérifie les conditions du lemme précédent, donc du Th. 5.7.3. ([2]). Par conséquent U définit une topologie qui est celle du groupe topologique donné.

Cette définition est la caractérisation classique de G comme groupe topologique à partir d'une sous-base U de V_e. Nous sommes naturellement conduits par cette dernière définition à introduire une définition non standard des groupes topologiques à partir des voisinages infinitésimaux, dont on sait qu'en tant qu'objets internes de G^{*}, ils vérifient les conditions du Th. 1.1. ci-dessus.

(1.4) THEOREME-DEFINITION (N.St.) :

(1) Soit G *un groupe topologique ; soient* I *et* J *deux éléments infinitésimaux de* V_e. *Pour tout* g *de* G *et tout* x *de* Nuc(V_e)

(a) $gxIJ^{-1}x^{-1}g^{-1}$ *est élément infinitésimal de* V_e ,
(b) $Nuc(V_e) = \bigcup I^*$ (I *voisinage infinitésimal de* V_e).

(2) Soit F *un filtre de parties d'un groupe* G, *qui contiennent toutes* e *et vérifiant :*
(a) $Nuc(F) = \bigcup I^*$ (I *élément infinitésimal de* F,
(b) Pour tout I *et tout* J *de* F^*, *pour tout* g *de* G *et pour tout* x *de* Nuc(F), $gxIJ^{-1}x^{-1}g^{-1}$ *est un infinitésimal de* F.

Le groupe G *est dans ce cas un groupe topologique dont la topologie est définie par les* xF ($F \in F$) *qui constituent un filtre de voisinages du point* x, *pour tout* x *de* G.

Preuve : (1)(a) I et J étant des objets internes de G^*, le résultat vient de la ré-interprétation des conditions (i), (ii), (iv) du théorème 1.1. ci-dessus.

(b) $Nuc(V_e) = \mu(e)$ par définition. Soit $x \in \mu(e)$ et I un élément infinitésimal de V_e, alors xI^* est contenu dans $\mu(e)$ car $\mu(e)$ est un sous-groupe de G ; $xI^* \cup I^*$ est contenu dans $\mu(e)$ et c'est un élément de V_e^* puisqu'il contient I^*. On a donc :

$$\cup I^* (\text{I élément infinitésimal de } V_e) \supset \mu(e).$$

L'inclusion inverse est évidente puisque tout infinitésimal est contenu dans $\mu(e)$.

(2) Pour démontrer que G est un groupe dont la topologie est donnée par les xF ($F \in F$), il suffit de vérifier les deux conditions du Th. 5.7.3. ([2]). Nuc(F) est bien un sous-groupe puisque si x et y sont deux éléments de Nuc(F), on sait d'après (2)(a) qu'il existe deux éléments infinitésimaux I et J tels que $x \in I^*$ et $y \in J^*$ et on sait par suite de (2)(b) que $xy^{-1} \in (IJ^{-1})^* \subset Nuc(F)$. Montrons maintenant que pour tout g de G, $gNuc(F) \subset Nuc(F)g$. Si $x \in Nuc(F)$ on a $gxg^{-1} \in gI^*g^{-1}$ pour un élément I infinitésimal au moins à cause de (2)(a). et, à cause de (2)(b), $gI^*g^{-1} \subset Nuc(F)$. Finalement $gNuc(F)g^{-1} \subset Nuc(F)$.

2. - QUELQUES PROPRIETES ELEMENTAIRES DES GROUPES TOPOLOGIQUES. Nous allons retrouver de façon non standard les propriétés de régularité, d'existence de voisinages symétriques, de transfert par produit des propriétés d'ouverture, de fermeture ou de compacité.

(2.1) THEOREME (St.) : *Soit* G *un groupe topologique,*

(1) Soit $\mathcal{U}$ *une base ouverte de* $\mathcal{V}_e$ *; pour tout* $U \in \mathcal{U}$ *il existe* $V \in \mathcal{V}_e$ *tel que* $\overline{V} \subset U$,

(2) il existe une base $\mathcal{U}'$ *de* $\mathcal{V}_e$*, telle que pour tout* $U \in \mathcal{U}'$, $U = U^{-1}$.

(3) Si G *est* T_0*-séparé, il est* T_2*-séparé, c'est-à-dire d'HAUSDORFF.*

Preuve : Les définitions de T_i-séparation pour i = 0, 1, 2, 3, 4 sont données dans [5]. $\overline{V}$ désigne la fermeture topologique de V.

(1) Soit $V \in \mathcal{V}_e$ tel que $V^2 \subset U$. Soit $x \in \overline{V}$, i.e. tel que $\mu(x) \cap V^* \neq \emptyset$; on a, pour un η de $\mu(e)$, $x \in V^* \eta^{-1} \subset V^{*2} \subset U^*$.

(2) Soit $\mathcal{U}' = \{U^{-1} \cap U \; (U \in \mathcal{U})\}$; d'après le Th. 5.1.2 ([2]), $\mathcal{U}'$ est une base de $\mathcal{U}$: nous avons en effet démontré au Th. 1.4 que si I est un élément infinitésimal de $\mathcal{U}$, $I \cap I^{-1}$ en était un aussi et ce dernier élément appartient à $\mathcal{U}'$.

(3) Ce résultat est démontré en [2], p. 35 et est rappelé ici pour mémoire.

Le résultat suivant anticipe un peu sur le paragraphe qui traitera de la compacité : il est très simple et, comme nous l'avons déjà mentionné, la caractérisation non standard qu'il utilise est celle qui définit les espaces quasi-compacts comme ceux dont la projection idéale est formée de points quasi-standards.

(2.2) THEOREME (St.) : *Soit* G *un groupe topologique et* A *et* B *deux sous-ensembles de* G*,*

(1) si A *est ouvert,* AB *et* BA *le sont,*

(2) si A *et* B *sont compacts,* AB *l'est aussi ,*

(3) si A *est fermé et* B *compact,* AB *et* BA *sont fermés.*

Preuve : (1) Montrons que $(AB)^*$ contient la monade de chacun des points de AB, ce qui est une condition nécessaire et suffisante pour que AB soit ouvert. Pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, nous avons :

$$\mu(ab) = \mu(a)b \text{ (Th. 5.7.1 [2]) } \subset (AB)^* .$$

(2) Si a' et b' sont des points de A^* et de B^* respectivement, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $a' \in \mu(a)$ et $b' \in \mu(b)$ (Th. 5.5.1. [2]), on a alors $a'b' \in \mu(a)\,\mu(b) = \mu(ab)$. Tout élément de $(AB)^*$ est donc proche d'un point de AB.

(3) Nous citons ce résultat pour mémoire, il est démontré dans [2] p.36.

Le théorème qui suit sera utilisé pour montrer que l'adhérence d'un sous-groupe topologique est un sous-groupe ; il présente également un intérêt intrinsèque.

(2.3) THEOREME (St.) : *Soit* G *un groupe topologique,* A *et* B *des parties de* G, *alors :*
$\overline{A}.\overline{B} \subset \overline{AB}$; $(\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$; $x\overline{A}y = \overline{xAy}$ *pour tout* x *et tout* y *éléments de* G.

