

MICHEL HACQUE

Localisations et schémas affines

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1971,
tome 8, fascicule 2
, p. 1-114

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1971__8_2_A2_0>

© Université de Lyon, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LOCALISATIONS ET SCHEMAS AFFINES

Michel HACQUE

INTRODUCTION.

Cet article est consacré à la mise en évidence des possibilités qu'offre la théorie des localisations, en vue de l'étude des schémas affines.

Etant donné un anneau commutatif A , si $\mathcal{A} = \text{Mod } A$ est la catégorie des A -modules et si $X = \text{Spec}(A)$ est le spectre premier de A , muni de la topologie spectrale, tout ouvert U de X détermine une localisation $\tilde{\mathcal{L}}_U$ dans \mathcal{A} (Proposition 2-8). Les foncteurs localisations L_U de ces localisations $\tilde{\mathcal{L}}_U$, permettent la construction d'un foncteur préfaisceau P (Définition 3-4), tel que pour tout objet M de \mathcal{A} , le foncteur $P(\cdot, M)$ soit un préfaisceau $P(M)$ sur l'espace topologique X et tel que tout ouvert U de X vérifie $P(U, M) = L_U M$.

Le foncteur préfaisceau P étant séparé (Théorème 3-6), la méthode de Čech détermine un foncteur faisceau \check{P} (Définition 4-2) et le morphisme fonctoriel canonique $\theta : P \rightarrow \check{P}$ est un mo-

nomorphisme fonctoriel (Proposition 4-1).

L'intérêt de ces constructions réside en ce que pour tout ouvert quasi-compact U de X , les morphismes canoniques $\theta_M^U : P(U, M) \rightarrow \check{P}(U, M)$ sont des isomorphismes (Théorème 4-3). Ce résultat, fondamental pour la suite, entraîne que le faisceau d'anneaux $\check{P}(A)$ sur X coïncide avec le faisceau structural $\mathcal{O}_X = \tilde{A}$ du schéma affine (X, \mathcal{O}_X) associé à l'anneau A et que pour tout objet M de \mathcal{A} , le faisceau $\check{P}(M)$ sur X est un $\check{P}(A)$ -Module qui coïncide avec le \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent \tilde{M} associé de façon classique au A -module M (Corollaire 4-4). Ces résultats montrent donc que le Théorème 4-3 constitue une généralisation du théorème (1-3-7) de [7], qui établit le résultat analogue dans le cas particulier où U est un ouvert affine spécial de la forme $D(f)$ avec $f \in A$.

Il en résulte également des caractérisations simples des sections du faisceau structural d'un schéma affine ou d'un Module quasi-cohérent, au-dessus d'un ouvert quasi-compact (Corollaire 4-5). Un cas particulier (Corollaire 4-6) donne une généralisation des premiers résultats obtenus dans cette voie dans [12].

Dans le cas où l'anneau A est noethérien, les résultats obtenus prennent une forme simple (Corollaire 4-8) et il en résulte en particulier que pour tout A -module injectif N , le \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent \tilde{N} associé, est un faisceau flasque (Corollaire 4-9). A titre de curiosité, ce résultat permet d'obtenir une démonstration élémentaire de la trivialité de

la cohomologie des Modules quasi-cohérents (Remarque (c)).

Etant donné un schéma affine (X, \mathcal{O}_X) associé à un anneau commutatif A , la suite est consacrée à l'étude du préschéma (U, \mathcal{O}_U) induit sur un *ouvert quasi-compact* U , de X , par le schéma affine (X, \mathcal{O}_X) .

Tout d'abord, l'étude des localisations images directes, donne une propriété très utile des localisations du type $\tilde{\mathcal{L}}_U$, vis à vis des images directes (Lemme 5-8) et conduit à une propriété intéressante liant le spectre de A au spectre de l'anneau localisé $A' = A_{\mathcal{F}}$ de A pour une localisation du type $\tilde{\mathcal{L}}_U$ (Théorème 5-9).

Il est alors montré que la catégorie \mathcal{B}_U' des \mathcal{O}_U -Modules quasi-cohérents est équivalente à des sous-catégories locales de catégories de modules (Théorème 6-3 et Corollaire 6-4) et il en résulte l'existence d'un "foncteur \mathcal{O}_U -Module quasi-cohérent associé" (Corollaire 6-5).

Si $(X', \mathcal{O}'_{X'})$ est le schéma affine associé à l'anneau $A' = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ des sections au-dessus d'un *ouvert quasi-compact* U de X , si ρ est l'homomorphisme canonique de A dans A' déterminé par la restriction à l'ouvert U de X et si φ est l'application continue de X' dans X déterminée par l'homomorphisme ρ , alors l'ouvert $U' = \varphi^{-1}(U)$ de X' est *quasi-compact, partout dense* dans X' et l'homomorphisme canonique de restriction ρ' de $\Gamma(X', \mathcal{O}'_{X'})$ dans $\Gamma(U', \mathcal{O}'_{X'})$ est un *isomorphisme*. De plus si $(U', \mathcal{O}'_{U'})$ est le préschéma induit sur l'ouvert $U' = \varphi^{-1}(U)$ de X' par le schéma affine $(X', \mathcal{O}'_{X'})$, l'application continue φ

de X' dans X induit un *homéomorphisme* w de U' sur U , qui détermine un *isomorphisme de préschémas* W de (U', \mathcal{O}'_U) sur (U, \mathcal{O}_U) (Théorème 6-8).

Enfin, ces résultats conduisent à diverses caractérisations des *ouverts affines* des schémas affines (Théorème 7-1) et en particulier à une caractérisation cohomologique (Corollaire 7-4) qui généralise le Théorème (1-3-1) de [8].

Dans la suite, les principales références bibliographiques sont indiquées dans le texte, mais de façon générale, la terminologie et les notations relatives aux localisations sont celles de [3] et de [11] et la terminologie relative aux schémas affines et aux préschémas est celle de [7].

1 - PRELIMINAIRES TOPOLOGIQUES

Un espace topologique X est dit *quasi-compact* si, de tout recouvrement ouvert de X , il est possible d'extraire un recouvrement fini de X . Il revient au même de dire que toute famille filtrante décroissante d'ensembles fermés non vides a une intersection non vide. Une partie Y d'un espace topologique X est un ensemble quasi-compact si le sous-espace Y est quasi-compact.

Un espace topologique X est *irréductible* s'il est non vide et s'il n'est pas réunion de deux sous-espaces fermés distincts de X . Il revient au même de dire que $X \neq \emptyset$ et que l'intersection de deux ouverts non vides de X est non vide. Une partie Y d'un espace topologique X est irréductible si le sous-espace Y est irréductible. Pour qu'un sous-espace Y d'un espace topologique X soit irréductible, il faut et il suffit que son adhérence \overline{Y} soit irréductible. En particulier, tout sous-espace qui est l'adhérence $\{x\}$ d'un sous-espace réduit à un point est irréductible.

Dans un espace topologique X , la relation $y \in \{\overline{x}\}$ équivalente à $\{\overline{y}\} \subset \{\overline{x}\}$ se traduit en disant que y est une *spécialisation* de x ou que x est une *générisation* de y . Dans un espace topologique X , un *point générique* d'une partie fermée irréductible Y est un point x tel que $Y = \{\overline{x}\}$.

1-1. LEMME : Soit X un espace topologique quelconque.
Toute partie Y de X , qui admet un système fondamental de voisinages quasi-compacts, est un sous-espace quasi-compact.

Soit $\{W_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert du sous-espace Y de X . Pour tout $i \in I$, il existe au moins un ouvert U_i de X tel que $W_i = Y \cap U_i$. La partie $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ est un voisinage ouvert de Y dans X et par hypothèse, il existe un voisinage quasi-compact U' de Y tel que $U' \subset U$. En posant $U'_i = U' \cap U_i$ pour tout $i \in I$, ce qui entraîne $W_i = Y \cap U'_i$, la famille $\{U'_i\}_{i \in I}$ constitue un recouvrement ouvert du sous-espace quasi-compact U' . Puisque U' est quasi-compact, il existe une partie finie J de I telle que la famille $\{U'_j\}_{j \in J}$ constitue un recouvrement fini de U' . La relation :

$$\bigcup_{j \in J} W_j = \bigcup_{j \in J} Y \cap U'_j = Y \cap \left[\bigcup_{j \in J} U'_j \right] = Y \cap U' = Y$$

montre que la famille $\{W_j\}_{j \in J}$ constitue un recouvrement ouvert fini du sous-espace Y , extrait du recouvrement ouvert $\{W_i\}_{i \in I}$ de Y , ce qui prouve que le sous-espace Y est quasi-compact.

1-2. LEMME : Soit X un espace topologique vérifiant la condition :

(α) Tout point de X admet un système fondamental de voisinages ouverts quasi-compacts.

