ANDRÉ GOLDMAN

Prémesures et mesures sur les espaces compactologiques

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1972, tome 9, fascicule 1
, p. 61-86
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1972__9_1_61_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1972 t. 9-1

PREMESURES ET MESURES SUR LES ESPACES COMPACTOLOGIQUES

André GOLDMAN

INTRODUCTION. - Dans le chapitre 9 d'intégration [5], N. BOURBAKI généralise la théorie de l'intégration sur les espaces compacts au cas d'un espace topologique séparé. Il introduit pour cela deux notions : la notion de prémesure et la notion de prémesure localement bornée. Déjà il convient de remarquer que la définition d'une prémesure ne fait intervenir la topologie de l'espace T que par l'intermédiaire de celle de ses parties compactes. Quant à la condition localement bornée, elle permet de construire un concassage de T d'une part et de définir une notion de mesure extérieure d'autre part. La définition d'un concassage ne faisant appel qu'aux compacts de T et à la prémesure, il apparaît alors qu'on peut remplacer avantageusement cette condition par la suivante : la prémesure est localement bornée sur T muni de la topologie la plus fine compatible avec ses compacts. En effet, si $c\gamma T$ désigne l'espace ainsi obtenu, il a exactement les mêmes compacts que T et il est facile de voir qu'il est encore concassable pour toute prémesure localement bornée.

En fait, bien que plus satisfaisante que la précédente, cette condition nous semble encore trop forte. On se propose donc de ne conserver que le strict minimum, c'est-à-dire une structure d'espace compactologique [6].

On montre tout d'abord que les résultats obtenus par N. BOURBAKI concernant l'intégration des mesures s'étendent au cas des prémesures compactologiques. Bien sûr, certains de ces résultats ne sont plus valables et plus précisément tous ceux qui font intervenir le théorème de Lebesgue-Nikodym.

Pour contourner cette difficulté, on définit une mesure sur un espace compactologique comme prémesure pour laquelle il existe un concassage (on apporte une légère modification à la définition du concassage donnée par

N. BOURBAKI). L'essentiel consiste à démontrer le théorème de Lebesgue-Nikodym et à étudier les opérations sur les mesures comme par exemple : mesure induite, mesure image, etc...

Dans le chapitre 4, on compare les propriétés des mesures définies sur les espaces topologiques avec celles des mesures définies sur les espaces compactologiques canoniquement associés. Il s'agit en quelque sorte, de "mesurer" l'efficacité de ces deux notions. On montre en particulier qu'il existe des prémesures non localement bornées (pour aucune topologie compatible) qui sont des mesures compactologiques. Ceci ayant lieu par exemple pour certains quotients d'espaces métrisables.

Le dernier chapitre traite des espaces topologiques dont tout point admet un voisinage concassable (espaces localement concassables). On étudie dans quelles conditions de tels espaces sont concassables.

Signalons enfin que si la notion de mesure compactologique semble être plus générale que celle développée par N. BOURBAKI, par sa grande généralité même elle pose des problèmes jusqu'à maintenant sans réponse, comme par exemple l'existence de prémesures qui ne seraient pas des mesures compactologiques.

<u>NOTATIONS</u>. - Pour les notations concernant les espaces compactologiques, on renvoie à [6]. Précisons en plus que pour tout espace compactologique X, on notera par $K(X)$ l'ensemble de ses parties compactes.

Si T est un ensemble et A une partie de T, on désigne par ϕ_A la fonction caractéristique de A. L'ensemble des fonctions numériques positives définies sur T se note $F_+(T)$; si $f \in F_+(A)$, f° désigne le prolongement de f à T qui coïncide avec f sur A et qui vaut zéro ailleurs. Les notations concernant les prémesures sont celles de [5].

Toutes les prémesures sont supposées positives (ceci ne restreignant pas la généralité des résultats). Tous les espaces topologiques sont séparés.

1. - PREMESURES SUR LES ESPACES COMPACTOLOGIQUES.

1.1. PREMESURES.

(1.1.1) DEFINITION. - *Soit X un espace compactologique ; pour tout compact* K *de X, soit M(K) l'ensemble des mesures de Radon sur* K. *Pour tout couple* (K,K') *de compacts de X tels que* $K \supset K'$, *désignons par* $p_{K,K'}$ *l'application de M(K) dans M(K') définie par* $p_{K,K'}(\mu) = \mu_{K'}$ *pour toute* $\mu \in M(K)$. *On appelle prémesure sur X tout élément de la limite projective du système projectif* $(M(K), p_{K,K'})_{K \in \mathcal{K}(X)}$, *l'ensemble* $\mathcal{K}(X)$ *étant ordonné par inclusion.*

Si T est un espace topologique et γT l'espace compactologique canoniquement associé, il est clair que la définition d'une prémesure sur T coïncide avec celle d'une prémesure sur γT. Il en résulte que tous les résultats obtenus par N. BOURBAKI et concernant les prémesures sont encore valables dans le cadre compactologique. On se contentera donc, dans la plupart des cas d'en donner l'énoncé (on renvoie à [5] pour une démonstration plus détaillée).

(1.1.2) DEFINITION. - *Soit* μ *une prémesure positive sur X. On appelle intégrale supérieure essentielle associée à la prémesure* μ, *l'encombrement défini par* $\mu^{\bullet}(f) = \sup_{K \in \mathcal{K}(X)} \mu_K^{\bullet}(f_K)$ *pour tout* $f \in \mathcal{F}_+(X)$.

(1.1.3) DEFINITION. - *Une fonction* $f \in \mathcal{F}_+(X)$ *est dite localement négligeable pour la prémesure* μ *si* $\mu^{\bullet}(f) = 0$.

(1.1.4) DEFINITION. - *Une fonction* f *définie sur X et à valeurs dans un espace compactologique Y est dite* μ*-mesurable si pour tout compact* K *de X et tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un compact* K_ε *tel que* $\mu^{\bullet}(K - K_\varepsilon) \leq \varepsilon$ *et tel que* f *envoie continûment* K_ε *dans un compact* K' *de Y.*

(1.1.5) DEFINITION. - *Soit* $(f_i)_{i \in I}$ *un ensemble de fonctions positives sur X. On dit que* (f_i) *est compactement dénombrable l.p.p. (localement presque partout) si pour tout compact* K *il existe une partie localement négligeable* $N \subset K$ *telle que* $\|f_i\|_{K \setminus N} = 0$ *sauf pour un ensemble dénombrable d'indices.*

(1.1.6) DEFINITION. - *Un ensemble* H *de parties de X est dit compactement* *dénombrable l.p.p. si l'ensemble des fonctions caractéristiques de ces parties est compactement dénombrable l.p.p.*

(1.1.7) DEFINITION. - *On appelle concassage de X pour* μ *une famille compactement dénombrable l.p.p.* $(K_\alpha)_{\alpha\in A}$ *de parties compactes de X, deux à deux disjointes et recouvrant X.*

Dans un nombre restreint de cas, on doit cependant introduire une notion plus forte.

(1.1.8) DEFINITION. - *Soit K un concassage de X pour* μ. *On dit que K est un concassage fort s'il existe une sous-famille* $(K_\alpha)_{\alpha\in A}$ *de K vérifiant :*
(a) la famille (K_α) *est compactement dénombrable,*
(b) l'ensemble $N = X \setminus \bigcup_{\alpha\in A} K_\alpha$ *est localement négligeable.*

(1.1.9) PROPOSITION :
(a) Soient f *une fonction positive et* (g_n) *une suite de fonctions positives et* μ*-mesurables sur X. Si l'on pose* $g=\Sigma g_n$ *on a alors*
$\mu^\bullet(fg) = \Sigma\mu^\bullet(fg_n)$.
(b) Soit H *un ensemble filtrant décroissant de fonctions positives mesurables. Si* H *est compactement dénombrable l.p.p. et s'il existe dans* H *une fonction* $h_\circ$ *telle que* $\mu^\bullet(h_\circ) < +\infty$*, alors on a* $\mu^\bullet(\operatorname{Inf}_{h\in H} h) = \operatorname{Inf}_{h\in H} \mu^\bullet(h)$.
(c) Soit H *un ensemble filtrant croissant de fonctions positives mesurables. Si* H *est compactement dénombrable l.p.p., on a* $\mu^\bullet(\operatorname{Sup}_{h\in H} h) = \operatorname{Sup}_{h\in H} \mu^\bullet(h)$.