Preuve : Dire que $a \in \overline{A}$ et que $b \in \overline{B}$ équivaut à dire qu'il existe x et y dans G^* tels que $x \in \mu(a) \cap A^*$ et que $y \in \mu(b) \cap B^*$. Il vient donc $xy \in \mu(ab) \cap (AB)^*$, ce qui implique que $ab \in \overline{AB}$.

$(\overline{A})^{-1} \subset \overline{A^{-1}}$ puisque $\mu(a) \cap A^* \neq \emptyset$ implique $\mu(a^{-1}) \cap (A^{-1})^* \neq \emptyset$.

Enfin, s'il existe $z \in \mu(a) \cap A^*$ et si x et y sont des points de G, $xzy \in \mu(xay) \cap (xAy)^*$ et par suite $x\overline{A}y \subset \overline{xAy}$. L'égalité cherchée vient de l'inclusion inverse obtenue en multipliant convenablement par x^{-1} et y^{-1}.

3. - SOUS-GROUPES TOPOLOGIQUES. Il est naturel de voir si, comme dans le cas des groupes topologiques, la monade de e permet la caractérisation de la topologie induite. Puisque les voisinages de e pour la topologie induite sur un

sous-groupe H par un groupe topologique G sont de la forme $V \cap H$, où $V \in \mathcal{V}_e$, posons :

$$\mu_H(e) = \mu(e) \cap H^*$$

Cette définition est justifiée dans la preuve du théorème suivant.

(3.1) THEOREME-DEFINITION (St.) : *Soit* G *un groupe topologique et* H *un sous-groupe de* G*, alors la topologie induite sur* H *par* G *fait de* H *un groupe topologique.*

H *sera dit sous-groupe topologique de* G.

Preuve : $\mu_H(e)$ est bien un noyau de filtre de voisinages de e puisque $\mu_H(e) = \left(\bigcap_{V \in \mathcal{V}_e} V^* \right) \cap H^* = \bigcap_{V \in \mathcal{V}_e} V^* \cap H^* = \bigcap_{V' \in \mathcal{V}'_e} V'^*$. où $\mathcal{V}'_e$ désigne le filtre des voisinages de e dans H.

$\mu(e) \cap H^*$ est un sous-groupe de H^*, tel que pour tout h de H, $h\mu_H(e) = \mu_H(e)h$; ces propriétés suffisent pour faire de H un groupe topologique d'après [2], Th. 5.7.3..

Nous allons maintenant retrouver rapidement les propriétés habituelles des sous-groupes topologiques d'un groupe topologique.

(3.2) THEOREME (St.) :

(1) Si H *est un sous-demi-groupe, un sous-groupe, ou un sous-groupe distingué de* G*, groupe topologique, il en est respectivement de même pour* $\overline{H}$,

(2) Pour que le sous-groupe H *soit ouvert, il faut et il suffit qu'il ait un point intérieur,*

(3) Pour que le sous-groupe H *soit discret, il faut et il suffit qu'il ait un point isolé,*

(4) Tout sous-demi-groupe unitaire ouvert de G *est fermé.*

Preuve : (1) Si x et y sont éléments de $\overline{H}$ où H est un demi-groupe, il existe $x' \in \mu_G(x) \cap H^*$ et il existe $y' \in \mu_G(y) \cap H^*$. Par conséquent $x'y' \in \mu_G(xy) \cap H^*$. Donc $xy \in \overline{H}$. De plus si H est un sous-groupe, il existe $x' \in \mu_G(x^{-1}) \cap H^*$, donc $x'y' \in \mu_G(x^{-1}y) \cap H^*$. Si H est distingué dans G et si $y \in \overline{H}$, alors pour tout x de G, $\mu_G(y) \cap H^* \neq \emptyset$ entraîne $\mu_G(xyx^{-1}) \cap H^* \neq \emptyset$, car H^* est, par ré-interprétation, distingué dans G^*.

(2) Soit p un point intérieur à H et soit $q \in H$. On sait que $\mu_G(p) \subset H^*$ et que $qp^{-1}\mu_G(p) \subset H^*$, d'où $\mu_G(q) \subset H^*$ et par conséquent H est un voisinage de q. La réciproque est immédiate.

(3) D'après le théorème 5.3.3. (iv) de [2], un point est isolé si et seulement si sa monade se réduit à lui-même. Soit p un point isolé de H, alors $\mu_H(p) = \{p\}$ et en conséquence, pour tout $q \in H$, $\mu_H(q) = qp^{-1}\mu_H(p) = \{q\}$. Ceci montre que tout point de H est isolé et qu'ainsi la topologie induite sur H est discrète. La réciproque est évidente.

(4) Soit H un sous-demi-groupe unitaire ouvert, on sait que $\mu_G(e) \subset H^*$. Soit $y \in \overline{H}$, il existe donc $h \in \mu_G(y) \cap H^*$ et par suite $\mu_G(y) = h\mu_G(e)$.

. Par conséquent $\mu_G(y)$ est contenu dans $H^*. H^* = H^*$. L'élément y, étant standard et appartenant à H^*, appartient à H, c.q.f.d..

4. - <u>QUELQUES PROPRIETES NON STANDARDS DES GROUPES TOPOLOGIQUES</u>. Rappelons la définition donnée par ROBINSON de la Q-topologie de G^* : c'est la topologie pour laquelle les ouverts internes constituent une base.

Nous avons un premier résultat important :

(4.1) <u>THEOREME</u> (N.St.) : *La Q-topologie fait de G^* un groupe topologique.*

Preuve : Montrons que la multiplication est continue pour la Q-topologie dans G^*. Soit x et y deux éléments de G^* et soit Z un Q-ouvert contenant xy, c'est-à-dire un Q-voisinage de xy. Il existe un ouvert interne T tel que $T^* \subset Z^*$. L'assertion suivante est satisfaite :

$G \vdash \forall x \forall y \forall T \exists V \exists W((x \in G) \wedge (y \in G) \wedge (T \in \mathcal{V}_{xy}) \wedge (V \in \mathcal{V}_x) \wedge (W \in \mathcal{V}_y) \wedge (VW \subset T))$,

par suite,

$G^* \vdash \forall x \forall y \forall T \exists V \exists W((x \in G) \wedge (y \in G) \wedge (T \in \mathcal{V}_{xy}) \wedge (V \in \mathcal{V}_x) \wedge (W \in \mathcal{V}_y) \wedge (VW \subset T))$.

Ceci montre qu'étant donné un voisinage interne T de xy, il existe deux ouverts internes contenant respectivement x et y dont le produit soit inclus dans T^*. Par ailleurs nous savons que tout ouvert interne est un Q-ouvert (Th. 4.2.9. [1]). Si $\mathcal{V}^Q_\alpha$ désigne le filtre des Q-voisinages d'un point α de G^*, nous pouvons affirmer :

$$\forall Z \exists V \exists W((Z \in \mathcal{V}^Q_{xy}) \wedge (V \in \mathcal{V}^Q_x) \wedge (W \in \mathcal{V}^Q_y) \wedge (V^* W^* \subset Z^*))$$

L'application $(x,y) \to xy$ est Q-continue dans G^*. De même on montrerait que l'application $x \to x^{-1}$ est Q-continue dans G^*.