Alors, tout sous-espace quasi-compact Y de X , admet un système fondamental de voisinages ouverts quasi-compacts.

Soit W un voisinage de Y dans X . Pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage ouvert quasi-compact U_y de y dans X tel que $U_y \subset W$. En posant $U'_y = Y \cap U_y$ pour tout $y \in Y$, la famille $\{U'_y\}_{y \in Y}$ constitue un recouvrement ouvert du sous-espace Y . Puisque Y est quasi-compact, il existe une famille finie $\{y_j\}_{j \in J}$ de points de Y , telle que la famille $\{U'_{y_j}\}_{j \in J}$ constitue un recouvrement fini de Y . Il en résulte que la famille $\{U_{y_j}\}_{j \in J}$ constitue un recouvrement fini de Y par les ouverts quasi-compacts U_{y_j} dans X . La partie $U = \bigcup_{j \in J} U_{y_j}$ est alors un voisinage ouvert et quasi-compact de Y dans X , inclus dans W .

1-3. LEMME : Soit X un espace topologique vérifiant la condition :

(B) Dans l'espace X , l'application $x \rightarrow \{\bar{x}\}$ établit une correspondance biunivoque entre X et l'ensemble des parties fermées irréductibles de X .

Alors, si \mathcal{U} est un ensemble filtrant décroissant d'ouverts quasi-compacts, la partie

$Y = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$ est quasi compacte et \mathcal{U} constitue un système fondamental de voisinages de Y .

Soit F' un ensemble fermé dans X , tel que \mathcal{U} induise une base de filtre sur F' , c'est-à-dire tel que $U \cap F' \neq \emptyset$ pour tout $U \in \mathcal{U}$.

Soit S l'ensemble non vide des parties fermées F de F' , telles que \mathcal{U} induise une base de filtre sur F , c'est-à-dire telles que $U \cap F \neq \emptyset$ pour tout $U \in \mathcal{U}$.

Dans l'ensemble S ordonné par l'inclusion, soit S' une partie non vide et totalement ordonnée. Pour toute partie quasi-compacte $U \in \mathcal{U}$, l'ensemble non vide, totalement ordonné des parties fermées non vides $U \cap F$ de U , pour $F \in S'$, a une intersection non vide. Il en résulte que l'ensemble fermé $F'' = \bigcap_{F \in S'} F$, F vérifie $U \cap F'' \neq \emptyset$ pour tout $U \in \mathcal{U}$, ce qui prouve que F'' est un élément de S . L'ensemble S possède donc au moins un élément minimal F_0 .

Soient F_1 et F_2 deux parties fermées de X telles que $F_0 = F_1 \cup F_2$. Si $F_1 \notin S$ et si $F_2 \notin S$, il existe $U_1 \in \mathcal{U}$ tel que $U_1 \cap F_1 = \emptyset$ et $U_2 \in \mathcal{U}$ tel que $U_2 \cap F_2 = \emptyset$. En choisissant $U \in \mathcal{U}$ avec $U \subset U_1 \cap U_2$, il en résulte

$$U \cap F_0 = U \cap (F_1 \cup F_2) = (U \cap F_1) \cup (U \cap F_2) = \emptyset$$

ce qui est absurde. Ainsi F_1 ou F_2 appartient à S et puisque F_0 est minimal dans S , il en résulte $F_1 = F_0$ ou $F_2 = F_0$, ce qui montre que F_0 est un fermé irréductible.

La condition (β) entraîne qu'il existe un point x de X tel que $F_0 = \overline{\{x\}}$, ce qui entraîne en particulier $x \in F'$. Pour tout $U \in \mathcal{U}$, la relation $U \cap F_0 \neq \emptyset$ entraîne qu'il existe $y \in U$

avec $y \in \overline{\{x\}}$, ce qui implique $x \in U$ et par suite $x \in Y$.

Ainsi, tout ensemble fermé F' de X , tel que \mathcal{U} induise une base de filtre sur F' , vérifie $F' \cap Y \neq \emptyset$.

Pour tout voisinage ouvert U' de Y , l'ensemble fermé $F' = X - U'$ vérifie $F' \cap Y = \emptyset$ et par suite \mathcal{U} n'induit pas une base de filtre sur F' , ce qui prouve qu'il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $U \cap F' = \emptyset$ c'est-à-dire tel que $U \subset U'$.

Ainsi, \mathcal{U} constitue un système fondamental de voisinages de Y et le lemme 1-1 montre que Y est quasi-compact.

1-4. DEFINITION : Dans un espace topologique X , une partie Y est stable par généralisation si tout point x de X qui est une généralisation d'un point y de Y , est un élément de Y .

1-5. LEMME : Dans un espace topologique X , pour toute partie Y de X , l'intersection des voisinages de Y , notée \tilde{Y} et appelée le généralisé de Y , est la plus petite partie de X stable par généralisation et contenant Y .

En particulier pour que Y soit stable par généralisation, il faut et il suffit que $Y = \tilde{Y}$.

Une partie Z de X est stable par généralisation si pour tout $x \in X$, la relation $\overline{\{x\}} \cap Z \neq \emptyset$ implique $x \in Z$, c'est-à-dire si pour tout $x \in X$, la relation $x \notin Z$ implique $\overline{\{x\}} \cap Z = \emptyset$. Il est immédiat que cette dernière condition signifie que tout $x \in X$ qui n'appartient pas à Z , n'appartient pas à un voisinage ou-

vert U de Z . Il en résulte que pour qu'une partie Z de X soit stable par généralisation, il faut et il suffit que $Z = \tilde{Z}$.

Pour toute partie Y de X , les parties Y et \tilde{Y} admettent les mêmes voisinages, de sorte que \tilde{Y} est l'intersection de ses voisinages, ce qui prouve que \tilde{Y} est stable par généralisation. Enfin, pour toute partie Z stable par généralisation, la relation $Y \subset Z$ entraîne $\tilde{Y} \subset \tilde{Z} = Z$ ce qui montre que \tilde{Y} est la plus petite partie de X stable par généralisation et contenant Y .

- 1-6. PROPOSITION : Soit X un espace topologique vérifiant les conditions (a) et (b). Alors pour toute partie Y de X , il y a équivalence des conditions suivantes :
- (a). Le sous-espace Y est stable par généralisation et quasi-compact.
 - (b). La partie Y est stable par généralisation et admet un système fondamental de voisinages ouverts quasi-compacts.
 - (c). Il existe un ensemble \mathcal{U} filtrant décroissant d'ouverts quasi-compacts, tel que $Y = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$. De plus, un tel ensemble \mathcal{U} constitue alors un système fondamental de voisinages de Y .

Les lemmes 1-1 et 1-2 entraînent l'équivalence des conditions (a) et (b).

Si Y vérifie la condition (b), en choisissant pour \mathcal{U} un système fondamental de voisinages ouverts quasi-compacts de Y , le lemme 1-5 entraîne $Y = \tilde{Y} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$. Ainsi, la condi-

tion (b) entraîne la condition (c).

Si Y vérifie la condition (c), le lemme 1-3 montre que Y est quasi-compact et que \mathcal{U} constitue un système fondamental de voisinages de Y . Il en résulte en particulier $Y = \overline{\bigcup \mathcal{U}}$ et le lemme 1-5 montre alors que Y est stable par généralisation et quasi-compact. Ainsi, la condition (c) entraîne la condition (a), ce qui achève la démonstration.

1-7. COROLLAIRE : Soit X l'espace topologique sous-jacent à un schéma affine ou à un préschéma.

Alors, pour toute partie Y de X , il y a équivalence des conditions suivantes :

- (a). Le sous-espace Y est stable par généralisation et quasi-compact.
- (b). La partie Y est stable par généralisation et admet un système fondamental de voisinages ouverts quasi-compacts.
- (c). Il existe un ensemble \mathcal{U} filtrant décroissant d'ouverts quasi-compacts, tel que $Y = \overline{\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U}$.

De plus, un tel ensemble \mathcal{U} constitue alors un système fondamental de voisinages de Y .

D'après la proposition 1-6, il suffit de montrer que l'espace topologique X sous-jacent à un schéma affine ou à un préschéma vérifie les conditions (α) et (β) des lemmes 1-2 et 1-3.

La proposition (1-1-10) de [7] montre que tout ouvert affine est quasi-compact. La proposition (2-1-3) de [7], qui assure que les ouverts affines forment une base de la topologie de X , montre que tout point $x \in X$ admet un système fondamental de voisinages ouverts affines quasi-compacts, c'est-à-dire que X vérifie (α) .

Enfin, la proposition (2-1-5) de [7] montre que X vérifie (β) , ce qui achève la démonstration.

2 - LOCALISATIONS STABLES.