Preuve. - A quelques détails près, se reporter à ([5], n° 1.5, prop. 4).

(1.1.10) PROPOSITION :
(a) Soit H *un ensemble filtrant croissant de fonctions positives semi-continues inférieurement sur tout compact* K *de X. On a alors*
$\mu^\bullet(\operatorname{Sup}_{h\in H} h) = \operatorname{Sup}_{h\in H} \mu^\bullet(h)$.
(b) Soit H *un ensemble filtrant décroissant de fonctions positives semi-continues supérieurement sur tout compact* K *de X. S'il existe dans* H *une fonction* $h_\circ$ *telle que* $\mu^\bullet(h_\circ) < +\infty$ *on a alors* $\mu^\bullet(\operatorname{Inf}_{h\in H} h) = \operatorname{Inf}_{h\in H} \mu^\bullet(h)$.

Preuve. - Voir ([5], n° 1.6, prop. 5).

1.2. INTEGRATION DES PREMESURES. - Soit μ une prémesure sur un espace compactologique X. Lorsque X est μ-concassable, il est facile de construire un espace localement compact T_X associé à X, ayant même ensemble de base et muni d'une mesure μ_o pour laquelle toute fonction f mesurable sur T_X soit μ-mesurable sur X et réciproquement. Par une méthode identique à celle employée par N. BOURBAKI, il en résulte que toute la théorie de l'intégration sur les espaces localement compacts se transpose facilement dans le cas compactologique. Cette méthode n'est plus applicable pour des prémesures quelconques, et des démonstrations directes sont nécessaires qui font appel à une technique semblable à celle utilisée dans le cas localement compact.

(1.2.1) DEFINITION. - *Soit* $p \in [1,+\infty[$ *; on désigne par* $L_F^p(X,\mu)$ *(où* F *est un espace de Banach) l'ensemble des applications* f *de* X *dans* F*,* μ*-mesurables et telles que* $\mu^\bullet(|f|^p) < +\infty$*. On notera* $N_p(f) = (\mu^\bullet|f|^p)^{1/p}$.

(1.2.2) PROPOSITION. - *Soit* (f_n) *une suite de Cauchy dans* L_F^p *; il existe une suite extraite* (f_{n_k}) *ayant les propriétés suivantes :*

(a) La série de terme général $N_p(f_{n_{k+1}}-f_{n_k})$ *est convergente.*

(b) La série de terme général $(f_{n_{k+1}}-f_{n_k})$ *est absolument convergente l.p.p.*

(c) Si l'on pose $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)\right)$ *aux points où la série converge et* $g(x) = 0$ *ailleurs, la fonction* g *appartient à* L_F^p *et la suite* (f_{n_k}) *converge en moyenne d'ordre* p *vers* $g+f_{n_1}$.

(d) Si la suite $(f_n(x))$ *converge localement presque partout vers* $f(x)$*,* f *est de puissance p-ième intégrable, et la suite* (f_n) *converge en moyenne d'ordre* p *vers* f.

On a comme conséquence les résultats importants suivants :

(1.2.3) THEOREME. - *L'espace* L_F^p *est complet.*

Preuve. - D'après (1.2.2), $g+f_{n_1}$ est la limite de (f_{n_k}) ; c'est une valeur d'adhérence pour la suite (f_n), donc un point limite.

(1.2.4) THEOREME (LEBESGUE). - *Soit* F *un espace de Banach,* (f_n) *une suite de*

fonctions de L_F^p *telle que :*
(a) la suite $(f_n(x))$ *converge l.p.p. vers une limite* $f(x)\in F$.
(b) Il existe une fonction numérique $g\geqslant 0$ *telle que* $N_p(g) < +\infty$*, et* $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ *l.p.p. dans* X *pour tout* n.
Alors la fonction f *est de puissance p-ième intégrable et la suite* (f_n) *converge en moyenne d'ordre* p *vers* f.

Preuve. - On pose $g_{m,n} = |f_m-f_n|$, alors $g_{m,n}(x) \to 0$ quand $m,n \to +\infty$; d'autre part, $g_{m,n}(x) < 2g(x)$. Soit la suite (h_n) définie par $h_n(x) = \sup\limits_{\substack{i\geqslant n\\ j\geqslant n}} g_{i,j}(x)$.

C'est une suite filtrante décroissante et $h_n\leqslant 2g$. Appliquons (1.1.9) ;
$N_p(\operatorname{Inf}\limits_n h_n) = \operatorname{Inf}\limits_n N_p(h_n) = \operatorname{Inf}\limits_n N_p(\sup\limits_{i,j} g_{i,j}) \geqslant \operatorname{Inf}\limits_n \sup\limits_{i,j} N_p(g_{i,j})$. Or $\operatorname{Inf}\limits_n h_n = 0$.
Il en résulte que $\operatorname{Inf}\limits_n \sup\limits_{i,j} N_p(f_i-f_j) = 0$, donc pour tout $\varepsilon>0$, il existe n tel que $i\geqslant n$ et $j\geqslant n$ impliquent $N_p(f_i-f_j) \leqslant \varepsilon$. La suite (f_n) est donc de Cauchy dans L_F^p et on conclut avec (1.2.2).

(1.2.5) <u>THEOREME</u>. - *Il existe une application linéaire et une seule* $f \to \int f d\mu$ *de l'espace* L_F^1 *dans* F *qui possède les propriétés suivantes :*
Si $a\in F$ *et si* f *est de la forme* $x \to g(x).a$ *où* g *est une fonction positive finie* μ*-mesurable et telle que* $\mu^\bullet(g)< +\infty$*, on a* $\int f d\mu = \mu^\bullet(g).a$.

Preuve. - Avec le lemme suivant :

(1.2.6) <u>LEMME</u>. - *L'ensemble des fonctions* f *de la forme* $f=g.a$ *considérée dans l'énoncé précédent, est total dans* L_F^p.

Preuve. - Soit $\varepsilon>0$; il existe un compact K de X tel que $N_p(f\phi_K) \leqslant \varepsilon$. Sur K, il existe une fonction $h = \sum\limits_1^n a_i.g_i$ (où $a_i\in F$ et g_i est une fonction positive finie μ_K-intégrable), vérifiant $\mu_K^\bullet(|f_K-h|)^p \leqslant \varepsilon^p$. Donc
$N_p(f-h^\circ) = N_p\big((f-h^\circ)\phi_K + (f-h^\circ)\phi_{\complement K}\big) \leqslant N_p(f.\phi_{\complement K}) + N_p((f-h)^\circ\phi_K) \leqslant 2\varepsilon$.
Il en résulte trivialement :

(1.2.7) <u>PROPOSITION</u>. - *L'espace des fonctions* f*, à valeur dans* F*, telles que* $\operatorname{Supp} f$ *soit compact et telles que la restriction de* f *à son support soit continue, est dense dans* L_F^p.

(1.2.8) <u>THEOREME</u> (LEBESGUE). - *Soit* (f_n) *une suite de fonctions intégrables* *satisfaisant aux conditions suivantes :*

(a) la suite $(f_n(x))$ *converge l.p.p. vers* $f(x) \in F$.

(b) il existe une fonction numérique $g \geq 0$ *telle que* $\overset{\bullet}{\mu}(g) < +\infty$, *et* $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ *l.p.p. pour tout* n.

La fonction f *est alors intégrable et l'on a :*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

Preuve. - D'après (1.2.4) la suite (f_n) converge en moyenne vers f et le résultat est alors conséquence de la continuité de l'intégrale.

2. - MESURES SUR LES ESPACES COMPACTOLOGIQUES.

2.1. MESURES. - Dans le cas d'une prémesure μ quelconque, il ne semble pas possible d'obtenir un théorème analogue à celui de Lebesgue-Nikodym. Pour cette raison, on introduit des conditions supplémentaires portant sur μ. On définit ainsi une notion de mesure compactologique comme prémesure pour laquelle il existe un concassage de X. On remarque d'ailleurs que dans le cas d'un espace localement compact c'est précisément l'existence du concassage qui permet d'obtenir ce théorème.

(2.1.1) DEFINITION :

(a) On appelle mesure sur un espace compactologique X, toute prémesure μ *pour laquelle il existe un* μ*-concassage.*

(b) Si toute prémesure μ *sur X est une mesure, l'espace est dit universellement concassable.*

Le théorème suivant donne une caractérisation plus maniable du concassage.