(4.2) THEOREME (N.St.) :

(1) Le sous-groupe $\mu(e)$ *est Q-ouvert dans* G^*.

(2) Le sous-groupe $qs(G)$ *est Q-ouvert dans* G^* *et contient la Q-fermeture de* G *dans* G^*, $\overline{G}^Q$,

(3) Si G *est séparé,* G^* *est Q-séparé et* $G = \overline{G}^Q$.

Remarque : Les sous-groupes ci-dessus sont Q-fermés lorsqu'ils sont Q-ouverts, en vertu du théorème 3.2. ([4]) précédent.

Preuve : On a vu au théorème 1.4. que $\mu(e)$ est l'union d'ouverts internes (les éléments infinitésimaux de $\mathcal{V}_e$), par suite $\mu(e)$ est Q-ouvert. On sait que $\mu(e)$ n'est pas interne si $\mu(e) \neq \{e\}$.

(2) $qs(G) = G\mu(e)$ permet de dire que $qs(G)$ est Q-ouvert comme produit d'un Q-ouvert avec un sous-ensemble quelconque de G^*, d'après le théorème 2.2. précédent ; comme $G \subset qs(G)$, la remarque permet de conclure. $qs(G)$ n'est pas non plus un ouvert interne.

(3) G étant séparé, G^* est Q-séparé par ré-interprétation et compte tenu du fait que les ouverts internes forment une base de G. Soit maintenant $y \in \overline{G}^Q$ et $y \notin G$. Puisque $\overline{G}^Q \subset qs(Q)$, il existe $x \in G$ tel que $y \in \mu(x)$. Soient O_x et O_y des Q-voisinages de x et y respectivement tels que $O_x \cap O_y = \emptyset$. Les Q-voisinages $\mu(x) \cap O_x$ et $\mu(x) \cap O_y$ de x et y respectivement sont disjoints, et il existe par conséquent un z différent de x dans $\mu(x) \cap O_y$, lequel z appartient à G. Ainsi y aurait-il si y n'était pas dans G dans $\mu(x)$ deux éléments distincts de G, en contradiction de l'hypothèse de séparation faite sur ce dernier.

5. - ESPACES QUOTIENTS D'UN GROUPE PAR UN SOUS-GROUPE TOPOLOGIQUE - GROUPES QUOTIENTS.

Du fait de l'isomorphisme canonique entre G^*/H^* et $(G/H)^*$, dans le modèle G^*, nous pouvons considérer les éléments de $(G/H)^*$ comme les classes a^* des éléments de G^* modulo le sous-groupe H^*.

Comme pour les sous-groupes, la topologie quotient sera encore définie par les monades, et même par la monade de l'élément neutre H du groupe G/H si H est distingué dans G.

(5.1) DEFINITION (N.St.) : *On appelle monade de* xH *dans l'espace quotient du groupe topologique* G *par le sous-groupe topologique* H, *l'ensemble :*
$\mu_{G/H}(xH) = \{a \in (G/H)^* \ (a^* = x'H^* \wedge x' \in \mu_G(x))\}$

(5.2) THEOREME (St.) :
(1) Les monades de G/H *déterminent une topologie pour laquelle les voisinages de* xH *sont les* $\{uH \ (u \in U \wedge U \in \mathcal{V}_x)\}$,
(2) pour cette topologie, l'application canonique ϕ *de* G *dans* G/H *est continue et ouverte,*
(3) cette topologie est la plus fine qui rende ϕ *continue.*

Preuve. Par construction de la topologie déterminée par les monades, un ouvert contenant xH dans G/H est un ensemble W de classes yH, où y parcourt un ensemble E de G de telle sorte que $W^* \supset \mu_{G/H}(xH)$, ce qui peut encore s'écrire :

$$\{x'H \ (x' \in \mu_G(x)\} \subset \{yH \ (y \in E^*)\}.$$

Par suite $E^* \supset \mu_G(x)$, et en conséquence E est un voisinage de x dans G. Remarquons que nous retrouvons ainsi la topologie habituelle d'un espace quotient de groupe topologique par un de ses sous-groupes.

(2) Rappelons qu'une application f d'un espace topologique X dans un espace topologique Y est continue si et seulement si, pour tout x de X, $f^*(\mu_X(x)) \subset \mu_Y(f(x))$; elle est ouverte si et seulement si on a l'inclusion inverse. Il en est ainsi pour un enlargement comme celui dans lequel nous nous sommes placés au début de l'exposé.

Il nous suffit ici de montrer l'égalité de $\mu_{G/H}(\phi(x))$ avec $\phi^*(\mu_G(x))$. Par définition :

$$\begin{aligned}\mu_{G/H}(\phi(x)) &= \{a \in (G/H)^*(a^* = x'H^* \wedge x' \in \mu_G(x))\} \\ &= \{a \in (G/H)^*(a^* = \phi^*(x') \wedge x' \in \mu_G(x))\} = \phi^*(\mu_G(x)).\end{aligned}$$

Ces égalités prouvent que ϕ est continue et ouverte.

(3) Soit τ une topologie plus fine que celle précédemment définie : nous devons donc avoir pour un x au moins de G :

$$\mu_{G/H}(\phi(x)) \underset{\neq}{\supset} \mu_\tau(\phi(x)).$$

De cette inclusion stricte on peut déduire que :

$$\phi^*(\mu_G(x)) \underset{\neq}{\supset} \mu_\tau(\phi(x)),$$

ce qui contredit la continuité de ϕ comme application de G muni de sa topologie initiale dans G/H muni de la topologie τ.

Le résultat, concernant la régularité des espaces quotients que nous considérons, sera établi à l'aide du lemme suivant :

(5.3) <u>LEMME</u> (St.) : *Soit* G *un groupe topologique et* H *un sous-groupe topologique de* G *; si* U *et* V *sont des voisinages de* e *tels que* $V^2 \subset U$ *et si* ϕ

est l'application canonique usuelle, $\overline{\phi(xV)} \subset \phi(xU)$*, pour tout* $x \in G$.

Preuve. L'appartenance de yH à $\overline{\phi(xV)}$ implique l'existence d'éléments $\eta \in \mu_G(e)$, $v \in V^*$, h et h' de H^* tels que $yh = xvh'$ et par suite d'un $\eta' \in \mu_G(e)$ (du fait que $\mu_G(e)$ est distingué dans $qs(G)$ qui contient G) tel que $yh = x\eta' vh'$. Puisque η' est élément de $\mu_G(e)$ lui même contenu dans V^*, on a :

$$yh \in xV^* V^* H^* \subset xU^* H^* \quad \text{et} \quad yH \in \phi(U)^*.$$

Comme yH est standard, yH est nécessairement dans $\phi(U)$, c.q.f.d..