2-1 - Rappels. Etant donné un anneau commutatif A , soit $X = \text{Spec}(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de A , appelé aussi le spectre premier de A . Pour un $x \in X = \text{Spec}(A)$, il est souvent commode d'écrire \mathfrak{p}_x au lieu de x , ou même simplement $\mathfrak{p} \in X$.

Pour toute partie E de A , la partie $V(E)$ de X désigne l'ensemble des $x \in X$ tels que $E \subset \mathfrak{p}_x$.

Les ensembles de la forme $V(E)$, dans laquelle E parcourt l'ensemble des parties de A , sont les ensembles fermés d'une topologie sur X , appelée la topologie spectrale ou la topologie de Zariski; sauf mention expresse du contraire, l'ensemble $X = \text{Spec}(A)$ est toujours muni de la topologie spectrale.

Si $r(E)$ désigne la racine de l'idéal de A engendré par la partie E de A , la relation $V(E) = V(r(E))$ montre que lorsque \mathfrak{Q} parcourt l'ensemble des idéaux de A , les ensembles de la forme :

$$D(\mathfrak{a}) = X - V(\mathfrak{a}) = \{x; x \in X, \mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_x\} = \{\mathfrak{p}; \mathfrak{p} \in X, \mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}\}$$

constituent les *ensembles ouverts* de la topologie spectrale de X .

En posant :

$$D(f) = D(Af) = \{\mathfrak{p}; \mathfrak{p} \in X, f \notin \mathfrak{p}\}$$

pour $f \in A$, les ouverts de la forme $D(f)$ sont les *ouverts affines spéciaux* de X [2].

En particulier :

$$D(0) = \emptyset \quad \text{et} \quad D(1) = X.$$

De plus, pour toute famille $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ d'idéaux de A et pour tout couple $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ d'idéaux de A , les relations :

$$\bigcup_{i \in I} D(\mathfrak{a}_i) = D\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right)$$

et

$$D(\mathfrak{a}_1) \cap D(\mathfrak{a}_2) = D(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2) = D(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)$$

montrent que l'application surjective D de l'ensemble des idéaux de A dans l'ensemble des ouverts de X est compatible avec les bornes supérieures et avec les bornes inférieures finies.

Enfin, pour tout $\mathfrak{p} \in X$, les ouverts affines spéciaux $D(f)$ associés aux éléments $f \in A$, tels que $f \notin \mathfrak{p}$, constituent un système fondamental de voisinages ouverts et quasi-compacts de \mathfrak{p} dans X .

2-2. Notations. Etant donné un anneau commutatif A , soit $X = \text{Spec}(A)$ le spectre premier de A et soit $\mathcal{A} = \text{Mod } A$ la catégorie des A -modules.

Tout élément $\mathfrak{p} \in X$ détermine une localisation $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathfrak{p}}$ dans \mathcal{A} caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ défini par :

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{p}} = \{ I ; I \not\subset \mathfrak{p} \} .$$

Toute partie Y de X détermine une localisation $\tilde{\mathcal{L}}_Y$, définie par :

$$\tilde{\mathcal{L}}_Y = \bigwedge_{\mathfrak{p} \in Y} \tilde{\mathcal{L}}_{\mathfrak{p}}$$

c'est-à-dire caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent \mathcal{F}_Y défini par :

$$\mathcal{F}_Y = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathcal{F}_{\mathfrak{p}} .$$

Il en résulte naturellement :

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\{\mathfrak{p}\}} = \tilde{\mathcal{L}}_{\mathfrak{p}} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{\{\mathfrak{p}\}} = \mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$$

Inversement, toute localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ dans \mathcal{A} , caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent \mathcal{F} , détermine une partie $Y_{\tilde{\mathcal{L}}} = Y_{\mathcal{F}}$ de X , définie par :

$$Y_{\tilde{\mathcal{L}}} = Y_{\mathcal{F}} = \bigcap_{I \in \mathcal{F}} D(I) .$$

2-3. LEMME : Avec les notations précédentes, l'application $Y \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_Y$ de l'ensemble des parties de X , dans l'ensemble des localisations dans \mathcal{A} et l'application $\tilde{\mathcal{L}} \rightarrow Y_{\tilde{\mathcal{L}}}$ de l'ensemble des localisations dans \mathcal{A} , dans l'ensemble des parties de X , véri-

sont les propriétés suivantes :

- (a). Pour toute partie Y de X , l'ensemble topologisant et idempotent \mathfrak{F}_Y est l'image réciproque, par l'application D , de l'ensemble des voisinages ouverts de Y dans X . Autrement dit :

$$\mathfrak{F}_Y = \{I ; Y \subset D(I)\} .$$

- (a'). Pour toute localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ dans \mathcal{A} , caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent \mathfrak{F} , la partie $Y_{\tilde{\mathcal{L}}} = Y_{\mathfrak{F}}$ de X est constituée par les idéaux premiers de A qui n'appartiennent pas à \mathfrak{F} . Autrement dit :

$$Y_{\tilde{\mathcal{L}}} = Y_{\mathfrak{F}} = \{p ; p \notin \mathfrak{F}\} .$$

- (b). La relation $Y_1 \subset Y_2$ implique $\tilde{\mathcal{L}}_{Y_2} < \tilde{\mathcal{L}}_{Y_1}$ c'est-à-dire :

$$\mathfrak{F}_{Y_2} \subset \mathfrak{F}_{Y_1} .$$

- (b'). La relation $\tilde{\mathcal{L}}_1 < \tilde{\mathcal{L}}_2$ équivalente à la relation $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$, implique $Y_{\tilde{\mathcal{L}}_2} \subset Y_{\tilde{\mathcal{L}}_1}$, c'est-à-dire $Y_{\mathfrak{F}_2} \subset Y_{\mathfrak{F}_1}$.

- (c). Pour toute famille $\{Y_j\}_{j \in J}$ de parties de X , en posant $Y = \bigcup_{j \in J} Y_j$, alors :

$$\tilde{\mathcal{L}}_Y = \bigwedge_{j \in J} \tilde{\mathcal{L}}_{Y_j} ,$$

$$\text{c'est-à-dire } \mathfrak{F}_Y = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_{Y_j}$$

(c'). Pour toute famille $\{\tilde{\mathcal{L}}_j\}_{j \in J}$ de localisations dans \mathcal{A} , en posant : $\tilde{\mathcal{L}} = \bigwedge_{j \in J} \tilde{\mathcal{L}}_j$ c'est-à-dire : $\mathcal{F} = \bigcap_{j \in J} \mathcal{F}_j$, alors : $Y_{\tilde{\mathcal{L}}} = \bigcup_{j \in J} Y_{\tilde{\mathcal{L}}_j}$, c'est-à-dire : $Y_{\mathcal{F}} = \bigcup_{j \in \mathcal{F}} Y_{\mathcal{F}_j}$.

(d). Pour toute partie Y de X , si \tilde{Y} est le généralisé de Y , c'est-à-dire la plus petite partie de X stable par généralisation et contenant Y , alors :

$$\tilde{\mathcal{L}}_Y = \tilde{\mathcal{L}}_{\tilde{Y}},$$

c'est-à-dire : $\mathcal{F}_Y = \mathcal{F}_{\tilde{Y}}$.

(d'). Pour toute localisation \mathcal{L} dans \mathcal{A} ; caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent \mathcal{F} , la partie $Y_{\tilde{\mathcal{L}}} = Y_{\mathcal{F}}$ est stable par généralisation, c'est-à-dire vérifie :

$$Y_{\tilde{\mathcal{L}}} = \tilde{Y}_{\tilde{\mathcal{L}}} \quad \text{et} \quad Y_{\mathcal{F}} = \tilde{Y}_{\mathcal{F}}.$$

La définition de $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathfrak{p}}$ montre que la condition $I \in \mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ équivaut à $\mathfrak{p} \in D(I)$, ce qui entraîne la partie (a).

La condition $\mathfrak{p} \in Y_{\tilde{\mathcal{L}}} = Y_{\mathcal{F}}$ se traduit alors par la condition $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$, qui est équivalente à $\mathfrak{p} \notin \mathcal{F}$, ce qui entraîne la partie (a').

Les parties (b), (b') et (c) sont immédiates.

Avec les notations de la partie (c'), il est évident que la partie $\bigcup_{j \in J} Y_{\mathcal{F}_j}$ est contenue dans $Y_{\mathcal{F}}$ et si $\mathfrak{p} \in Y_{\mathcal{F}}$, alors $\mathfrak{p} \notin \mathcal{F}$ et par suite il existe un indice $j \in J$ tel que $\mathfrak{p} \notin \mathcal{F}_j$,

c'est-à-dire tel que $\mathfrak{p} \in Y_{\mathfrak{F}_j}$, ce qui entraîne la partie (c').