(2.1.2) THEOREME. - *Soit* μ *une prémesure sur un espace compactologique X. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) il existe un μ*-concassage de X ;*

(b) il existe un recouvrement de X par un ensemble H *compactement dénombrable l.p.p. de parties compactes.*

Preuve :

(a) $\Rightarrow$ (b) : Trivial.

(b) $\Rightarrow$ (a) : Donnons-nous un bon ordre sur $H = (K_\alpha)$. Pour tout ordinal α, on pose

$A_\alpha = K_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta$. L'ensemble (A_α) forme une partition de X : en effet, soit $x \in X$ et α_x le premier élément de l'ensemble $A = (\alpha\ ;\ x \in K_\alpha)$. Il est clair que $x \in X_{\alpha_x}$, ce qui suffit.

L'ensemble H étant compactement dénombrable l.p.p., il en est de même de l'ensemble (A_α). Montrons finalement que tout ensemble A_α est mesurable ; or ce point est évident puisque l'ensemble $\complement A_\alpha = \complement K_\alpha \cup (\bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta)$ est mesurable.

Pour conclure, il suffit de remarquer que pour tout α l'espace X_α est concassable. Soit L_α le concassage correspondant. La famille $L = \bigcup L_\alpha$ est alors un concassage de X.

On en déduit encore le résultat suivant :

(2.1.3) <u>COROLLAIRE</u>. - *Soient* μ *une prémesure sur* X *et* H *une famille de parties compactes recouvrant* X *telles que :*

(a) card $H < \aleph_1$

(b) tout compact K *de* X *est inclus l.p.p. dans la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles de* H.

Alors μ *est une mesure sur* X.

Preuve. - Soit (A_α) la partition de X définie dans (2.1.2). Pour conclure, il suffit de montrer que l'ensemble (A_α) est compactement dénombrable l.p.p. Soit donc K un compact de X et (α_n) la suite des ordinaux tels que $K \subset \bigcup K_{\alpha_n}$ l.p.p. Comme $\operatorname{Sup} \alpha_n = \alpha < \omega_1$ (où ω_1 est le premier ordinal non dénombrable), le résultat est acquis.

(2.1.4) <u>COROLLAIRE.</u> - *Soit* H *un ensemble de parties compactes recouvrant* X *tel que :*

(a) card $H < \aleph_1$

(b) tout compact K *de* X *est inclus dans la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles de* H.

Alors l'espace est universellement concassable.

Dans quelques cas particuliers, on a des résultats plus précis.

(2.1.5) <u>DEFINITION</u>. - *Un espace compactologique* X *régulier est dit séparable s'il existe une partie dénombrable partout dense dans* $c_R X$ *(où* $c_R X$ *désigne l'espace* X *muni de la plus fine topologie complètement régulière compatible avec ses compacts).*

(2.1.6) THEOREME. - *Soit* μ *une mesure sur un espace compactologique* X. *On a l'inégalité suivante :*

$$\text{card } \dot{K}(X) \leqslant \left(\text{card } X \times \sup_{K \in K(X)} \text{card } C^{\infty}(K)\right)^{\aleph_0}$$

où $\dot{K}(X)$ *désigne l'ensemble des classes d'équivalence des parties compactes de* X *modulo l'égalité l.p.p.*

Preuve. - On peut supposer la prémesure μ diffuse. Soient K et K' deux compacts de mesure non nulle tels que K'⊂ K. Il existe une suite (f_n) de $C^{\infty}(K)$ telle que $\phi_{K'} = \text{Inf } f_n$ l.p.p. Par suite card $\dot{K}(K) \leqslant (\text{card } C^{\infty}(K))^{\aleph_0}$, mais il résulte d'un théorème de Kruse (7) que pour tout espace de Banach E on a $(\text{card } E)^{\aleph_0} = \text{card } E$, donc card $\dot{K}(K) \leqslant$ card $C^{\infty}(K)$.

Soit maintenant $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ un concassage de X ; on a évidemment card A $\leqslant$ card X, ce qui donne card $\bigcup_{\alpha \in A} \dot{K}(K_\alpha) \leqslant \text{card } X \times \sup_{\alpha \in A} \text{card } C^{\infty}(K_\alpha)$. Tout compact K de X étant réunion d'un ensemble localement négligeable et d'une suite d'éléments de $\bigcup_\alpha \dot{K}(K_\alpha)$, le résultat est acquis.

On en déduit les corollaires suivants :

(2.1.7) COROLLAIRE. - *Soit* μ *une mesure sur un espace compactologique* X *; on a* card $\dot{K}(X) \leqslant (\text{card } X)^{\aleph_0} \times \text{card } C^{\infty}(X)$.

(2.1.8) COROLLAIRE. - *Dans les deux cas qui suivent on a* card $\dot{K}(X) \leqslant (\text{card } X)^{\aleph_0}$.

(a) X *est régulier et séparable.*

(b) Tout compact K *de* X *est séparable.*

(2.1.9) COROLLAIRE. - *Soit* X *un espace compactologique vérifiant l'une des conditions de (2.1.8) et tel que* card $X = 2^{\aleph_0}$, *alors avec l'hypothèse du continu une prémesure* μ *sur* X *est une mesure si et seulement si* card $\dot{K}(X) \leqslant 2^{\aleph_0}$.

On donnera au chapitre 4 des applications variées de ces résultats.

2.2. LE THEOREME DE LEBESGUE-NIKODYM.

(2.2.1) DEFINITION. - *Soit* μ *une prémesure sur un espace compactologique* X. *On désigne par* $\Omega(X,\mu)$ *l'espace vectoriel des fonctions numériques dont les restrictions aux compacts de* X *sont intégrables.*

(2.2.2) DEFINITION. - *Soit* $f \in \Omega^+(X,\mu)$ *; l'application* $f.\mu : K \to f_K.\mu_K$ *définit sur* X *une prémesure appelée prémesure produit de* μ *par la fonction* f. *Toute prémesure de la forme* $f.\mu$ *où* $f \in \Omega^+(X,\mu)$ *est appelée prémesure de base* μ.

(2.2.3) THEOREME (LEBESGUE-NIKODYM). - *Soient* ν *une prémesure et* μ *une mesure sur* X. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) ν *est une prémesure de base* μ *;*

(b) ν *est une mesure de base* μ *;*

(c) toute partie localement μ*-négligeable est localement* ν*-négligeable.*

Preuve :

(b) $\Rightarrow$(a) $\Rightarrow$(c) : Evident.

(c) $\Rightarrow$(b) : Soit $(K_\alpha)_{\alpha\in A}$ un μ-concassage de X. Il est clair que toute partie μ_{K_α}-négligeable est ν_{K_α}-négligeable. Il existe donc, sur chaque compact K_α, une fonction f_α intégrable pour μ_{K_α} telle que $\nu_{K_\alpha} = f_\alpha.\mu_{K_\alpha}$. Soit f la fonction sur X définie par $f(x) = f_\alpha(x)$ si $x \in K_\alpha$. Soit K un compact de X. Il existe une suite K_{α_n} telle que $K = N \cup (\bigcup_{n\geq 1}(K\cap K_{\alpha_n}))$ où N est localement négligeable. Il en résulte que pour tout $g \in \mathcal{F}_+(K)$ on a :

$$\nu^\bullet_K(g) = \Sigma\nu_{K_{\alpha_n}}(g^\circ_{K\cap K_{\alpha_n}}) = \Sigma\mu_{K_{\alpha_n}}(f_{\alpha_n}.g^\circ_{K\cap K_{\alpha_n}}) = \mu^\bullet_K(f_K.g).$$

Cela montre d'une part que f_K est intégrable pour μ_K et d'autre part que les encombrements $\nu^\bullet$ et $(f.\mu)^\bullet$ coïncident sur chaque $K \in \mathcal{K}(X)$. Pour finir il suffit de remarquer que tout μ-concassage est un ν-concassage.

Remarque. - Soit $(K_\alpha)_{\alpha\in A}$ un μ-concassage de X. Munissons l'ensemble X de la topologie somme des topologies des sous-espaces K_α. Soit X l'espace localement compact obtenu. Comme tout compact K de X ne rencontre qu'un nombre fini de compacts K_α on peut définir sur X une prémesure μ' par $\mu'_K = \Sigma\mu_{K\cap K_\alpha}$. Il est facile de voir que les fonctions mesurables sont les mêmes pour μ et μ'.