Venons en maintenant aux résultats annoncés plus haut :

(5.4) THEOREME (St.) : *Soit* G *un groupe topologique,* H *un de ses sous-groupes,* ϕ *l'application canonique habituelle :*

(1) G/H *est discret si et seulement si* H *est ouvert dans* G*,*

(2) G/H *est régulier ; si* H *est fermé,* G/H *est même espace d'HAUSDORFF,*

(3) Si G/H *est* T_o*-séparé, alors* H *est fermé et* G/H *est un espace régulier.*

Remarque. La régularité considérée ici est celle définie par Kelley dans [5] ; elle n'implique pas la séparation.

Preuve. (1) si H est ouvert, pour tout x de G, xH l'est aussi et $\mu_G(x) \subset xH^*$. Ceci prouve que $\mu_{G/H}(xH) = \{xH\}^* = \{xH\}$ et par conséquent que G/H est discret. Réciproquement si G/H est discret, la monade de chacun des points de G/H se réduit à ce point et $\mu_{G/H}(H) = \{H\}$. Pour tout $\eta \in \mu_G(e)$, on doit donc avoir $\eta H^* = H^*$, et par suite $\mu_G(e) \subset H^*$, ce qui signifie l'ouverture de H.

(2) Le lemme 5.3 prouve que G/H est régulier : en effet tout voisinage U de e contenant le produit V^2 pour un V de $\mathcal{V}_e$, l'inclusion $\overline{\phi(xV)} \subset \phi(xU)$ assure l'existence d'un système de voisinages fermés de l'élément xH.

(3) Un espace T_1-séparé et régulier étant d'HAUSDORFF ([5]), montrons que, lorsque H est fermé, chaque $\{xH\}$ est fermé dans G/H et nous aurons la propriété annoncée. Soit $yH \in \overline{\{xH\}}$; cette appartenance s'écrit :

$\mu_{G/H}(yH) \cap \{xH\}^* \neq \emptyset$ ou encore $xH \in \mu_{G/H}(yH)$. Il existe alors $y' \in \mu_G(y)$ tel que $xH^* = y'H^*$. D'une part, $x^{-1}y' \in \mu_G(x^{-1}y)$ et d'autre part $x^{-1}y' \in H^*$. De cela, il résulte que $\mu_G(x^{-1}y) \cap H^* \neq \emptyset$, donc que $x^{-1}y \in \bar{H} = H$ et que $yH = xH$.

Supposons maintenant que G/H soit T_0-séparé. Si $x \in H$, $\mu_G(x) \cap H^* \neq \emptyset$, et pour un η de $\mu_G(e)$, $xH^* = \eta H^*$. Cette égalité impliquant que $xH^* \in \mu_{G/H}(H)$, donc que $H^* \in \mu_{G/H}(xH)$, l'hypothèse de séparation assure que $xH = H$ et que $x \in H$.

(5.5) <u>COROLLAIRE</u> (N.St.) : *L'espace quotient* $qs(G)/\mu(e)$ *où* $qs(G)$ *et* $\mu(e)$ *sont considérés comme sous-groupes Q-topologiques de* G^*, *est discret.*

Preuve. Le théorème précédent et le fait que $\mu(e)$ soient Q-ouvert (théorème 4.2 ci-dessus) fournissent le résultat.

Remarque. L'isomorphisme algébrique entre G et $qs(G)/\mu(e)$, remarqué par ROBINSON (th. 8.1.9 [1]) lorsque la topologie de départ de G est séparée, devient ici topologique. En effet la Q-topologie induit sur G la topologie discrète si G est séparé : $\mu(x) \cap G = \{x\}$, $\mu(x)$ Q-ouvert pour tout x de G ; puisque le corollaire ci-dessus assure la discrétude de $qs(G)/\mu(e)$, la remarque est justifiée.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où le sous-groupe H du groupe topologique G est distingué dans G ; on a évidemment :

(5.6) <u>THEOREME</u> (St.) : *Si* H *est un sous-groupe distingué du groupe topologique* G, *l'espace quotient* G/H *est un groupe topologique, pour la multiplication naturelle de* G/H.

Preuve. Utilisant le théorème 5.7.3 de [2], il nous suffit ici de montrer que $\mu_{G/H}(H)$ est un sous-groupe nucléaire (noyau d'un filtre) vérifiant, pour tout xH de G/H, $xH\mu_{G/H}(H) = \mu_{G/H}(H)xH$.

$\mu_{G/H}(H)$ est un sous-groupe car $\mu_G(e)$ en est un, du fait que l'application ϕ est continue et ouverte. $\mu_{G/H}(H)$ peut s'écrire :

$$\{uH^*(u \in U^* \wedge U \in V_e)\} = \bigcap_{U \in V_e} \{uH^*(u \in U)\}^{\lambda} .$$

ce qui montre que $\mu_{G/H}(H)$ est nucléaire.

$\mu_G(e)$ étant distingué dans qs(G), on a, pour tout uH^* de $\mu_{G/H}(H)$ et pour tout x de G :

$$xHuH^* = xuH^* = uxH^* \subset uHxH^* ,$$

du fait que $u \in \mu_G(e)$.

La fin de ce paragraphe est consacrée à la démonstration des résultats classiques concernant les homomorphismes et isomorphismes topologiques de groupes topologiques.

(5.7) THEOREME (St.) : *Soit* G *et* $\tilde{G}$ *deux groupes topologiques d'éléments neutres respectifs* e *et* $\tilde{e}$ *; soit* f : $G \to \tilde{G}$ *un morphisme continu, ouvert de* G *sur* $\tilde{G}$. *L'application* $\phi : \tilde{G} \to G/f^{-1}(\tilde{e})$ *telle que* $\phi(\tilde{x}) = f^{-1}(\tilde{x})$ *est un homéomorphisme et un isomorphisme de* G *sur* $\tilde{G}/f^{-1}(\tilde{e})$ *, muni de sa structure de groupe topologique quotient.*

Preuve. ϕ étant évidemment un isomorphisme de groupe, le théorème résulte des égalités entre monades que nous allons démontrer. Remarquons que si M^* est un α-enlargement pour un ordinal limite α tel que nous ayons une immersion élémentaire de G^* et de $\tilde{G}^*$ dans M^*, nous pouvons écrire :

$M^* \models \forall \tilde{x}((\tilde{x} \in \tilde{G}) \wedge (\tilde{x}f^{-1}(\tilde{e}) = \phi(\tilde{x}) = \phi(\tilde{x})\ \phi(\tilde{e}))$ puisque cette assertion vraie dans G, le reste dans M^*. La preuve du théorème se réduit alors aux égalités :

$$\mu_{G/f^{-1}(\tilde{e})}(\phi(\tilde{e})) = \{x'\phi(\tilde{e})^*(x' \in \mu_G(e))\} = \{\phi^*(\tilde{x}')(\tilde{x}' \in \mu_{\tilde{G}}(\tilde{e}))\} = \phi^*(\mu_{\tilde{G}}(\tilde{e})) \text{ où } x' = \phi^*(\tilde{x}').$$

(5.8) THEOREME (St.) : *Soit* G *un groupe topologique,* H *un sous-groupe distingué et* L *un sous-groupe quelconque de* G. *Si* ϕ *est le morphisme canonique* $G \to G/H$, LH/H *est topologiquement isomorphe à* $\phi(L)$.