Pour toute partie Y de X , la partie \tilde{Y} est l'intersection des voisinages ouverts de Y dans X , d'après le lemme 1-5. Il en résulte que Y et \tilde{Y} ont les mêmes voisinages ouverts et la partie (a) entraîne la partie (d).

La définition de $Y_{\mathfrak{F}} = Y_{\mathfrak{F}}$ montre que cette partie de X est une intersection de parties ouvertes de X et par suite elle est égale à l'intersection de ses voisinages dans X . Le lemme 1-5 montre alors qu'elle est stable par généralisation, ce qui entraîne la partie (d').

2-4. DEFINITION : Avec les notations précédentes, étant donnée une localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ dans \mathcal{A} caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent \mathfrak{F} , soit $\tilde{\mathfrak{F}}$ l'ensemble topologisant et idempotent défini par :

$$\tilde{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}_Z \text{ avec } Z = Y_{\mathfrak{F}}.$$

La localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ de \mathcal{A} est dite stable si l'ensemble topologisant et idempotent \mathfrak{F} est stable, c'est-à-dire vérifie :

$$\mathfrak{F} = \tilde{\mathfrak{F}}.$$

2-5. PROPOSITION : Pour toute localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ dans \mathcal{A} , caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent \mathfrak{F} , il y a équivalence des conditions suivantes :
 (a). La localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ est stable, c'est-à-dire vérifie : $\mathfrak{F} = \tilde{\mathfrak{F}}$.

(b). L'ensemble \mathcal{F} vérifie :

$$\mathcal{F} = \overline{\bigcup_{\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_p} \mathcal{F}_p} .$$

(c). Pour tout $I \notin \mathcal{F}$, il existe un idéal premier \mathfrak{p} de A tel que $I \subset \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p} \notin \mathcal{F}$.

(d). L'ensemble \mathcal{F} vérifie les deux conditions suivantes :

(α). Les ouverts dans X de la forme $D(I)$ avec $I \in \mathcal{F}$ constituent un système fondamental de voisinages de la partie :

$$Y_{\mathcal{F}} = \overline{\bigcup_{I \in \mathcal{F}} D(I)}$$

(β). L'ensemble \mathcal{F} est saturé pour la relation d'équivalence associée à l'application D . Autrement dit $I \in \mathcal{F}$ et $D(I) = D(I')$ entraînent $I' \in \mathcal{F}$.

Il est d'abord évident que \mathcal{F} vérifie toujours :

$$\mathcal{F} \subset \widetilde{\mathcal{F}} = \overline{\bigcup_{\mathfrak{p} \in Y_{\mathcal{F}}} \mathcal{F}_p}$$

En remarquant que $\mathfrak{p} \in Y_{\mathcal{F}}$ équivaut à $\mathfrak{p} \notin \mathcal{F}$ ou à $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_p$ et que $I \notin \mathcal{F}_p$ équivaut à $I \subset \mathfrak{p}$, l'équivalence des conditions (a), (b) et (c) est immédiate.

La partie (a) du lemme 2-3 entraîne la relation :

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \{I', Y_{\mathcal{F}} \subset D(I')\}$$

qui montre immédiatement que la condition (a) implique les parties (α) et (β) de la condition (d).

Réciproquement, lorsque la condition (d) est vérifiée, pour tout $I' \in \widehat{\mathcal{F}}$, vérifiant donc : $Y_{\mathcal{F}} \subset D(I')$, la condition (α) entraîne qu'il existe $I \in \mathcal{F}$ tel que $Y_{\mathcal{F}} \subset D(I) \subset D(I')$. Il en résulte $D(I) = D(I \cap I')$, avec $I \cap I' \subset I'$, et la condition (β) implique $(I \cap I') \in \mathcal{F}$, ce qui entraîne $I' \in \mathcal{F}$. Ainsi, $\widehat{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$ et d'après la remarque initiale, il en résulte : $\mathcal{F} = \widehat{\mathcal{F}}$, ce qui montre que la condition (d) implique la condition (a).

2-6. LEMME : Pour tout ouvert U de X , la localisation $\tilde{\mathcal{F}}_U$ dans \mathcal{A} caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent \mathcal{F}_U , vérifie les propriétés suivantes :
 (a). Pour tout idéal \mathcal{A} de A , tel que $U = D(\mathcal{A})$, l'ensemble \mathcal{F}_U est constitué par les idéaux I de A , dont la racine $r(I)$ contient \mathcal{A} .
 Autrement dit :

$$\mathcal{F}_U = \{I ; \mathcal{A} \subset r(I)\}$$

(b). Si l'ouvert U de X est quasi-compact, tout idéal \mathcal{A}' de A tel que $U = D(\mathcal{A}')$, contient un idéal de type fini \mathcal{A} , tel que $U = D(\mathcal{A})$ et l'ensemble \mathcal{F}_U est constitué par les idéaux I de A qui contiennent une puissance de \mathcal{A} . Autrement dit, l'ensemble \mathcal{F}_U admet pour ensemble cofinal, l'ensemble :

$$\{\mathcal{A}^n ; n \in \mathbb{N}\}$$

(c). Si l'ouvert U de X est quasi-compact et si \mathcal{Q} est un idéal de type fini de A , tel que $U = D(\mathcal{Q})$ toute localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ dans \mathcal{A} , caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent \mathcal{F} , vérifiant $\mathcal{Q} \in \mathcal{F}$ est plus fine que $\tilde{\mathcal{L}}_U$. En particulier, $\tilde{\mathcal{L}}_U$ est la moins fine de ces localisations.

La partie (a) du lemme 2-3 entraîne :

$$\mathcal{F}_U = \{I ; D(\mathcal{Q}) \subset D(I)\}$$

La condition $I \in \mathcal{F}_U$ se traduit donc par la condition : $\mathfrak{p} \notin D(I)$ implique $\mathfrak{p} \notin D(\mathcal{Q})$, c'est-à-dire par la condition : $I \subset \mathfrak{p}$ implique $\mathcal{Q} \subset \mathfrak{p}$. Puisque $r(I)$ est l'intersection des idéaux premiers \mathfrak{p} de A qui contiennent I , la partie (a) en résulte immédiatement.

La famille d'ouverts $\{D(f)\}_{f \in \mathcal{Q}'}$ constitue un recouvrement de l'ouvert quasi-compact $U = D(\mathcal{Q}')$. Il existe donc une famille finie $\{f_j\}_{j \in J}$ d'éléments de \mathcal{Q}' telle que la famille $\{D(f_j)\}_{j \in J}$ constitue un recouvrement fini de $U = D(\mathcal{Q}')$. La relation $U = D(\mathcal{Q}') = \bigcup_{j \in J} D(f_j) = D(\sum_j Af_j)$ montre que l'idéal de type fini $\mathcal{Q} = \sum_{j \in J} Af_j$ vérifie $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}'$ et $U = D(\mathcal{Q}') = D(\mathcal{Q})$. Puisque le produit de deux idéaux appartenant à un ensemble topologisant et idempotent est encore un élément de cet ensemble, les puissances de \mathcal{Q} appartiennent à \mathcal{F}_U puisque $\mathcal{Q} \in \mathcal{F}_U$. Pour démontrer la partie (b), tout revient à montrer que pour tout $I \in \mathcal{F}_U$, il existe un entier n

tel que $\mathcal{Q}^n \subset I$. Puisque $\mathcal{Q} \subset r(I)$ et que $r(I)$ est l'ensemble des éléments $a \in A$ dont une puissance appartient à I , pour tout $j \in J$, il existe un entier n_j tel que $f_j^{n_j} \in I$. En particulier un entier n' majorant les n_j pour $j \in J$, vérifie $f_j^{n'} \in I$ pour tout $j \in J$. Si p est le nombre d'éléments de J soit $n = n'p$. Tout élément $\alpha \in \mathcal{Q}$ s'écrit sous la forme : $\alpha = \sum_{j \in J} \alpha_j f_j$ et α^n se développe sous la forme d'une somme de termes qui sont des "monômes" par rapport aux p éléments f_j , de "degré total" égal à $n = n'p$, ce qui entraîne que l'un au moins des f_j figure avec un exposant supérieur ou égal à n' . Ainsi chacun de ces termes appartient à I et par suite $\alpha^n \in I$. Il en résulte alors $\mathcal{Q}^n \subset I$, ce qui achève la démonstration de la partie (b).

La condition $\mathcal{Q} \in \mathcal{F}$ entraîne $\mathcal{Q}^n \in \mathcal{F}$ pour tout entier n et la partie (b) entraîne alors $\mathcal{F}_U \subset \mathcal{F}$, ce qui démontre la partie (c) puisque $\mathcal{Q} \in \mathcal{F}_U$.

2-7. COROLLAIRE : Dans \mathcal{A} , toute localisation de type fini $\tilde{\mathcal{L}}$ [et en particulier toute localisation plate] est stable.