L'ensemble $\Omega(X,\mu)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions localement intégrables sur X et, pour toute fonction positive f, on a $\mu(f) = \mu'(f)$. Il en résulte, sans autre démonstration, que les résultats établis dans ([4], §5) sont encore valables dans le cadre compactologique.

3. - OPERATIONS SUR LES PREMESURES.

3.1. PREMESURE INDUITE.

(3.1.1) DEFINITION. - *Soit Y une partie μ-mesurable de X. On appelle prémesure induite par μ sur Y, la restriction μ_Y de μ à l'ensemble des parties compactes de Y.*

(3.1.2) PROPOSITION. - *Si X est concassable (resp. fortement concassable) pour μ, alors Y est concassable (resp. fortement concassable) pour μ_Y.*

Preuve. - Soit $(K_\alpha)_{\alpha\in A}$ un concassage de X. Pour tout compact K_α, il existe une partition de $K_\alpha \cap Y$ en une suite $(K_{\alpha_n})_{\alpha_n \in A_\alpha}$ de parties compactes, deux à deux disjointes, telle que l'ensemble $N_\alpha = K_\alpha \cap Y \setminus \bigcup_n K_{\alpha_n}$ soit localement négligeable. La famille $(N_\alpha)_{\alpha\in A}$ étant compactement dénombrable l.p.p., il en résulte, avec (1.1.9) que la famille $(K_{\alpha_n}) \cup (\{x\} \ ; \ x \in \bigcup N_\alpha)$ est un concassage de Y. On démontrerait semblablement que si X est fortement concassable, alors Y est fortement concassable pour μ_Y.

(3.1.3) THEOREME. - *Soit μ une prémesure sur un espace compactologique X. Dans les deux cas suivants, μ est une mesure :*

(a) L'espace X est réunion d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ compactement dénombrable l.p.p. de sous-espaces mesurables et concassables respectivement pour les prémesures induites $(\mu_{X_i})_{i\in I}$.

(b) L'espace X est réunion d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ de sous-espaces mesurables et concassables respectivement pour les prémesures induites μ_{X_i} vérifiant :

i) card $I \leq \aleph_1$.

ii) Tout compact K de X est recouvert, à un ensemble négligeable près, par une suite d'ensembles (X_{i_n}).

Preuve. - Elle se fait exactement de la même manière que celles de (2.1.2) et (2.1.3).

(3.1.4) COROLLAIRE. - *Si X est réunion dénombrable de sous-espaces $(X_i)_{i\in I}$*

mesurables et concassables pour les prémesures induites (μ_{X_i})*, alors* X *est concassable.*

(3.1.5) COROLLAIRE. - *Soit* μ *une prémesure sur* X*, somme compactologique d'espaces compactologiques* $(X_i)_{i\in I}$ *concassables pour les prémesures induites* (μ_{X_i})*. Alors* X *est concassable pour* μ.

3.2. FAMILLES SOMMABLES DE MESURES POSITIVES.

(3.2.1) PROPOSITION. - *Soit* $(\mu_i)_{i\in I}$ *une famille de prémesures sur* X*. Pour que la famille* $(\mu_i)_{i\in I}$ *soit sommable, il faut et il suffit que pour tout* $K\in\mathcal{K}(X)$ *la famille* $((\mu_i)_K)_{i\in I}$ *soit sommable dans* $\mathcal{M}(K)$.

Preuve. - Voir ([5]. 2.2).

(3.2.2) THEOREME. - *Soit* (μ_n) *une suite sommable de somme* μ *de prémesures positives sur* X*. Si pour tout* μ_n*,* X *est fortement concassable, alors* X *est* μ*-concassable.*

Preuve. - Soit $(K_\alpha)_{\alpha\in A_0}$ la famille définie dans (1.1.8). L'espace $N_1 = X\setminus\bigcup_{\alpha\in A_0} K_\alpha$ est universellement mesurable dans X ; en effet, son complémentaire est universellement mesurable. Il est donc concassable pour μ_1. On construit de sorte une suite $N_k = N_{k-1}\setminus\bigcup_{\alpha\in A_{k-1}} K_\alpha$ où (K_α) désigne le concassage de N_{k-1}. La famille $(K_\alpha)_{\alpha\in\bigcup A_i}$ est un concassage de X. En effet, d'une part $N = \bigcap_{k\geq 1} N_k$ est localement négligeable pour toute μ_k donc pour $\mu = \Sigma\mu_k$. D'autre part, soit K un compact de X ; $K\cap N_k$ est universellement mesurable et $K\cap N_k = N'\cup(\bigcup_{n=1}^{+\infty} K'_n)$ avec $N'\mu_k$-localement négligeable et universellement mesurable, donc $N' = N''\cup(\bigcup_{n=1}^{+\infty} K''_n)$ avec N'' universellement mesurable et μ_{k+1} localement négligeable et ainsi de suite... Donc K ne rencontre qu'un ensemble dénombrable de compacts de N_k (à un ensemble μ-négligeable près).

3.3. IMAGE D'UNE PREMESURE.

(3.3.1) DEFINITION. - *Une application* i *de* X *dans* Y *est dite* μ*-propre si :*

(a) i *est* μ*-mesurable.*

(b) Pour tout compact K *de* Y*,* $\mu(i^{-1}(K)) < +\infty$.

(3.3.2) PROPOSITION. - *Soit* i *une application* μ*-propre de* X *dans* Y. *Il existe sur* Y *une unique prémesure* ν *(appelée prémesure image par* i *de* μ*) telle que* $\nu^{\bullet}(g) = \mu^{\bullet}(g\circ i)$ *pour toute* $g \in F_+(Y)$.

(3.3.3) LEMME. - *Pour tout compact* K *de* Y, $i^{-1}(K)$ *est* μ*-mesurable.*

Preuve. - Soit H un compact de X ; $H = N\cup(\bigcup\limits_1^{\infty} H_n)$, les restrictions $i_{H_n} = i_n$ étant continues et N négligeable dans H. Donc
$H\cap i^{-1}(K) = N'\bigcup(\bigcup\limits_{n\geq 1}(H_n\cap i^{-1}(K)))$, $N' = N\cap i^{-1}(K)$ est négligeable en tant que sous-espace d'un ensemble négligeable. L'application $i_n : H_n \to i(H_n)$ étant continue, il est clair que $H_n\cap i^{-1}(K) = i_n^{-1}(K\cap i(H_n))$ est compact d'où $i^{-1}(K)\cap H$ est mesurable dans H.

Preuve de la proposition. - Soit μ_K la prémesure induite par μ sur $i^{-1}(K)$. La prémesure μ_K étant bornée, on a $i^{-1}(K) = N\cup(\bigcup\limits_1^{\infty} L_n)$ où N est négligeable, L_n compact, $i_n = i_{L_n}$ continue, et $n \neq n' \Rightarrow L_n\cap L'_n = \emptyset$. Soient μ_n la mesure induite par μ_K sur L_n et ν_n la mesure image sur K de μ_n par l'application $i_n : L_n \to K$. La famille (ν_n) est sommable, $\nu_K(K) = \sum\limits_1^{\infty} \nu_n(K) = \sum\limits_1^{\infty} \mu_n(i^{-1}(K)) = \mu^{\bullet}(i^{-1}(K))$. De plus, il est facile de voir que si $K\supset K'$ alors $(\nu_K)_{K'} = \nu_{K'}$. Soit donc $\nu = (\nu_K)_{K\in K(X)}$ la prémesure ainsi obtenue.

Pour tout $g\in F_+(Y)$ on a $\nu^{\bullet}(g) = \mathrm{Sup}\ \nu_K^{\bullet}(g_K) = \mathrm{Sup}\ \mu_K^{\bullet}(g\circ i) \leq \mu^{\bullet}(g\circ i)$. D'autre part, si $H = N\cup(\bigcup H_n)$ est un compact de X, posons $H'_n = \bigcup\limits_{k\leq n} H_k$; on a alors $i(H'_n) = \bigcup\limits_{k\leq n} i(H_k)$ et $i(H'_n)$ est compact. Donc
$\mu_H^{\bullet}(g\circ i) = \mathrm{Sup}\ \mu_{H'_n}^{\bullet}(g\circ i) < \mathrm{Sup}\ \nu_{i(H'_n)}^{\bullet}(g) \leq \nu^{\bullet}(g)$.
L'unicité est triviale. Si ν et ν' sont deux prémesures images de μ, on a alors $\nu(K) = \mu(i^{-1}(K)) = \nu'(K)$ pour tout $K\in K(Y)$.