Remarque. "Topologiquement isomorphe" signifie comme dans [3], qu'il existe une application réalisant l'isomorphisme qui est bicontinue, et non qu'il existe d'une part un isomorphisme et d'autre part un homéomorphisme qui pourraient être distincts.

Preuve. L'application identique de $LH/H \to \phi(L)$ est bicontinue car si $m \in L$ et $h \in H$,

$$\mu_{LH/H}(mhH) = \{m'h'H^*(m'h' \in \mu_L(m)\ \mu_H(h))\} = \mu_{G/H}(mhH) \cap (LH/H)^* = \mu_{G/H}(mhH) \cap \phi(L)^* = \mu_{\phi(L)}(mhH)$$

(5.9) THEOREME (St.) : *L'application canonique* $\tau : LH/H \to L/L \cap H$ *est ouverte*.

Preuve. $\mu_{L/L \cap H}(\tau(H)) = \{a'(L \cap H)^*(a' \in \mu_L(e))\} \subset \{\tau^*(a'H^*)(a' \in \mu_G(e))\} \subset \tau^*(\mu_{G/H}(H))$.

Dans [3], il est donné un contre-exemple prouvant que τ n'est pas en général continue. Nous démontrerons plus loin que certaines conditions de compacité rendent τ continue.

(5.10) THEOREME (St.) :

(1) Soit G *un groupe topologique,* H *et* N *des sous-groupes distingués de* G *tels que* $N \subset H$. *Alors* G/H *est topologiquement isomorphe à* $(G/N)/(H/N)$.

(2) Soit f *un morphisme ouvert et continu du groupe topologique* G *sur le groupe topologique* $\tilde{G}$ *; soit* $\tilde{H}$ *un sous-groupe distingué de* $\tilde{G}$. *Alors :* $G/f^{-1}(\tilde{H})$, $\tilde{G}/\tilde{H}$, $(G/f^{-1}(\tilde{e}))/(f^{-1}(\tilde{H})/f^{-1}(\tilde{e}))$ *sont des groupes topologiques.*

Preuve. Nous ne rappelons pas ici la démonstration de la partie algébrique de ce théorème ; montrons que les applications réalisant les isomorphismes sont bicontinues.

(1) Soit $\phi : G/N \to G/H$ telle que $\phi(xN) = xH$; il suffit d'après le théorème 5.7 ci-dessus de vérifier que ϕ est bicontinue :

$$\phi^*(\mu_{G/H}(N)) = \phi^*(\{x'N^*(x' \in \mu_G(e))\}) = \{x'H^*(x' \in \mu_G(e)\} =$$
$$\mu_{G/H}(H) = \mu_{G/H}(\phi(N)).$$

(2) De même, il suffit ici de vérifier que

$\psi : G/H \to \tilde{G}/\tilde{H}$ où $H = f^{-1}(\tilde{H})$ et où $\psi(xf^{-1}(\tilde{H})) = f(x)\tilde{H}$ est bicontinue. Or,

$$\psi^*(\mu_{G/H}(H)) = \{f^*(x')\tilde{H}^*(f^*(x') \in f^*(\mu_G(e))\} = \{f^*(x')\tilde{H}^*(f^*(x') \in \mu_{\tilde{G}}(\tilde{e})\} =$$
$$\mu_{\tilde{G}/\tilde{H}}(\tilde{H}) = \mu_{\tilde{G}/\tilde{H}}(\psi(H)).$$

Donc $(G/H)/(H/N)$ est topologiquement isomorphe à $\tilde{G}/\tilde{H}$, et, en utilisant le (1) ci-dessus, G/N est topologiquement isomorphe à $\tilde{G}/\tilde{H}$.

6 - COMPACITE ET LOCALE COMPACITE.

Un outil essentiel, tout au long de ce paragraphe, nous est fourni par la caractérisation des compacts par les points quasi-standards. On établira par exemple au lemme 6.7 la relation entre les points quasi-standards d'un groupe topologique et ceux de l'espace quotient de ce groupe par un de ses sous-groupes.

L'étude de la locale compacité utilisera le résultat bien connu (th.3.7.1 [4], th.5.5.4 [2]) assurant qu'un espace X est localement compact lorsque tout quasi-standard de X^*, appartient à la projection idéale d'une partie compacte de cet espace, d'une part, et d'autre part, un résultat que nous avons établi au lemme 6.9 qui permet de "standardiser" certaines preuves non standards (i.e. utiliser des propriétés standards d'objets internes convenablement choisis, telles que des propriétés topologiques ré-interprétées, par exemple).

Les lemmes et théorèmes 6.1, 6.2, 6.6, 6.9, 6.10, 6.11 et 6.12 sont établis, indépendamment de leur intérêt intrinsèque, pour servir éventuellement à l'étude de la structure des groupes abéliens localement compacts. Figure également dans cette section une étude de l'équivalence des structures uniformes induites à droite et à gauche sur un groupe topologique. Soit enfin donnés leurs résultats connus sur les espaces quotients qui concernent la compacité.

Nous regrettons de n'avoir pas pu donner de démonstration réellement non standard du théorème de BAIRE que nous utilisons au théorème 6.1 ; cette difficulté sera peut être l'origine de nouvelles et fructueuses notions non standards, ou le point de départ d'une utilisation nouvelle de la théorie des modèles pour l'étude de problèmes topologiques.

(6.1) <u>THEOREME</u> (St.) : *Soit* G *un groupe topologique, soit* $U \in \mathcal{V}_e$, *et soit* F *un sous ensemble compact de* G. *Dans ces hypothèses, il existe* $V \in \mathcal{V}_e$ *tel que, pour tout* x *de* F, $xVx^{-1} \subset U$.

<u>*Preuve*</u>. Puisque F est compact et contenu dans qs(G), puisque $\mu(e)$ est distingué dans qs(G), on peut écrire pour tout I élément infinitésimal de $\mathcal{V}_e$, et pour tout x de F, $xI^* x^{-1} \subset \mu(e) \subset U^*$.

Par suite :

$$G^* \models \exists V \, \forall x (V \in \mathcal{V}_e \wedge x \in F \wedge xVx^{-1} \subset U),$$

ce qui, ré-interprété dans G, prouve le théorème.

(6.2) <u>THEOREME</u> : *Soit* G *un groupe topologique ; soit* F *un compact de* G *et* U *un ouvert contenant* F *; il existe alors* $V \in \mathcal{V}_e$ *tel que* $FV \cup VF \subset U$. *Si* G *est localement compact, on peut choisir* V *tel que* $\overline{FV \cup VF}$ *soit compact.*

<u>*Preuve*</u>. Le fait que $F^* \subset F\mu(e)$ puisque F est compact, le fait que $U\mu(e) \subset U^*$ puisque U est ouvert et la donnée d'un élément infinitésimal I de $\mathcal{V}_e$ nous permettent d'affirmer que :

$$F^* \, I^* \subset F\,(e) I^* \subset F\,(e) \subset U\,(e) \subset U^* \;;$$

et d'écrire de même que $I^* \, F^* \subset U^*$.

La ré-interprétation de ce résultat de G^* dans G, fournit le résultat : la première partie du théorème est montrée. La seconde partie est un corollaire du théorème 2.1 précédent.