Si $\tilde{\mathcal{L}}$ est caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent \mathcal{F} , tout idéal I n'appartenant pas à \mathcal{F} est contenu dans un idéal maximal pour cette propriété et un tel idéal est premier.

La localisation \mathcal{L} est de type fini si l'ensemble \mathcal{F} admet un système cofinal d'idéaux de type fini et toute localisation plate est de type fini [11].

Pour tout idéal \mathfrak{Q} de type fini, admettant une famille finie $\{f_j\}_{j \in J}$ de générateurs, la relation $D(\mathfrak{Q}) = \bigcup_{j \in J} D(f_j)$ montre que l'ouvert $U = D(\mathfrak{Q})$ qui admet un recouvrement fini par des ouverts affines spéciaux qui sont quasi-compacts est quasi-compact. En résumé, ce qui précède et la partie (b) du lemme 2-6 montrent que pour qu'un ouvert U de X soit quasi-compact, il faut et il suffit qu'il existe un idéal de type fini \mathfrak{Q} tel que $U = D(\mathfrak{Q})$. De plus, pour tout idéal \mathfrak{Q}' tel que $U = D(\mathfrak{Q}')$, il est toujours possible de choisir \mathfrak{Q} de sorte que $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{Q}'$.

Pour tout $I \in \mathcal{F}$, il existe un idéal de type fini $\mathfrak{Q}' \in \mathcal{F}$ tel que $\mathfrak{Q}' \subset I$, ce qui entraîne $U = D(\mathfrak{Q}') \subset D(I)$. Pour tout idéal I' de A tel que $D(I) = D(I')$, il en résulte la relation : $U = D(\mathfrak{Q}') = D(\mathfrak{Q}' \cap I')$. Puisque l'ouvert U de X est quasi-compact, la partie (b) du lemme 2-6 montre qu'il existe un idéal \mathfrak{Q} de type fini tel que $U = D(\mathfrak{Q})$ et $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{Q}' \cap I' \subset I'$. D'après la partie (c) du lemme 2-6, la relation $U = D(\mathfrak{Q}') = D(\mathfrak{Q})$ dans laquelle $\mathfrak{Q}' \in \mathcal{F}$ entraîne $\mathcal{F}_U \subset \mathcal{F}$ et comme $\mathfrak{Q} \in \mathcal{F}_U$, il en résulte $\mathfrak{Q} \in \mathcal{F}$. La relation $\mathfrak{Q} \subset I'$ entraîne alors $I' \in \mathcal{F}$, ce qui montre que la localisation \mathcal{L} vérifie la condition (β) de la condition (d) de la proposition 2-5.

D'autre part, pour tout $I \in \mathcal{F}$, il existe un idéal de type fini $\mathfrak{Q} \in \mathcal{F}$, tel que $\mathfrak{Q} \subset I$, ce qui entraîne : $Y_{\mathcal{F}} \subset D(\mathfrak{Q}) \subset D(I)$. Il en résulte que l'ensemble \mathcal{U} des ouverts quasi-compacts $D(\mathfrak{Q})$ associés aux idéaux de type fini $\mathfrak{Q} \in \mathcal{F}$ est un ensemble filtrant décroissant d'ouverts quasi-compacts tels que $Y_{\mathcal{F}} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$. Le corollaire 1-7 entraîne que \mathcal{U} est un système fondamental de

voisinages de $Y_{\mathcal{F}}$, ce qui montre en particulier que l'ensemble \mathcal{F} vérifie la condition (α) de la condition (d) de la proposition 2-5.

Cette proposition 2-5 entraîne alors que la localisation de type fini $\tilde{\mathcal{L}}$ est stable, ce qui achève la démonstration de la première partie du corollaire 2-7.

Il convient de remarquer au passage que le corollaire 1-7 entraîne également que $Y_{\mathcal{F}}$ est une partie de X stable par généralisation et quasi-compacte.

Lorsque la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ est de type fini, il est immédiat que l'ensemble des idéaux de A n'appartenant pas à \mathcal{F} est inductif. Il en résulte que tout $I \notin \mathcal{F}$ est contenu dans un idéal $I' \notin \mathcal{F}$ et maximal pour cette propriété. Puisque la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ est stable, la condition (c) de la proposition 2-5, appliquée à I' montre que l'idéal I' est premier.

Il convient de remarquer qu'il est possible d'obtenir une démonstration directe de ce résultat, de sorte que la proposition 2-5 fournit alors une nouvelle démonstration de la première partie du corollaire 2-7.

2-8. PROPOSITION : Avec les notations précédentes, l'application $Y \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_Y$ et l'application $\tilde{\mathcal{L}} \rightarrow Y_{\tilde{\mathcal{L}}}$, caractérisent des correspondances bijectives réciproques entre l'ensemble des parties de X , stables par généralisation et l'ensemble des localisations stables dans \mathcal{A} .

Ces correspondances possèdent les propriétés suivantes :

(a). Pour deux parties Y_1 et Y_2 , stables par géné-

risation, la relation $Y_1 \subset Y_2$ implique : $\tilde{\mathcal{L}}_{Y_2} < \tilde{\mathcal{L}}_{Y_1}$,
 c'est-à-dire : $\mathcal{F}_{Y_2} \subset \mathcal{F}_{Y_1}$,

(b). Pour toute famille $\{Y_j\}_{j \in J}$ de parties stables
 par générisation, la partie : $Y = \bigcup_{j \in J} Y_j$ est stable
 par générisation et vérifie :

$$\tilde{\mathcal{L}}_Y = \bigwedge_{j \in J} \tilde{\mathcal{L}}_{Y_j},$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{F}_Y = \bigcap_{j \in J} \mathcal{F}_{Y_j}.$$

Soit φ l'application caractérisée par $\varphi(Y) = \tilde{\mathcal{L}}_Y$ pour toute
 partie Y de X et soit s l'application caractérisée par
 $s(\tilde{\mathcal{L}}) = Y_{\tilde{\mathcal{L}}}$ pour toute localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ dans \mathcal{A} .

La partie (a) du lemme 2-3 montre que $s \circ \varphi(Y)$ est l'inter-
 section des voisinages ouverts de Y et le lemme 1-5 montre que :

$$\tilde{Y} = s \circ \varphi(Y).$$

Alors, la partie (d) du lemme 2-3 entraîne la relation :

$$(1) \quad \varphi = \varphi \circ s \circ \varphi$$

et la partie (d') du lemme 2-3 entraîne la relation :

$$(2) \quad s = s \circ \varphi \circ s.$$

Les parties Y de X , stables par générisation sont carac-
 térisées par :

$$(3) \quad Y = s \circ \varphi(Y)$$

et les localisations stables $\tilde{\mathcal{L}}$ dans \mathcal{A} , sont caractérisées par :

$$(4) \quad \tilde{\mathcal{L}} = \varphi \circ s(\tilde{\mathcal{L}}).$$

Pour toute partie Y de X , la relation (1) montre donc que
 la localisation $\varphi(Y)$ dans \mathcal{A} , est stable et pour toute locali-
 sation $\tilde{\mathcal{L}}$ dans \mathcal{A} , la relation (2) montre donc que la partie

$s(\tilde{\mathcal{L}})$ de X , est stable par généralisation.

Les relations (3) et (4) montrent enfin que \wp et s caractérisent des correspondances bijectives réciproques entre l'ensemble des parties de X , stables par généralisation et l'ensemble des localisations stables dans \mathcal{A} .

Le lemme 1-5 montre que la réunion d'une famille de parties stables par généralisation est stable par généralisation et les propriétés (a) et (b) résultent alors du lemme 2-3.

2-9. PROPOSITION : Avec les notations précédentes, l'application $Y \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_Y$ et l'application $\tilde{\mathcal{L}} \rightarrow Y_{\tilde{\mathcal{L}}}$, caractérisent des correspondances bijectives réciproques entre l'ensemble des parties de X , stables par généralisation et quasi-compactes et l'ensemble des localisations de type fini dans \mathcal{A} .

Ces correspondances possèdent les propriétés suivantes :

(a). Pour deux parties Y_1 et Y_2 stables par généralisation et quasi-compactes, la relation $Y_1 \subset Y_2$ implique : $\tilde{\mathcal{L}}_{Y_2} \subset \tilde{\mathcal{L}}_{Y_1}$, c'est-à-dire : $\mathcal{F}_{Y_2} \subset \mathcal{F}_{Y_1}$.