(3.3.4) PROPOSITION. - *Soit* f *une application de* Y *dans* Z ; f *est* ν*-mesurable si et seulement si* $f\circ i$ *est* μ*-mesurable.*

Preuve. - Supposons f mesurable. Soit $K\in K(X)$; $K = N\cup(\bigcup\limits_{n\geq 1} K_n)$ et $i(K_n) = N_n\bigcup(\bigcup\limits_{j\geq 1} K'_{n,j})$, avec i_{K_n} continue et $f_{K'_{n,j}}$ continue. Donc

$K = N' \cup (\bigcup_{n,j} i_n^{-1}(K'_{n,j}))$, et $f \circ i$ restreinte à $i_n^{-1}(K'_{n,j})$ est continue. Réciproquement, supposons $f \circ i$ mesurable et soit K un compact de Y ; $i^{-1}(K) = N \cup (\bigcup_1^\infty L_n)$ où (L_n) est la suite définie dans la proposition précédente. Il est clair que $f \circ i$ restreinte à L_n est μ_n-mesurable, donc f restreinte à K est ν_n-mesurable, donc encore ν_K-mesurable.

(3.3.5) <u>COROLLAIRE</u>. - *Soient X un sous-espace de Y et μ une prémesure sur X telle que l'injection* $i : X \to Y$ *soit μ-propre, alors il existe sur Y une prémesure unique ν vérifiant :*

(a) X est ν-mesurable.

(b) μ est exactement la prémesure induite par ν sur X.

(c) $\nu^\bullet(Y \setminus X) = 0$.

<u>*Preuve :*</u>

(a) : Si $K \in \mathcal{K}(Y)$ alors $K \cap X$ est μ-mesurable,

(b) : Soit K un compact de X, par construction de ν on a $\nu_K = \mu_K$,

(c) : $\nu^\bullet(Y \setminus X) = \mu^\bullet((Y \setminus X) \cap X) = \mu(\emptyset) = 0$.

(3.3.6) <u>THEOREME</u>. - *Soient μ une mesure sur X et* i *une application μ-propre de X dans Y. Si l'image par* i *de toute partie localement négligeable* N *est une partie localement négligeable, alors la prémesure image* $i(\mu)$ *est une mesure.*

Preuve. - Soit $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ un concassage de X tel que les restrictions i_{K_α} soient continues. La famille $(i(K_\alpha))_{\alpha \in A}$ forme un recouvrement de Y par des ensembles $i(\mu)$-concassables. Soit maintenant K un compact de Y ; $i^{-1}(K)$ est intégrable, par conséquent de la forme $i^{-1}(K) = N \cup A$ où N est une partie localement négligeable de X, et A ne rencontre qu'un nombre dénombrable de compacts (K_α). Il en résulte que $K = i(N) \cup (i(A) \setminus i(N))$ est réunion d'une partie localement négligeable $i(N)$ (par hypothèse) et de l'ensemble $i(A) \setminus i(N)$ qui ne rencontre qu'un nombre dénombrable d'ensembles $i(K_\alpha)$. On conclut en appliquant (2.1.2).

Remarque. - Si l'application i est injective, la condition du théorème est trivialement vérifiée.

Avec l'hypothèse du continu, on a encore :

(3.3.7) THEOREME. - *Soient* μ *une mesure sur* X *et* i *une application* μ*-propre de* X *dans* Y. *On suppose que* card $K(X) \leqslant \aleph_1$. *Alors* Y *est concassable pour la prémesure image* $i(\mu)$.

Preuve. - L'image réciproque par i d'un ensemble compact K de Y est de la forme $i^{-1}(K) = N \cup (\bigcup K_n)$ où N est un ensemble localement négligeable et (K_n) une suite de compacts de X. Il en résulte que card $\dot{K}(Y) \leqslant (\text{card } K(X))^{\aleph_0} \leqslant 2^{\aleph_0}$. Pour toute classe $\dot{K}$ de $\dot{K}(Y)$, soit K un représentant. Alors l'ensemble $A = \bigcup_{\dot{K} \in \dot{K}(Y)} K$ est concassable pour la prémesure induite μ_A (avec 2.1.3) ; son complémentaire dans X étant localement négligeable, le résultat est acquis.

3.4. RELEVEMENT D'UNE MESURE. - N. BOURBAKI envisage uniquement le relèvement des mesures bornées.

(3.4.1) THEOREME. - *Soient* i *une application continue de* X *dans* Y *et* μ *une mesure sur* Y. *Pour qu'il existe une mesure* ν *sur* X *telle que l'application* i *soit* ν*-propre et* $i(\nu) = \mu$, *il faut et il suffit que pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout* $K \in K(Y)$ *il existe* $K_\varepsilon \in K(i^{-1}(K))$ *tel que* $\mu^\bullet(K \setminus i(K_\varepsilon)) \leqslant \varepsilon$ *et tel que* f *envoie continûment* K_ε *dans un compact de* Y.

Preuve. - Soit $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ un concassage de Y. L'application $i_\alpha : i^{-1}(K_\alpha) \to K_\alpha$ satisfait aux conditions du théorème ([5], 2.4), il existe par conséquent sur $i^{-1}(K_\alpha)$ une mesure bornée ν_α telle que $\mu_\alpha = i_\alpha(\nu_\alpha)$. Par abus de notation, désignons encore par ν_α la mesure image sur X par l'injection $i^{-1}(K_\alpha) \to X$. La famille (ν_α) est sommable : en effet, soit $H \in K(X)$;
$\nu^\bullet(H) = \Sigma\nu_\alpha(H) = \Sigma\nu_\alpha(H \cap i^{-1}(K_\alpha)) \leqslant \Sigma\mu_\alpha(i(H) \cap K_\alpha) \leqslant \mu(i(H)) < +\infty$. De plus, si $g \in F_+(Y)$ alors $\nu^\bullet(g \circ i) = \Sigma\nu^\bullet_\alpha(g \circ i_\alpha) = \Sigma\mu^\bullet_\alpha(g_{K_\alpha}) = \mu^\bullet(g)$. Montrons finalement que ν est une mesure : $i^{-1}(K_\alpha) = N_\alpha \cup (\bigcup_1^\infty K_{\alpha,n})$ où $(K_{\alpha,n})$ est une suite de compacts deux à deux disjoints et N_α localement négligeable.

Si i est injective et si ν et ν' sont deux mesures distinctes sur X telles que $i(\nu) = \mu = i(\nu')$, alors $\nu(K) = \mu(i(K)) = \nu'(K), K \in K(X)$.

3.5. PRODUIT DE DEUX PREMESURES. - Soient X et Y deux espaces compactologiques munis respectivement d'une prémesure λ et μ. Pour tout compact K de $X \times Y$ soit A (resp. B) la projection de K sur X (resp. sur Y). Désignons par ν_K la prémesure induite par $\lambda_A \otimes \mu_B$ sur K, alors :

(3.5.1) DEFINITION. - *On appelle prémesure produit de* λ *et* μ *sur* $X\times Y$ *la prémesure définie par* $\nu = (\nu_K)_{K\in K(X\times Y)}$ *; on notera* $\nu = \lambda\otimes\mu$.

(3.5.2) PROPOSITION. - *Pour toute fonction* $f\in F_+(X)$ *et toute fonction* $g\in F_+(Y)$, *on a* $\overset{\bullet}{\nu}(f\otimes g) = \overset{\bullet}{\lambda}(f).\overset{\bullet}{\mu}(g)$.

Preuve. - Voir ([5] 2.6).

FONCTIONS ET MESURES MODEREES SUR UN ESPACE COMPACTOLOGIQUE. - Les fonctions et mesures modérées ont un rôle important, dans la théorie de l'intégration, sur les espaces topologiques produits. Nous allons introduire des notions ne faisant intervenir que des compacts et donnant les mêmes résultats pour l'intégrale supérieure essentielle.