Ces deux propriétés des groupes topologiques sont, en particulier, utiles dans l'étude des groupes abéliens localement compacts.

L'analyse non-standard permet une bonne approche des structures uniformes (cf. MACHOVER [2]) ; voyons ce qu'il en est dans le cas des groupes topologiques.

(6.3) THEOREME : *Soit ϕ une application continue du groupe topologique* G *dans le groupe topologique* $\tilde{G}$ *telle que pour tout* $W \in V_{\tilde{e}}$, *il existe un compact* A_W *tel que* $\phi(G-A_W) \subset W$.
L'application ϕ est dans ces conditions continue pour chacun des couples possibles de structures uniformes induites sur G *et sur* $\tilde{G}$.

Remarque. Cette preuve est un bon exemple des simplifications que peut apporter l'Analyse non standard ; on comparera avec la démonstration du même résultat donné en [3] p.22-23, dont nous nous sommes inspirés.

Preuve. Soit W un élément fixé de $V_{\tilde{e}}$ et Y un élément symétrique de $V_{\tilde{e}}$ également tel que $Y^2 \subset W$. Soit A_Y une partie compacte telle que $\phi(G-A_Y) \subset W$.

(1) Supposons que $x \in A_Y^*$. Il nous suffit de montrer que pour tout y de G^* tel que $x^{-1}y \in \mu_G(e)$ nous avons $\phi(x^{-1})\ \phi(y) \in \mu_{\tilde{G}}(\tilde{e})$ (caractérisation de la continuité uniforme donnée au th.9.1.2. en [2]). Puisque A_Y est compact, il existe $a \in A_Y$ tel que $\mu_G(a) = \mu_G(x)$; tout y vérifiant $x^{-1}y \in \mu_G(e)$ est donc contenu dans $x\mu_G(e) \subset \mu_G(a)\ \mu_G(e) = \mu_G(a)$; par suite :

$\phi(x)^{-1}\ \phi(y) \in \phi(\mu_G(a))^{-1}\phi(\mu_G(a)) \subset \mu_{\tilde{G}}(\phi(a))^{-1}\ \mu_{\tilde{G}}(\phi(a)) = \mu_{\tilde{G}}(\tilde{e})$, à cause de la continuité simple de ϕ.

(2) Soit maintenant le cas dans lequel $x \notin A_Y^*$ et soit I un voisinage infinitésimal de V_e tel que $x^{-1}\ y \in I^*$. On suppose que y est dans A_Y^*, sinon le raison-

nement (1) permet de conclure. Nous disons alors que :

$$\phi(x)^{-1}\ \phi(y)\in \phi(G-A_Y)^{*-1}\ \phi(G-A_Y)^{*}\subset Y^{*-1}Y^{*}\subset Y^{*}\ Y^{*}\subset W^{*}.$$

En ré-interprétant ce résultat de G^* dans G, on obtient la continuité uniforme de ϕ. Pour les autres couples possibles de structures uniformes induites, on procède à un raisonnement analogue.

(6.4) <u>COROLLAIRE</u> (St.) : *Toutes les applications continues d'un groupe topologique compact* G *dans un groupe topologique* $\tilde{G}$ *sont uniformément continues pour tous les couples possibles de structures uniformes induites à droite et à gauche sur* G *et* $\tilde{G}$.

<u>*Preuve*</u>. Les hypothèses du théorème précédent sont visiblement réalisées.

(6.5) <u>COROLLAIRE</u>. *Si* G *est compact, les structures uniformes induites à droite et à gauche coïncident.*

<u>*Preuve*</u>. On applique le corollaire précédent en remarquant que l'application identique dans G est uniformément bicontinue, lorsque G est muni au départ de la structure uniforme induite à droite et à l'arrivée de la structure uniforme induite à gauche.

On peut donner une <u>autre preuve</u> très simple de ce corollaire en remarquant que, G étant compact, $G^* = qs(G)$ et qu'alors $\mu_G(e)$ est distingué dans G^* ce qui est une condition nécessaire et suffisante pour que les structures uniformes induites à droite et à gauche soient équivalentes ([2] p.36).

Venons en maintenant à la compacité des espaces quotients d'un groupe topologique G par un de ses sous-groupes H :

(6.6) <u>LEMME</u> (N.St.). Un élément ηH^* de $(G_{/H})^*$ est quasi-standard dans $(G_{/H})^*$ si et seulement si $\eta\in qs(G)$.

Preuve. Soit q un point quasi-standard de G^* donc tel que $q \in \mu_G(p)$, pour un $p \in G$; $qH^* \in \mu_{G/H}(pH)$ par définition de cette dernière monade et qH^* est quasi-standard dans $(G/H)^*$. L'inclusion inverse est tout aussi évidente.

(6.7) LEMME (St.) : *Soit* G *un groupe topologique et* H *un sous-groupe de* G, ϕ *l'application canonique* $G \to G/H$. *Soit* U *un voisinage symétrique de tel que* $\overline{\overline{U}^3} \cap H$ *soit compact et tel que* $\{xH(x \in X)\} \subset \{uH(u \in U)\}$ *soit un sous-ensemble fermé et compact.*
$\overline{U} \cap xH$ *est alors un sous-ensemble fermé et compact de* G.

Preuve. $xH = \phi^{-1}(\{xH(x \in X)\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé et par suite $\overline{U} \cap xH$ est fermé. Montrons que $\overline{U} \cap XH$ est compact. Soit $x \in (\overline{U} \cap XH)^*$ Alors $x \in x'H^*$ pour un $x' \in X^*$. On a : $x'H^* \in \{xH(x \in X)\}^* \subset qs(\{xH(x \in X)\})$ puisque $\{xH(x \in X)\}$ est compact. Par le lemme 6.6, $x'H^* \in \mu_{G/H}(x_oH)$, pour un $x_o \in X$. Compte tenu de l'hypothèse, x_oH s'écrit u_oH pour un $u_o \in U$. Finalement $x \in x'H^* \in \mu_{G/H}(u_oH)$. D'où résulte l'existence de $\eta \in \mu_G(e)$ et de $h \in H^*$ tels que $x = \eta u_o h$, soit encore tels que $h = u_o^{-1}\ \eta^{-1}x$. On peut donc affirmer que : $h \in U^{-1*}U^*\overline{U}^* \subset \overline{U}^3 \subset \overline{\overline{U}^3}$. Ainsi est prouvé que $h \in (\overline{\overline{U}^3} \cap H)^*$.

Ce dernier ensemble étant compact, il existe h_o tel que $h \in \mu_G(h_o)$ avec $h_o \in \overline{\overline{U}^3} \cap H$.

L'égalité $\mu_G(u_oh_o) = \mu_G(\eta u_o h)$ entraîne $x \in \mu_G(u_oh_o)$. Par ailleurs $x \in \overline{U}^*$, et par suite $\mu_G(u_oh_o) \cap \overline{U}^*$ est différent du vide et $u_oh_o \in \overline{U}$. Puisque $u_oh_o \in x_oH$ qui est contenu dans xH, cet élément $u_oh_o \in XH \cap \overline{U}$. La preuve est achevée dès que l'on constate que $x \in \mu_G(z)$ pour un $z \in XH \cap \overline{U}$.