(b). Pour toute famille finie $\{Y_j\}_{j \in J}$ de parties stables par généralisation et quasi-compactes, la partie $Y = \bigsqcup_{j \in J} Y_j$ est stable par généralisation et quasi-compacte, et vérifie :

$$\tilde{\mathcal{L}}_Y = \bigwedge_{j \in J} \tilde{\mathcal{L}}_{Y_j}, \text{ c'est-à-dire } \mathcal{F}_Y = \bigcap_{j \in J} \mathcal{F}_{Y_j}$$

(c). Pour deux parties Y_1 et Y_2 stables par générali-

sation et quasi-compactes, la partie $Y = Y_1 \cap Y_2$ est stable par g n rization et quasi-compacte, et vérifie : $\tilde{\mathcal{L}}_Y = \tilde{\mathcal{L}}_{Y_1} \vee \tilde{\mathcal{L}}_{Y_2}$, c'est-à-dire : $\mathcal{F}_Y = \mathcal{F}_{Y_1} \vee \mathcal{F}_{Y_2}$.

(d). Pour tout ensemble \mathcal{U} filtrant décroissant d'ouverts quasi-compactes, la partie $Y = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$ est stable par g n rization et quasi-compacte, et vérifie : $\tilde{\mathcal{L}}_Y = \bigvee_{U \in \mathcal{U}} \tilde{\mathcal{L}}_U$, avec $\mathcal{F}_Y = \bigvee_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{F}_U = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{F}_U$.

Avec les données et les notations de la partie (d), le corollaire 1-7 monte que Y est stable par g n rization et quasi-compacte, et que de plus \mathcal{U} constitue un système fondamental de voisinages ouverts et quasi-compactes de Y .

La partie (a) du lemme 2-3 donne la relation :

$$\mathcal{F}_Y = \{I ; Y \subset D(I)\}$$

et il en résulte que pour tout $I \in \mathcal{F}_Y$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que : $Y \subset U \subset D(I)$. D'après la partie (b) du lemme 2-6, il existe un idéal \mathcal{A}' de type fini tel que $U = D(\mathcal{A}')$, ce qui entraîne $U = D(\mathcal{A}') \cap D(I) = D(\mathcal{A}' \cap I)$, et il existe également un idéal \mathcal{A} de type fini tel que $U = D(\mathcal{A})$ avec $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}' \cap I \subset I$. Cette relation entraîne donc $I \in \mathcal{F}_U$ et par suite :

$$\mathcal{F}_Y \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{F}_U .$$

Pour tout $U \in \mathcal{U}$, la relation $Y \subset U$ implique $\mathcal{F}_U \subset \mathcal{F}_Y$ et il en résulte alors la relation :

$$\mathcal{F}_Y = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{F}_U .$$

Comme tout ensemble topologisant et idempotent \mathcal{F} vérifiant

$\mathcal{F}_U \subset \mathcal{F}$ pour tout $U \in \mathcal{U}$, vérifie naturellement $\mathcal{F}_Y \subset \mathcal{F}$, il en résulte la relation :

$$\mathcal{F}_Y = \bigvee_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{F}_U$$

ce qui achève la démonstration de la partie (d).

De plus, la partie (b) du lemme 2-6 montre que les localisations $\tilde{\mathcal{L}}_U$ sont de type fini et la caractérisation de \mathcal{F}_Y entraîne que la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_Y$ est de type fini.

Cette remarque entraîne que pour toute partie Y de X , stable par générisation et quasi-compacte, la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_Y = \mathcal{F}(Y)$ est de type fini. En effet, pour une telle partie, le corollaire 1-7 montre qu'il existe un ensemble \mathcal{U} filtrant décroissant d'ouverts quasi-compacts, tel que $Y = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$.

Aussi, avec les notations précédentes, pour toute partie Y de X , stable par générisation et quasi-compacte, la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_Y = \mathcal{F}(Y)$ est de type fini.

Inversement, d'après le corollaire 2-7, toute localisation de type fini $\tilde{\mathcal{L}}$ dans \mathcal{A} est stable et au cours de la démonstration de ce corollaire 2-7, il a été montré que la partie $Y_{\tilde{\mathcal{L}}} = s(\tilde{\mathcal{L}})$ de X est stable par générisation et quasi-compacte.

La proposition 2-8 entraîne alors la première partie de la proposition 2-9, ainsi que les propriétés (a) et (b).

Avec les données et les notations de la partie (c), si \mathcal{U}_1 et \mathcal{U}_2 sont les ensembles constitués par les voisinages ouverts et quasi-compacts de Y_1 et de Y_2 , le corollaire 1-7 entraîne :

$$Y_1 = \bigcap_{U_1 \in \mathcal{U}_1} U_1 \quad \text{et} \quad Y_2 = \bigcap_{U_2 \in \mathcal{U}_2} U_2$$

Si \mathcal{U} est l'ensemble filtrant décroissant des ouverts quasi-compacts de la forme $U = U_1 \cap U_2$, avec $U_1 \in \mathcal{U}_1$ et $U_2 \in \mathcal{U}_2$, il en résulte la relation :

$$Y = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$$

et la partie (d) entraîne alors :

$$\mathcal{F}_Y = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{F}_U$$

ainsi que :

$$\mathcal{F}_{Y_1} = \bigcup_{U_1 \in \mathcal{U}_1} \mathcal{F}_{U_1} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{Y_2} = \bigcup_{U_2 \in \mathcal{U}_2} \mathcal{F}_{U_2} .$$

Pour tout $I \in \mathcal{F}_Y$, il existe donc $U \in \mathcal{U}$ tel que $I \in \mathcal{F}_U$. Puisque $U = U_1 \cap U_2$ avec $U_1 \in \mathcal{U}_1$ et $U_2 \in \mathcal{U}_2$, il existe des idéaux de type fini \mathfrak{a}_1 et \mathfrak{a}_2 tels que $U_1 = D(\mathfrak{a}_1)$ et $U_2 = D(\mathfrak{a}_2)$, ce qui entraîne en particulier $\mathfrak{a}_1 \in \mathcal{F}_{U_1} \subset \mathcal{F}_{Y_1}$ et $\mathfrak{a}_2 \in \mathcal{F}_{U_2} \subset \mathcal{F}_{Y_2}$. L'idéal de type fini $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2$ vérifie $U = U_1 \cap U_2 = D(\mathfrak{a}_1) \cap D(\mathfrak{a}_2) = D(\mathfrak{a})$. D'après la partie (b) du lemme 2-6, les relations $I \in \mathcal{F}_U$ et $U = D(\mathfrak{a})$ entraînent l'existence d'un entier n tel que $\mathfrak{a}^n \subset I$.

Si \mathcal{F} est un ensemble topologisant et idempotent vérifiant $\mathcal{F}_{Y_1} \subset \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_{Y_2} \subset \mathcal{F}$, les considérations précédentes impliquent $\mathfrak{a}_1 \in \mathcal{F}$ et $\mathfrak{a}_2 \in \mathcal{F}$, ce qui entraîne $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \in \mathcal{F}$ et par suite $\mathfrak{a}^n \in \mathcal{F}$. Puisque $\mathfrak{a}^n \subset I$, il en résulte $I \in \mathcal{F}$, ce

qui démontre la relation : $\mathcal{F}_Y \subset \mathcal{F}$.

Comme d'autre part les relations $Y \subset Y_1$ et $Y \subset Y_2$ impliquent $\mathcal{F}_{Y_1} \subset \mathcal{F}_Y$ et $\mathcal{F}_{Y_2} \subset \mathcal{F}_Y$, il en résulte la relation :

$$\mathcal{F}_Y = \mathcal{F}_{Y_1} \vee \mathcal{F}_{Y_2}$$

ce qui achève la démonstration.

Remarques.

- (a) La proposition 2-9 exprime en particulier que le treillis des parties de X , stables par généralisation et quasi-compactes, ordonné par l'inverse de l'inclusion est isomorphe au treillis des localisations de type fini dans \mathcal{A} .
- (b) Toute localisation stable $\tilde{\mathcal{L}}$ dans \mathcal{A} est une borne inférieure de localisations plates (donc de type fini) et réciproquement les propositions 2-8 et 2-9 montrent que toute borne inférieure de localisations de type fini (ou de localisations plates) est une localisation stable dans \mathcal{A} . Les localisations stables dans \mathcal{A} sont donc assez voisines des localisations de type fini et des localisations plates.

3 - LE FONCTEUR PREFAISCEAU.

3-1 - Notations. Etant donné un anneau commutatif A , soit $X = \text{Spec}(A)$ le spectre premier de A et soit $\mathcal{A} = \text{Mod } A$

la catégorie des A -modules.

Tout ouvert U de l'espace topologique X détermine une localisation $\tilde{\mathcal{L}}_U$ dans \mathcal{A} , caractérisée par l'une des données suivantes :

(a) Un ensemble topologisant et idempotent \mathcal{F}_U d'idéaux de A déterminé par :

$$\mathcal{F}_U = \{I ; U \subset D(I)\} .$$

(b) Une sous-catégorie localisante \mathcal{C}_U de \mathcal{A} .