(3.5.3) DEFINITION. - *Une fonction* f *sur un espace compactologique* X *est dite modérée pour une prémesure* μ, *si* f *est nulle dans le complémentaire d'une réunion dénombrable d'ensembles ouverts dans* cX *et* μ*-intégrables. Une fonction* f *est dite faiblement modérée si elle est somme d'une suite de fonctions à supports compacts disjoints.*

(3.5.4) DEFINITION. - *Une prémesure* μ *sur un espace compactologique est dite modérée (resp. faiblement modérée) si la fonction caractéristique de* X *est modérée pour* μ *(resp. faiblement modérée).*

Remarque. - Les notions de fonctions modérées et fonctions faiblement modérées ne sont pas comparables. Il existe en effet, des mesures non modérées somme dénombrable de mesures à supports compacts disjoints. Pour un exemple, voir ([5], 19, ex.8).

(3.5.5) PROPOSITION. - *Soit* f *une fonction positive* ν*-mesurable définie dans* $X\times Y$. *Supposons l'une des conditions suivantes réalisée :*

(a) f *est modérée.*

(b) f *est faiblement modérée.*

(c) μ *est modérée.*

(d) μ *est faiblement modérée.*

Alors :

i) L'ensemble N *des* $x\in X$ *tels que l'application* $y \to f(x,y)$ *ne soit pas mesurable est localement négligeable.*

ii) L'application $x \to f(x,y)$ *est* λ*-mesurable et*

$$\iint^{\bullet} f(x,y)d\nu = \int^{\bullet} d\lambda \int^{\bullet} f(x,y)d\mu(y).$$

Preuve. - Les cas (b) et (d) se démontrent pareillement à ([5] 2.6, prop. 12) en remarquant que l'on peut se passer du corollaire (2.6, corol. 1). Dans les cas (a) et (c) le résultat s'obtient en raisonnant différemment. Si $(K_\alpha)_{\alpha\in A}$ est un concassage de X et $(H_\beta)_{\beta\in B}$ un concassage de Y, soit $(K_\alpha \times H_\beta)$ le concassage correspondant de $X\times Y$. On munit l'espace $X\times Y$ de la topologie produit de X et Y où X (resp. Y) est l'espace somme topologique des sous-espaces K_α (resp. H_β). Cette topologie coïncide avec la topologie somme des topologies des espaces $K_\alpha \times H_\beta$. Soient λ' et μ' les mesures définies sur X et Y (voir (2.1)) et ν' la mesure produit sur X×Y. Les fonctions mesurables et les fonctions essentiellement intégrables étant les mêmes pour ν et ν', le résultat provient du fait que f est modérée pour ν' (resp. μ' est modérée) sur X×Y.

(3.5.6) <u>THEOREME</u> (LEBESGUE-FUBINI). - *Soient* f *une fonction essentiellement intégrable définie dans* $X\times Y$ *et* N *l'ensemble des* $x\in X$ *tels que la fonction* $y \to f(x,y)$ *ne soit pas* μ*-intégrable. Supposons que la mesure* μ *soit modérée ou faiblement modérée.* N *est alors localement négligeable ; la fonction* $x \to \int f(x,y)d\mu(y)$ *est essentiellement intégrable et l'on a*

$$\iint f(x,y)d\nu(x,y) = \int d\lambda(x) \int f(x,y)d\mu(y).$$

Preuve. - Utilisons les notations de la démonstration précédente. Si μ est modérée, μ' l'est aussi, et le résultat est immédiat. Si μ est faiblement modérée, il existe une partition de Y en une suite de parties compactes (K_n), donc μ' est modérée (en prenant pour concassage de Y la suite (K_n)).

4. - COMPARAISON ENTRE LES MESURES SUR LES ESPACES TOPOLOGIQUES ET LES PREMESURES SUR LES ESPACES COMPACTOLOGIQUES CANONIQUEMENT ASSOCIES.

4.1. <u>LE CAS DES PREMESURES ATOMIQUES</u>.

(4.1.1) <u>THEOREME</u>. - *Toute prémesure atomique sur un espace compactologique* X *est une mesure.*

Preuve. - Il est clair que l'ensemble des points de X forme un concassage de X pour toute prémesure atomique μ.

Nous allons montrer qu'une prémesure atomique définie sur un espace topologique T n'est pas nécessairement localement bornée.

(4.1.2) EXEMPLE. - *Soient* T *un ensemble non dénombrable et* a *un point de* T. *On munit l'ensemble* T *de la topologie suivante : si* $x \neq a$, $\{x\}$ *est ouvert, les voisinages de* a *sont les parties de* T *contenant* a *dont le complémentaire est dénombrable. Soit* μ *la prémesure sur* T *qui vaut* 1 *en chaque point. Alors :*

(a) T *est un* P*-espace.*

(b) La prémesure μ *est non localement bornée sur* T.

Preuve :
(a) : Soit f une fonction continue sur T. Si son noyau Z(f) est disjoint de a, il est évidemment ouvert. Dans le cas contraire, par continuité au point a, Z(f) contient un voisinage de a et c'est encore un ouvert de T.
(b) : En effet, aucun voisinage de a est dénombrable.

Dans l'exemple qui suit, on montre que même pour des espaces dénombrables une prémesure atomique peut être non localement bornée.

(4.1.3) EXEMPLE. - *Soit* $T = \mathbb{N} \cup \{a\}$ *(avec* $a \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$*) muni de la topologie induite par* $\beta\mathbb{N}$ *(compactifié de Stone-Čech de* $\mathbb{N}$*). Soit* μ *la prémesure qui vaut 1 en tout point de* T. *Alors :*

(a) Tout compact de T *est fini.*

(b) La trace d'un voisinage de a *sur* $\mathbb{N}$ *est un ensemble non fini.*

(c) La prémesure μ *est non localement bornée.*

Preuve :
(a) : Sinon il existe un compact infini K contenant a. Il existe alors deux suites infinies distinctes A et B telles que $K \setminus (A \cup B) = \{a\}$. A et B étant des noyaux disjoints de $\mathbb{N}$ leurs adhérences sont disjointes dans $\beta\mathbb{N}$, donc dans T, ce qui est absurde puisque a est adhérent à la fois à A et B.
(b) et (c) : Evident.

On peut remarquer que si l'on munit l'espace T, défini dans l'un des deux exemples précédents, de la topologie la plus fine compatible avec ses compacts, on obtient un espace discret, et par conséquent toute prémesure sur T est localement bornée pour cette topologie. On est donc en droit de se demander si une prémesure atomique est toujours localement bornée pour une topologie compatible. Il n'en est rien avec les exemples :

(4.1.4) EXEMPLE. - *Soit* T *l'espace somme topologique des droites numériques* $(\mathbb{R}_i)_{i\in\mathbb{R}}$. *On définit, sur chaque* $\mathbb{R}_i$, *une prémesure atomique par* $\mu_i(1/n^2) = 1/n^2$ *et* $\mu_i(x) = 0$ *s'il n'existe pas d'entier* n *vérifiant* $x=1/n^2$. *On munit l'espace* T *de la prémesure somme* $\mu = \Sigma\mu_i^\circ$ *où* μ_i° *est la prémesure qui coïncide avec* μ_i *sur* $\mathbb{R}_i$ *et qui vaut* 0 *ailleurs. Finalement, soit* X *l'espace quotient obtenu en identifiant les points* $(0_i)_{i\in\mathbb{R}}$ *de* T *en un point unique* 0. *Alors :*

(a) L'espace X *est un* k-*espace.*

(b) L'application canonique $i : T \to X$ *est* μ-*propre.*

(c) La prémesure image $i(\mu)$ *est non localement bornée sur* X.

(d) L'espace X *est concassable pour la prémesure* $i(\mu)$.

Preuve :

(a) : Tout espace quotient d'un k-espace est un k-espace.

(b) : Soit K un compact de X ; s'il ne contient pas le point 0, il est compact dans T. Dans le cas contraire, supposons qu'il existe une suite infinie de points $x_n \in K$, distincts de 0 et appartenant deux à deux à des droites différentes. On voit aisément qu'il existerait alors un compact de T rencontrant un nombre infini de droites, ce qui est absurde. Donc $K\setminus\{0\}$ ne rencontre qu'un nombre fini de droites et par conséquent $i^{-1}(K)$ est réunion d'un compact de T et de l'ensemble $(0_i)_{i\in\mathbb{R}}$.

(c) : En effet, tout voisinage du point 0 est de mesure infinie.

(d) : L'image par i d'un ensemble localement négligeable pour μ est un ensemble localement négligeable pour la prémesure image $i(\mu)$ et tout est conséquence de (3.3.6).

Remarque. - On montrera dans (4.3.8) qu'avec l'hypothèse du continu l'espace X est en fait concassable pour toute prémesure λ.