Nous sommes maintenant en mesure de donner les résultats essentiels sur les rapports entre le groupe topologique G et l'espace quotient G/H pour un sous-groupe H de G du point de vue de la compacité et de la locale compacité.

(6.8) THEOREME (St.) : *Soit* G *un groupe topologique et* H *un sous-groupe fermé de* G. *Soit* ϕ *l'application canonique de* G *sur* G/H.
(1) Si H *est compact,* ϕ *est fermé,*

(2) Si G *est compact (resp. localement compact),* G/H *est compact (resp. localement compact),*

(3) Si H *et* G/H *sont compacts (resp. localement compacts),* G *est compact (resp. localement compacts).*

Preuve. H étant fermé, G/H est d'HAUSDORFF après le théorème 5.5 ci-dessus.

(1) Soit A un sous-ensemble fermé de G, montrons que $G/H - \phi(A)$ est ouvert. Soit $xH \in G/H - \phi(A)$, alors $x \notin AH = \overline{AH}$ puisque H est fermé et A compact (théorème 2.2). Par suite $\mu_G(x) \cap (AH)^* = \emptyset$, et $\mu_G(x) \subset G^* - (AH)^*$. L'application ϕ étant continue et ouverte, $\mu_{G/H}(xH) = \phi^*(\mu_G(x)) \subset (G/H)^* - \phi^*(A^*)$. La partie $G/H - \phi(A)$ est ouverte puisque que la monade de chacun de ses points est contenue dans la projection idéale de cette partie.

(2) D'après le lemme 6.6 et compte tenu de ce que $qs(G) = G^*$, G/H est compact.

Supposons G localement compact ; pour prouver que G/H l'est aussi, il suffit d'après le théorème 5.5.4 de [2], de prouver que, si $xH \in qs(G/H)$, il existe B_{xH}, une partie compacte de G/H, telle que $xH \in B_{xH}^*$. En appliquant le lemme 6.6, nous savons que x est quasi-standard, donc qu'il existe A_x, une partie compacte de G, telle que $x \in A_x^*$. Par suite $xH = \phi(x) \in \phi^*(A_x^*)) = (\phi(A_x))^*$. Comme ϕ est continue, $\phi(A_x)$ est compacte.

(3) Il suffit de montrer que $G^* \subset qs(G)$. G/H étant compact, $qs(G)/H^* = G^*/H^*$. On en déduit $\phi^*(qs(G)) = \phi^*(G^*)$, soit encore $qs(G)H^* = G^*H^*$. Mais H étant compact, H^* est contenu dans qs(G). Finalement $G^* = G^*H^* \subset qs(G)H^* \subset qs(G)$.

Supposons maintenant que G/H et H sont localement compacts. Il existe un voisinage V de e dans G, tel que $\overline{V} \cap H$ soit compact.

Soit $U \in \mathcal{V}_e$ tel que $\overline{U}^3 \subset \overline{V}$; $\overline{\overline{U}^3} \cap H$ est évidemment compact. Si I est un voisinage infinitésimal de e que l'on peut choisir *-fermé (par ré-interprétation du fait qu'il existe dans G un système fondamental de voisinages fermés (théorème 2.1) de e), alors :

- $\{xH^*(x \in I^*)\} \subset \{xH^*(x \in U^*)\}$,
- $\{xH^*(x \in I^*)\}$ est un voisinage infinitésimal de H dans G/H par définition de $\mu_{G/H}(H)$,

- $\{xH^*(x \in I^*)\}$ est *-fermé puisque ϕ^* est *-fermée,

- $\{xH^*(x \in I^*)\} \subset C^*$, où C est un voisinage compact de H dans G/H, car ce dernier espace est localement compact.

Par conséquent $\{xH^*(x \in I^*)\}$ est *-compact comme partie *-fermée d'un *-compact. La ré-interprétation du lemme 6.7 dans G, permet d'écrire :

$G^* \models IH \cap \overline{U}$ est un voisinage compact de e,

donc que

$G^* \models$ Il existe K voisinage compact de e dans G,

d'où l'existence d'un voisinage compact de e dans G.

(6.9) THEOREME (N.St.) : *Pour qu'un groupe topologique* G *soit localement compact il faut et il suffit qu'il existe une partie* K *interne de* G^*, **-compacte et* **-voisinage de chacun des points de* G.

Preuve. La condition nécessaire résulte de la concurrence (au sens donné à "concurrent" par ROBINSON en [1]) de la relation R(x,C) définie par : "l'élément x de G est contenu dans un voisinage C compact de x". La condition suffisante résulte quant à elle de la ré-interprétation dans G de l'assertion :

$G^* \models$ il existe un voisinage K compact de e.

Remarque. On a de plus le résultat suivant : $\overline{G}^Q \subset K^*$, par le théorème 4.2.10 de [1], qui assure que K est Q-fermée, ou tout simplement, G étant séparé, par ce fait que $G = \overline{G}^Q$!

Pour que le groupe topologique G localement compact soit compact il faut et il suffit que $K^* \subset qs(G)$, parce que dans ces conditions $St(K^*) = G$ est compacte d'après le théorème 3.6.1 de [4].

(6.10) THEOREME (St.) : *Si* G *est un groupe localement compact, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) G *est engendré par un compact,*

(2) Il existe un ouvert U *de* G *tel que* $\overline{U}$ *soit compact et* U *engendre* G,

(3) Il existe un voisinage U *de* e *tel que* $\overline{U}$ *soit compact et* U *engendre* G.

Preuve. L'implication (3) ⇒ (2) ⇒ (1) est évidente.

(1) ⇒ (3) comme corollaire du théorème 6.2 ci-dessus.

Remarque. On aurait pu démontrer le théorème en utilisant la partie K^* du théorème 6.9 ci-dessus et la projection idéale de la partie K_1 compacte engendrant G, mais on aurait ainsi simplement obtenu une stricte transcription de la démonstration standard ; la propriété non-standard essentielle de K^* d'être *-voisinage de chacun des points de G n'aurait pas été utilisée ; seule la propriété standard affirmant l'existence d'un voisinage compact de e dans G localement compact aurait servi à la démonstration.

On peut ainsi préciser le théorème 6.10 :

(6.11) THEOREME (St.) : *Soit* G *un groupe topologique localement compact et* F *une partie compacte de* G.

Dans ces hypothèses, il existe un sous-groupe ouvert et fermé, engendré par une partie compacte contenant F.

Preuve. Soit U le voisinage de e vérifiant la condition (3) du théorème précédent appliqué au sous-groupe G' engendré par la partie compacte F. ROBINSON démontre au cours de la preuve du théorème 8.1.11 [1] que $\bigcup_{n\in N} (U^{-1} \cup U)^n$ est ouvert et fermé. Cette union est visiblement un sous-groupe de G.

Le théorème qui suit sera utile pour démontrer que le plus petit sous-groupe fermé contenant un élément donné d'un groupe abélien localement compact est soit compact, soit topologiquement isomorphe à Z. Il servira à prouver le théorème 6.13 de cet article.