(c) Une mono-sous-catégorie \mathcal{H}_U de \mathcal{A} .

(d) Une sous-catégorie locale \mathcal{L}_U de \mathcal{A} .

(e) Un système localisant (L_U, ψ^U) dans \mathcal{A} .

Dans un tel système localisant, le foncteur localisation L_U peut être choisi de façon canonique et caractérisé par la condition suivante: pour tout objet M de \mathcal{A} :

$$L_U M = \varinjlim_{I \in \mathcal{F}_U} \text{Hom}(I, M/\mathcal{F}_U M) .$$

Sauf mention expresse du contraire, dans la suite, L_U désigne ce foncteur localisation canonique [11].

3-2. LEMME : Avec les données et les notations précédentes, pour tout couple d'ouverts U et U' de X , vérifiant $U \supset U'$, la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_{U'}$ est plus fine que la

localisation $\tilde{\mathcal{L}}_U$ et il existe un morphisme fonctoriel canonique :

$$\psi^{U',U} : L_U \rightarrow L_{U'}$$

possédant les propriétés suivantes :

(a) Pour tout ouvert U de X , le morphisme fonctoriel $\psi^{U,U}$ est le morphisme fonctoriel identique du foncteur L_U

(b) Pour trois ouverts U, U' et U'' de X , vérifiant $U \supset U' \supset U''$, alors

$$\psi^{U'',U} = \psi^{U'',U'} \circ \psi^{U',U}$$

Le lemme 2-3 montre que la relation $U \supset U'$ entraîne $\tilde{\mathcal{L}}_U < \tilde{\mathcal{L}}_{U'}$, c'est-à-dire $\mathcal{F}_U \subset \mathcal{F}_{U'}$.

Pour tout objet M de \mathcal{A} , la relation $\mathcal{F}_U^M \subset \mathcal{F}_{U'}^M$ permet de considérer le morphisme canonique $\mu^{U',U}_M$ de M/\mathcal{F}_U^M sur $M/\mathcal{F}_{U'}^M$.

Pour tout ouvert U de X , soit L'_U le foncteur caractérisé par la condition suivante : pour tout objet M de \mathcal{A} :

$$L'_U M = \varinjlim_{I \in \mathcal{F}_U} \text{Hom}(I, M) .$$

Si deux ouverts U et U' de X vérifient $U \supset U'$, ce qui

entraîne $\mathcal{F}_U \subset \mathcal{F}_{U'}$, la caractérisation de $L_U^!$ et de $L_{U'}^!$, montre qu'il existe un morphisme fonctoriel canonique, défini de façon évidente :

$$\psi_{M'}^{U',U} : L_U^! M \rightarrow L_{U'}^! M.$$

Pour tout objet M de \mathcal{A} , en posant $N = M/\mathcal{F}_U M$ et $N' = M/\mathcal{F}_{U'} M$, les relations :

$$L_U^! M = L_U^! N \quad \text{et} \quad L_{U'}^! M = L_{U'}^! N'$$

montrent que la relation :

$$\psi_{M'}^{U',U} = \psi_{N'}^{U',U} \circ L_U^! (\mu_M^{U',U})$$

caractérise un morphisme de $L_U^! M$ dans $L_{U'}^! M$, qui provient d'un morphisme fonctoriel :

$$\psi^{U',U} : L_U \rightarrow L_{U'}$$

Les propriétés (a) et (b) sont alors immédiates.

3-3. LEMME : Avec les données et les notations précédentes, si $\text{Ouv}(X)$ est l'ensemble des ouverts de X ordonné par l'inverse de l'inclusion, il existe un foncteur P de la catégorie produit $\text{Ouv}(X) \times \mathcal{A}$ dans la catégorie \mathcal{A} caractérisé par les conditions suivantes :

(a) Pour tout objet (U, M) de $\text{Ouv}(X) \times \mathcal{A}$, l'objet $P(U, M)$ de \mathcal{A} est défini par :

$$P(U, M) = L_U M .$$

(b) Pour tout morphisme (λ, g) dans $\text{Ouv}(X) \times \mathcal{A}$ défini par un morphisme $\lambda : U \rightarrow U'$ dans $\text{Ouv}(X)$ (lorsque $U \supset U'$) et par un morphisme $g : M \rightarrow M'$ dans \mathcal{A} , le morphisme $P(\lambda, g)$ de $P(U, M)$ dans $P(U', M')$ est défini par :

$$P(\lambda, g) = L_{U'}(g) \circ \psi_M^{U', U} = \psi_M^{U'U} \circ L_U(g) .$$

C'est une conséquence immédiate du lemme 3-2.

3-4. DEFINITION : Etant donné un anneau commutatif A , si $X = \text{Spec}(A)$ est le spectre premier de A et si $\mathcal{A} = \text{Mod } A$ est la catégorie des A -modules, le foncteur préfaisceau P , déterminé par A , est le bifoncteur :

$$P(\cdot, \cdot) : \text{Ouv}(X) \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

caractérisé par le lemme 3-3.

En particulier, pour tout objet M de \mathcal{A} , le foncteur :

$$P(\cdot, M) : \text{Ouv}(X) \rightarrow \mathcal{A}$$

est le préfaisceau associé à M , noté également $P(M)$, et pour tout ouvert U de X , le foncteur :

$$P(U, \cdot) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

est le foncteur localisation canonique L_U de la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_U$ dans \mathcal{A} , associée à U .

3-5. Rappels et notations - Etant donné un espace topologique Y quelconque et une catégorie \mathcal{B} , la catégorie des préfaisceaux sur Y à valeurs dans \mathcal{B} est la catégorie des foncteurs F de la catégorie $\text{Ouv}(Y)$ des ouverts de Y ordonnés par l'inverse de l'inclusion, dans la catégorie \mathcal{B} .

Etant donné un ouvert U de Y et un recouvrement ouvert \mathcal{U} de U , le recouvrement ouvert saturé $\bar{\mathcal{U}}$ associé à \mathcal{U} est constitué par les ouverts de Y contenus dans au moins un élément de \mathcal{U} .

Avec ces notations, pour tout préfaisceau F sur Y à valeurs dans \mathcal{B} , soit $F(\mathcal{U})$ la restriction de F à la sous-catégorie $\bar{\mathcal{U}}$ de $\text{Ouv}(Y)$.

Le préfaisceau F est un faisceau si pour tout ouvert U de Y et pour tout recouvrement ouvert \mathcal{U} de U , l'objet $F(U)$ et le "cône projectif" de "sommet" $F(U)$ et de "base" $P(\mathcal{U})$, déterminé par F , caractérisent dans \mathcal{B} , une limite projective de $F(\mathcal{U})$.

Si la catégorie \mathcal{B} est avec limites projectives, pour tout préfaisceau F sur Y à valeurs dans \mathcal{B} , pour tout ouvert U de Y

et pour tout recouvrement ouvert \mathcal{U} de U , soit $\check{F}(\mathcal{U})$ une limite projective du foncteur $F(\mathcal{U})$. Si de plus la catégorie \mathcal{B} est avec limites inductives filtrantes, soit $\check{F}(U)$ une limite inductive des $\check{F}(\mathcal{U})$ suivant l'ensemble filtrant décroissant des recouvrements ouverts saturés $\bar{\mathcal{U}}$ de U . Il est facile de vérifier que ces objets $\check{F}(U)$ et les morphismes évidents de $\check{F}(U)$ dans $\check{F}(U')$ lorsque $U \supset U'$, caractérisent un préfaisceau \check{F} sur Y à valeurs dans \mathcal{B} , appelé le *préfaisceau de Čech* associé au préfaisceau F . Enfin, les morphismes canoniques de $F(U)$ dans $\check{F}(U)$ caractérisent un morphisme $\Theta(F)$ du préfaisceau F dans le préfaisceau \check{F} . [4]

Avec ces hypothèses, un préfaisceau F sur Y à valeurs dans \mathcal{B} est *séparé* [4] si le morphisme $\Theta(F) : F \rightarrow \check{F}$ est un *monomorphisme*.

Toujours avec les mêmes hypothèses, il est facile de vérifier qu'il existe un foncteur $\check{\Gamma}$ de la catégorie des préfaisceaux sur Y à valeurs dans \mathcal{B} , dans elle-même, tel que pour tout préfaisceau F sur Y à valeurs dans \mathcal{B} , le préfaisceau de Čech \check{F} associé soit caractérisé par $\check{F} = \check{\Gamma} F$.

3-6. THEOREME : Etant donné un anneau commutatif A , si $X = \text{Spec}(A)$ est le spectre premier de A et si $\mathcal{A} = \text{Mod } A$ est la catégorie des A -modules, le foncteur préfaisceau P , déterminé par A , est *séparé*, ce qui signifie que pour tout objet M de \mathcal{A} , le préfaisceau $P(M) = P(\cdot, M)$ sur X à valeurs dans \mathcal{A} , associé à M , est *séparé*.