Remarque. - L'espace X n'admet pas de concassage dénombrable pour $i(\mu)$. En effet, dans le cas contraire, l'espace T serait réunion dénombrable de compacts (à un ensemble localement négligeable près).

L'exemple suivant est emprunté en partie à N. BOURBAKI ([3], 1.ex.5).

(4.1.5) EXEMPLE. - *Soit* T *le sous-ensemble de* $\mathbb{R}^2$, *réunion de la droite* $D = \{0\}\times\mathbb{R}$ *et de l'ensemble des points* $(1/n, k/n^2)$ *où* n *parcourt l'ensemble des entiers* >0 *et* k *l'ensemble* $\mathbb{Z}$ *des entiers relatifs. Prenons comme système fondamental de voisinages de chaque point* $(0,y)$ *de* D *l'ensemble* $T_n(y) = \{(u,v) \ ; \ u\leq 1/n$ *et* $|v-y| \leq u\}$, *et comme voisinage de chaque autre point l'ensemble réduit à ce point. Soit* μ *la prémesure sur* T *qui vaut* $1/n^3$ *en chaque point de la forme* $(1/n,k/n^2)$ *et* 0 *ailleurs. On désigne par* X *l'espace obtenu en identifiant la droite* D *à un point. On a alors :*

(a) X *est un* k*-espace dénombrable et hémicompact (c'est donc un* k_R*-espace).*

(b) L'application $i : T \to X$ *est* μ*-propre.*

(c) La prémesure image $i(\mu)$ *n'est pas localement bornée sur* X.

Preuve :

(a) : T est localement compact, donc X est un k-espace ; de plus, il est évident que X est dénombrable. Montrons que les ensembles de la forme $D\cup T_1(k/n^2) = K_{n^2}$ forment une base de compacts de X. Les ensembles de la forme $T_1(k/n^2)\setminus T_{n'}(k/n^2)$ avec $n'\geq 1$ étant finis, il est clair que K_n est lui-même compact.
Soit maintenant K un compact de X. Pour conclure, il suffit de montrer que l'ensemble $p_{r_2}K$ est fini dans $\mathbb{R}$. Dans le cas contraire, soit par exemple $p_{r_2}x_n$ une suite de $p_{r_2}K$ croissante et non finie. On peut bien sûr supposer tous les points x_n distincts de D. Il est facile de voir qu'il existe alors une sous-suite croissante $p_{r_2}x_{n_k}$ et une suite d'ensembles $T_{i_k}(p_{r_2}x_{n_k})$ tels que x_{n_k} n'appartient à aucun ensemble T_{i_j}. Il en découle immédiatement l'existence d'un voisinage fermé U de D disjoint de la sous-suite (x_{n_k}), ce qui termine la démonstration.

(b) : En effet, l'image réciproque d'un compact K de X est incluse (d'après ce qui précède) dans la réunion de la droite D (de mesure nulle) et d'une réunion finie d'ensembles de la forme $T_1(k/n^2)$; ces derniers étant compacts dans T, le résultat est acquis.

(c) : Soit U un voisinage de D ; pour tout $y\in\,]0,1[$ posons $d(y) = \mathrm{Sup}(1/n \ ; \ T_n(y)\subset U)$ et $A_n = \{y\in\,]0,1[\ ; \ d(y) = 1/n\}$. Les ensembles A_n sont fermés dans $\mathbb{R}$ et on a $\bigcup A_n = \,]0,1[$. Il résulte alors du théorème de Baire qu'un, au moins, des ensembles A_n a un point intérieur ; il existe donc un intervalle $(a,b)\subset\,]0,1[$ et $n_0>0$ tels que pour tout $y\in(a,b)$ on ait $T_{n_0}(y)\subset U$.
Soit $B = \bigcup_{y\in(a,b)} T_{n_0}(y)$; c'est un sous-ensemble de U de mesure infinie.

4.2. LES ESPACES DE TYPE PONCTUELLEMENT DENOMBRABLE. - Ces espaces furent introduits par Arhangel'skii [1] afin de généraliser simultanément les propriétés des espaces localement compacts et des espaces métrisables.

(4.2.1) DEFINITION. - *Un espace topologique* T *est dit de type ponctuellement dénombrable s'il est réunion d'une famille de compacts possédant respectivement une base dénombrable de voisinages.*

(4.2.2) THEOREME. - *Toute prémesure définie sur un espace de type ponctuellement dénombrable est localement bornée.*

Preuve. - Soient x un point de T, K un compact contenant x et possédant une base dénombrable de voisinages. Il existe alors un voisinage de K de mesure finie. En effet, dans le cas contraire, soit (V_n) une base décroissante de voisinages de K. On peut construire une suite de compacts (K_k) vérifiant :

a) $K_k \subset V_{n_k} \setminus V_{n_{k+1}}$ (où V_{n_k} est une sous-suite extraite de (V_n)).

b) $\mu(K_k) \geqslant 1$.

L'ensemble $H = K \cup (\bigcup_{1}^{\infty} K_k)$ étant lui-même compact, on obtient la contradiction.

(4.2.3) COROLLAIRE. - *Toute prémesure* μ *sur un espace métrisable* T *est localement bornée.*

On peut se demander s'il est nécessaire qu'un espace soit de type ponctuellement dénombrable pour que toute prémesure sur T soit localement bornée. L'exemple suivant montre qu'il n'en est rien.

(4.2.4) EXEMPLE. - *Soient* ω_1 *le premier ordinal non dénombrable et* T *l'espace défini par* $T = \mathbb{N} \times [0,\omega_1]$. *On désigne par* X *l'espace quotient obtenu en identifiant les points de la forme* (n,ω_1) *en un point unique* Ω_1. *On a alors :*

(a) X *est un* k*-espace.*

(b) Toute prémesure sur X *est atomique et l'ensemble des points de* X *de mesure non nulle est dénombrable.*

(c) Toute prémesure μ *sur* X *est localement bornée et l'espace* X *n'est pas de type ponctuellement dénombrable.*

Preuve :

(a) : Evident.

(b) : Il est facile de voir que tout compact K de X est soit un compact de T, soit réunion d'un compact de T et du point Ω_1. Il en résulte que tout compact K de X possède un point isolé pour la topologie induite, et par conséquent, d'après un résultat de Rudin [8], toute prémesure μ sur X est atomique. D'autre part, pour tout entier n, l'ensemble des points de la forme (n,α) et de mesure non nulle est évidemment dénombrable, donc l'ensemble des points de X de mesure non nulle est dénombrable.

(c) : Soit (a_n) l'ensemble des points de mesure non nulle distincts de Ω_1. Posons $a = \operatorname{Sup} p_{r_2} a_n$. Le voisinage de Ω_1 de la forme $\mathbb{N}\times]a,\omega_1]$ est évidemment de mesure finie.

4.3. AUTOUR DES ESPACES SEPARABLES DE TYPE G_δ.

(4.3.1) DEFINITION. - *Un espace topologique séparé est dit de type* G_δ *si tout compact* K *est inclus dans un compact* K', *intersection dénombrable d'ouverts.*

Tous les espaces de type G_δ considérés dans cette partie sont complètement réguliers et séparables. Il convient de remarquer que de tels espaces ne sont pas métrisables ; d'ailleurs une prémesure sur un tel espace n'est pas toujours localement bornée, même si ce dernier est un k_R-espace dénombrable, comme le montre l'exemple (4.1.5).

Nous allons par contre montrer qu'il est toujours concassable, avec la proposition préliminaire suivante :

(4.3.2) PROPOSITION. - *Soient* T *un espace séparable de type* G_δ *et* $K_\delta(T)$ *l'ensemble des compacts* G_δ *de* T. *On a* card $K_\delta(T) \leq 2^{\aleph_0}$.

Preuve. - Il est clair que si $C^\infty(T)$ désigne l'algèbre des fonctions continues et bornées sur T, on a card $C^\infty(T) \leq 2^{\aleph_0}$. Par complète régularité, tout compact G_δ de T est déterminé d'une façon unique par une suite de fonctions continues. On en déduit l'inégalité : card $K_\delta(T) \leq (\text{card } C^\infty(T))^{\aleph_0}$, d'où le résultat.

Avec l'hypothèse du continu on en déduit immédiatement :

(4.3.3) THEOREME. - *Tout espace complètement régulier séparable de type* G_δ *est universellement concassable.*

Preuve. - Elle résulte de (4.3.2) et (2.1.4).