(6.12) THEOREME (St.) : *Si* G *est un groupe localement compact qui est* σ*-compact (réunion dénombrable de compacts), si* f *est un morphisme continu du groupe* G *sur le groupe topologique séparé localement dénombrablement compact* $\tilde{G}$*, alors* f *est une application ouverte.*

Preuve. Il suffit de vérifier que f est ouverte en e, c'est-à-dire de montrer l'inclusion suivante : $f^*(\mu_G(e)) \supset \mu_{\tilde{G}}(f(e))$. $\tilde{G} = f(G) = \bigcup_{n \in N} f(A_n)$, pour des A_n compacts et donc pour des $f(A_n)$ également compacts puisque f est continue. Les $f(A_n)$ sont fermés parceque $\tilde{G}$ est séparé. Le théorème de BAIRE (que nous ne savons pas démontrer de façon non standard) permet d'affirmer qu'il existe $i_o \in N$ tel que $\mathring{\overline{f(A_{i_o})}} \neq \emptyset$. Soit $a_{i_o} \in A_{i_o}$ tel que $f(a_{i_o}) \in \mathring{\overline{f(A_{i_o})}}$.

Pour montrer l'inclusion considérons un η' quelconque de $\mu_{\tilde{G}}(f(e))$. Puisque f^* est surjective (ré-interprétation de la même propriété de f), il existe $\eta \in G^*$ tel que $\eta' = f(\eta)$. De ce qui précède, on tire :

$$f^*(\eta)\, f(a_{i_o}) \in \mu_{\tilde{G}}(f(a_{i_o})) \subset f(A_{i_o})^* = f^*(A^*_{i_o}),$$

du fait que $f(a_{i_o}) \in \mathring{\overline{f(A_{i_o})}}$. Par suite $f^*(\eta) = f(a_{i_o})^{-1} f^*(\delta)$, pour un $\delta \in A^*_{i_o} \subset qs(A_{i_o}) \subset qs(G)$ en utilisant la compacité de A_{i_o}. Les relations $f^*(\eta) = f^*(a_{i_o}^{-1}) \in f^*(G\mu_G(e))$ impliquent qu'il existe $\eta'' \in \mu_G(e)$ et $g \in G$ tels que $a_{i_o}^{-1}\delta = \eta'' g$.

La continuité de f donne $f^*(\mu_G(e)) \subset \mu_{\tilde{G}}(f(e))$, donc $f^*(\eta'') \in \mu_{\tilde{G}}(f(e))$. Ceci, et le fait que f soit un morphisme, permettent d'affirmer que $\mu_{\tilde{G}}(f^*(\eta'' g)) = \mu_{\tilde{G}}(f(g))$; or $\eta' = f^*(\eta'' g)$ par définition de η, et nous avons maintenant $\mu_{\tilde{G}}(\eta') = \mu_{\tilde{G}}(f(g))$. Par ailleurs $\mu_{\tilde{G}}(\eta') = \mu_{\tilde{G}}(f(e))$, et, $\tilde{G}$ étant séparé, on peut conclure à l'égalité de $f(g)$ et de $f(e)$. Comme $\eta' = f^*(\eta'' g)$ on trouve finalement $\eta' = f^*(\eta'')$ avec $\eta'' \in \mu_G(e)$, c.q.f.d..

Pour terminer nous donnons un résultat sur les espaces quotients qui précisent le théorème 5.8 dans des conditions de locale compacité, entre autres.

(6.13) THEOREME (St.) : *Soit* G *un groupe topologique,* H *un sous-groupe distingué et* L *un sous-groupe quelconque de* H.
Si L *est localement compact et* σ*-compact, si* H *est fermé et* LH *localement compact, alors* $(LH)/H$ *et* $L/L \cap H$ *sont topologiquement isomorphes.*

Preuve. Le théorème 6.8 prouve que $(LH)/H$ est localement compact ; si ϕ est l'application de LH dans $(LH)/H$ définie par $\phi(mh) = mH$ pour $m \in L$ et $h \in H$, la restriction de ϕ à L, $\phi|_L$, est une application ouverte d'après le théorème 6.12 précédent.

On peut donc écrire les relations entre monades suivantes :

$$\mu_{(LH)/H}(H) \subset \phi^*|_L(\mu_L(e)) = \phi^*|_L(\mu_G(e) \cap L^*),$$

ou encore :

$$\{\eta H^*(\eta \in \mu_G(e) \cap (LH)^*)\} \subset \{\eta H^*(\eta \in \mu_G(e) \cap L^*)\} \qquad (1).$$

Soit $\tau : (LH)/H \to L/L \cap H$, définie par $\tau(mH) = m(L \cap H)$, pour tout $m \in L$. On sait que τ est ouverte d'après le théorème 5.9. Montrons que est continue, c'est-à-dire que

$$\tau^*(\mu_{(LH)/H}(H)) \subset \mu_{L/L \cap H}(L \cap H).$$

On sait que

$$\tau^*(\mu_{(LH)/H}(H)) = \tau^*(\{\eta H^*(\exists m \exists h(m \in L^* \wedge h \in H^* \wedge \eta = mh \wedge \eta \in \mu_G(e))\}$$
$$= \{m(L \cap H)^*(\exists h \ (h \in H^* \wedge mh \in \mu_G(e))\}.$$

Alors $m(L \cap H)^* = mhh^{-1}(L \cap H)^* = mhH^* \cap mL^*$, mais du fait de (1), il existe $\eta' \in \mu_G(e) \cap L^*$ tel que $mhH^* = \eta' H^*$ puisque $mh \in (\mu_G(e) \cap LH)^*$.

En remarquant que $mhH^* \cap mL^* = \eta' H^* \cap L^* = \eta'(H \cap L)^*$ nous obtenons la relation $\eta'(H \cap L)^* \in \mu_{L/L \cap H}(L \cap H)$, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

Les formulations des résultats de cette étude sont celles données par EDWIN HEWITT et KENNETH A.ROSS dans leur livre "ABSTRACT HARMONIC ANALYSIS", tome I.

L'article cité en [6], contient un excellent exposé des présupposés logiques utilisés ici. Il y est entrepris une théorie de GALOIS infinie, et obtenu de façon non-standard entre autres nombreux résultats, la topologie de KRULL et les groupes pro-finis.

[1] A.ROBINSON - Non-standard Analysis.
(North-Holland, Publishing company, Amsterdam, 1966)

[2] M.MACHOVER et J.HIRSCHFELD - Lectures on Non-standard Analysis.
(Springer Verlag Berlin 1969)

[3] E.HEWITT et K.A.ROSS - Abstract Harmonic Analysis, Tome I.
(Springer Verlag Berlin, 1963)

[4] W.A.J.LUXEMBURG - Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability p.18-86 (Holt, Rinehart, and Winston, 1969)

[5] KELLEY - General Topology.
(D.Van Nostrand Company, 1955)

[6] A.ROBINSON - Non-Standard Arithmetic.
(in Bull. A.M.S., vol 73, n° 6, nov. 67, p. 818-843).

Manuscrit remis le 10 décembre 1972

Christine CHARRETTON
Denis RICHARD
Département de Mathématiques
Université Claude-Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621-VILLEURBANNE