(4.3.4) COROLLAIRE. - *Tout espace* T *somme topologique d'espaces séparables de type* G_δ *est universellement concassable.*

(4.3.5) COROLLAIRE. - *Tout espace* T *quotient séparé d'un espace séparable de type* G_δ *est concassable pour toute prémesure image* $i(\mu)$, *où* i *est l'application canonique et* μ *une prémesure sur* T.

LE CAS DES ESPACES METRISABLES A BASE DENOMBRABLE. - Pour un tel espace la proposition (4.3.2) peut s'améliorer de façon évidente et devient :

(4.3.6) PROPOSITION. - *Soient* T *un espace métrisable à base dénombrable et* $\mathcal{F}(T)$ *l'ensemble des parties fermées de* T. *On a card* $\mathcal{F}(T) \leq 2^{\aleph_0}$.

(4.3.7) THEOREME. - *Soit* T *un espace topologique tel qu'il existe une application surjective et continue* f *d'un espace* X *métrisable à base dénombrable dans* T. *L'espace* T *est alors universellement concassable.*

Preuve. - En effet il est clair que card $\mathcal{K}(T) \leq$ card $\mathcal{F}(X)$.

(4.3.8) COROLLAIRE. - *Tout espace quotient séparé d'un espace métrisable à base dénombrable est universellement concassable.*

(4.3.9) COROLLAIRE. - *Tout espace* T *image par une application continue* f *d'un espace polonais* P *est universellement concassable.*

Ce résultat peut se modifier légèrement en remplaçant T par une somme topologique. On obtient :

(4.3.10) PROPOSITION. - *Soient* X *un espace somme topologique d'espaces métrisables à base dénombrable indexés par un ensemble de cardinal inférieur ou égal à* $2^{\aleph_0}$, f *une application surjective et continue de* X *dans un espace topologique* T *et* $\mathcal{A}$ *un sous-ensemble de* $\mathcal{P}(X)$ *tel que* card $\mathcal{A} \leq 2^{\aleph_0}$. *On suppose que pour tout compact* K *de* T *on a* $f^{-1}(K) = A \cup (\bigcup_1^\infty K_n)$ *où* A *est un élément de* $\mathcal{A}$ *et* (K_n) *une suite de parties compactes de* X. *Alors, avec l'hypothèse du continu, l'espace* T *est universellement concassable.*

Les prémesures sur T ne sont pas pour autant localement bornées qu'elles soient atomiques (comme on le voit dans (4.1.4)) ou diffuses comme le montre l'exemple suivant :

(4.3.11) <u>EXEMPLE</u>. - *Soit* $T = \sum_{i \in \mathbb{R}} \mathbb{R}_i$ *une somme topologique de droites. On définit sur* T *une prémesure* μ *par* $\mu = \sum_{i \in \mathbb{R}} \mu_i$ *où* μ_i *est la prémesure qui coïncide avec la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}_i$ *et qui vaut* 0 *ailleurs. On désigne, comme en (4.1.4), par* X *l'espace quotient de* T *obtenu en identifiant les points* $(0_i)_{i \in \mathbb{R}}$ *en un point unique* 0. *On a alors :*

(a) L'application $i : T \to X$ *vérifie les conditions énoncées dans (4.3.10).*

(b) La prémesure image $i(\mu)$ *est non localement bornée.*

(c) Avec l'hypothèse du continu, l'espace X *est universellement concassable.*

Preuve. - C'est la même que celle de (4.1.4).

Néanmoins on n'a pas de contre-exemple correspondant pour les quotients d'espaces métrisables à base dénombrable. Il convient donc d'énoncer :

(4.3.12) <u>PROBLEME</u>. - *Une prémesure définie sur un espace* T *quotient d'un espace métrisable à base dénombrable est-elle localement bornée ?*

5. - ESPACES TOPOLOGIQUES LOCALEMENT CONCASSABLES.

Soit μ une prémesure localement bornée sur un k-espace T. Il en résulte en particulier que tout point x de T possède un voisinage U(x) concassable pour la prémesure induite $\mu_{U(x)}$. On peut alors se demander si cette condition à elle seule, ne suffit pas pour que T soit μ-concassable.

Sans répondre complètement à cette question, nous allons montrer que dans un nombre important de cas (mis à part le cas trivial où μ est localement bornée) ceci a effectivement lieu.

(5.1) <u>DEFINITION</u>. - *Soit* μ *une prémesure sur un* k-*espace* T. *On dit que* T *est localement concassable pour la prémesure* μ *si pour tout* $x \in T$ *il existe un voisinage ouvert* U(x) *concassable pour la prémesure induite* μ_U.

(5.2) <u>THEOREME</u>. - *Soit* T *un* k-*espace tel que tout point possède un voisinage dont le concassage est dénombrable. Alors* T *est concassable.*

Preuve. - Soit $(K_\alpha)_{\alpha\in A} = H$ une famille de compacts de T deux à deux disjoints et tels que Supp $\mu_{K_\alpha} = K_\alpha$. Soient maintenant $K \in K(T)$ et V un voisinage de K concassable. Le voisinage V est lui-même de la forme $V = N \cup (\bigcup_1^\infty K_n)$ où N est localement négligeable et les compacts (K_n) deux à deux disjoints. La mesure sur V définie par $\nu = \sum_1^\infty 2^{-n} \frac{\mu_{K_n}}{\mu(K_n)}$ est bornée. Il en découle que l'ensemble $\cup K_n$ ne rencontre qu'un ensemble dénombrable de compacts K .

Ordonnons les ensembles $H = (K_\alpha)_{\alpha\in A}$ par inclusion ; il existe un élément maximal soit $(H_\beta)_{\beta\in B}$, c'est un concassage de T.

(5.3) <u>COROLLAIRE</u>. - *Si tout point* $x \in T$ *possède un voisinage réunion dénombrable de compacts (en particulier lorsque* T *est lui-même réunion dénombrable de compacts), alors* T *est universellement concassable.*

Une prémesure μ sur un tel espace n'est pas pour autant localement bornée comme le montre l'exemple (4.1.5).

(5.4) <u>THEOREME</u>. - *Soit* T *un* k*-espace paracompact ; les notions suivantes sont équivalentes :*

(a) T *est concassable pour* μ,

(b) T *est localement concassable pour la prémesure* μ.

<u>*Preuve*</u> *:*

(a) $\Rightarrow$(b) : Evident.

(b) $\Rightarrow$(a) : Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement localement fini de T par des ouverts concassables pour les prémesures induites. Soient $H_i = (K_\alpha)_{\alpha\in A_i}$; les concassages respectifs de $(U_i)_{i\in I}$ et $H = \bigcup_{i\in I} H_i$. Il est clair que H est un recouvrement de T compactement dénombrable l.p.p. et on conclut avec (2.1.2).

Par contre, nous ne savons pas si cette propriété est encore vraie dans le cas général. Il convient donc de poser le problème.

(5.5) <u>PROBLEME</u>. - *Un espace* T *localement concassable pour une prémesure* μ *est-il concassable pour cette prémesure ?*

BIBLIOGRAPHIE

(1) A.V. ARHANGEL'SKII, *On a class of spaces containing all metric and all locally bicompact spaces*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 151, 1963, p. 751-754.

(2) N. BLANCHARD - M. JOURLIN, *La topologie de la convergence bornée sur les algèbres de fonctions continues*, Publ. Dép. Math. Lyon, 6-2, 1969, p. 85-96.

(3) N. BOURBAKI, *Intégration*, chap. 1,2,3,4, 1965, Hermann, Paris.

(4) N. BOURBAKI, *Intégration*, chap. 5, 1965, Hermann, Paris.

(5) N. BOURBAKI, *Intégration*, chap. 9, 1969, Hermann, Paris.

(6) H. BUCHWALTER, *Topologies et compactologies*, Publ. Dép. Math. Lyon, 6-2, 1969, p. 1-74.

(7) A.H. KRUSE, *Badly incomplete normed linear spaces*, Math. Zeitschr, 83, 1964, p. 314-320.

(8) W. RUDIN, *Continuous functions on compact spaces without perfect subsets*, Proc. Amer. Math. Soc., 8, 1957, p. 39-42.

Manuscrit remis le 10 septembre 1972.

A. GOLDMAN

Département de Mathématiques
Université de Lyon I
43, boulevard du 11 novembre 1918
69621-VILLEURBANNE