Il faut vérifier que pour tout objet M de \mathcal{A} et pour tout ouvert U de X , le morphisme canonique :

$$P(U, M) \rightarrow \check{P}(U, M) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{P}(\mathcal{U}, M)$$

est un monomorphisme.

Puisque dans \mathcal{A} les limites inductives filtrantes sont exactes, il suffit de vérifier que pour tout objet M de \mathcal{A} , pour tout ouvert U de X et pour tout recouvrement ouvert \mathcal{U} de U , le morphisme canonique

$$P(U, M) \rightarrow \check{P}(\mathcal{U}, M) = \varinjlim_{U' \in \mathcal{U}} P(U', M)$$

est un monomorphisme.

Si $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$, en posant provisoirement $L = L_U$ et $L_j = L_{U_j}$ pour tout $j \in J$, compte tenu de la définition du foncteur P , tout revient à vérifier que le morphisme canonique :

$$\omega : L M \rightarrow \prod_{j \in J} L_j M$$

déterminé par les morphismes canoniques :

$$\psi^j = \psi_M^{U_j, U} : L M \rightarrow L_j M$$

est un monomorphisme.

En posant également $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}_U$ et $\tilde{\mathcal{L}}_j = \tilde{\mathcal{L}}_{U_j}$ pour tout $j \in J$, les localisations $\tilde{\mathcal{L}}_j$ sont plus fines que la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$, ce qui entraîne que les sous-catégories locales $\tilde{\mathcal{L}}_j$ des loca-

lisations $\tilde{\mathcal{L}}_j$ sont contenues dans la sous-catégorie locale \mathcal{L} de la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$. [11]

Pour tout objet N de \mathcal{A} , les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 M & & \\
 \psi_M^U \downarrow & \searrow \psi_M^{U_j} & \\
 LM & \xrightarrow{\psi^j} & L_j M
 \end{array}$$

déterminent des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}(M, N) & & \\
 \text{Hom}(\psi_M^U, N) \uparrow & \swarrow \text{Hom}(\psi_M^{U_j}, N) & \\
 \text{Hom}(LM, N) & \xleftarrow{\text{Hom}(\psi^j, N)} & \text{Hom}(L_j M, N)
 \end{array}$$

Pour tout $j \in J$ et pour tout objet N de $\tilde{\mathcal{L}}_j$, qui est à fortiori un objet de \mathcal{L} , les définitions de L et de L_j entraînent que les morphismes $\text{Hom}(\psi_M^U, N)$ et $\text{Hom}(\psi_M^{U_j}, N)$ sont des isomorphismes. Il en résulte que le morphisme $\text{Hom}(\psi^j, N)$ est un isomorphisme, ce qui entraîne que l'objet $L_j M$ et le morphisme ψ^j caractérisent un localisé de l'objet LM de \mathcal{A} pour la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_j$. Autrement dit :

$$L_j M \simeq L_j LM \quad \text{et} \quad \psi^j \simeq \psi_{LM}^{U_j}.$$

En posant également $\mathcal{F} = \mathcal{F}_U$ et $\mathcal{F}_j = \mathcal{F}_{U_j}$ pour tout $j \in J$, il en résulte alors les relations :

$$\text{Ker } \psi^j = \text{Ker } \psi_{LM}^{U_j} = \mathcal{F}_j LM.$$

La relation $\omega = \prod_{j \in J} \psi^j$ entraîne donc :

$$\text{Ker } \omega = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j \text{ LM} = \left(\bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j \right) \text{ LM} .$$

D'après la proposition 2-8, la relation

$$U = \bigcup_{j \in J} U_j$$

implique la relation :

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$$

qui entraîne alors :

$$\text{Ker } \omega = \mathfrak{F} \text{ LM} = 0$$

ce qui achève la démonstration.

3-7. Remarque : Soit Ann la catégorie des anneaux commutatifs et soit Mod la catégorie des modules "sur un anneau commutatif variable". Le foncteur canonique : $p : \text{Mod} \rightarrow \text{Ann}$, qui associe à tout B-module N l'anneau "de base" B est *bi-fibrant* [2].

Avec les données et les notations précédentes, pour tout ouvert U de X, le A-module $P(U, A) = L_U A$ est aussi le A-module sous-jacent à l'anneau localisé $A_{\mathfrak{F}_U}$ de A pour la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_U$, noté alors $P_{\circ}(U, A)$ et pour tout objet M de \mathcal{A} , le A-module $P(U, M)$ détermine un $P_{\circ}(U, A)$ -module noté $P_{\circ}(U, M)$. Pour deux ouverts U et U' de X vérifiant $U \supset U'$, le morphisme $\psi_A^{U'U}$ peut être considéré comme un homomorphisme de l'anneau

$P_0(U,A)$ dans l'anneau $P_0(U',A)$ de telle sorte que le morphisme de A -modules $\psi_M^{U'U} : P(U,M) \rightarrow P(U',M)$ peut être considéré comme un morphisme de $P_0(U,A)$ -modules de $P_0(U,M)$ dans $(\psi_A^{U'U})_* P_0(U',M)$, qui caractérise donc un morphisme dans Mod, noté encore $\psi_M^{U'U}$ de $P_0(U,M)$ dans $P_0(U',M)$.

Ces remarques montrent que le bi-foncteur :

$$P(\cdot, \cdot) : \text{Ouv}(X) \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

détermine un bi-foncteur :

$$P_0(\cdot, \cdot) : \text{Ouv}(X) \times \mathcal{A} \rightarrow \underline{\text{Mod}}$$

vérifiant en particulier la relation :

$$P(U,M) = (\psi_A^U)_* P_0(U,M)$$

pour tout ouvert U de X et pour tout objet M de \mathcal{A} .

De plus, le préfaisceau $P_0(A) = P_0(\cdot, A)$ est un *préfaisceau d'anneaux* sur X et pour tout objet M de \mathcal{A} , le préfaisceau $P_0(M) = P_0(\cdot, M)$ est un préfaisceau sur X à valeurs dans Mod vérifiant : $P_0(A) = p \circ P_0(M)$.

Comme \mathcal{A} est la "fibre" de Mod au-dessus de A , en fait, tout objet A de Ann détermine donc un foncteur P_0 de la fibre de Mod au-dessus de A , dans la catégorie des préfaisceaux sur le spectre premier X de A , à valeurs dans Mod.

En général, le foncteur noté ici P_0 est noté simplement P et il suffit alors de préciser que le foncteur P est "considéré comme à valeurs dans Mod".

4 - LE FONCTEUR FAISCEAU.

4-1. PROPOSITION : *Etant donné un anneau commutatif A , si $X = \text{Spec}(A)$ est le spectre premier de A et si $\mathcal{A} = \text{Mod } A$ est la catégorie des A-modules, alors :*

(a) *Le foncteur préfaisceau P , déterminé par A et caractérisé par le bi-foncteur :*

$$P(\cdot, \cdot) : \text{Ouv}(X) \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

détermine un foncteur préfaisceau de Čech \check{P} caractérisé par un bi-foncteur :

$$\check{P}(\cdot, \cdot) : \text{Ouv}(X) \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

tel que pour tout objet M de \mathcal{A} , le préfaisceau $\check{P}(M) = \check{P}(\cdot, M)$ sur X est le préfaisceau de Čech associé au préfaisceau $P(M) = P(\cdot, M)$ sur X .

(b) *Il existe un morphisme fonctoriel canonique :*

$$\theta : P(\cdot, \cdot) \rightarrow \check{P}(\cdot, \cdot)$$

caractérisé par les morphismes canoniques :

$$\theta_M^U : P(U, M) \rightarrow \check{P}(U, M)$$

pour tout ouvert U de X et pour tout objet M de \mathcal{A} .

De plus, θ est un monomorphisme fonctoriel.

(c) *Pour tout objet M de \mathcal{A} , le préfaisceau de Čech $\check{P}(M) = \check{P}(\cdot, M)$ est le faisceau associé au préfaisceau $P(M) = P(\cdot, M)$.*

Puisque la catégorie \mathcal{A} est avec limites projectives et avec limites inductives filtrantes exactes, tout objet M de \mathcal{A} détermine un préfaisceau de Čech $\check{P}(M) = \check{P}(\cdot, M)$. Comme le préfaisceau $P(M)$ dépend fonctoriellement de M , il en résulte que le préfaisceau $\check{P}(M)$ dépend fonctoriellement de M , ce qui établit la propriété (a) et la première partie de la propriété (b).

Le théorème 3-6 montre alors que Θ est un monomorphisme fonctoriel.

Enfin, pour tout objet M de \mathcal{A} , d'après le théorème 3-6 le préfaisceau $P(M)$ sur X est séparé et il est connu que dans ce cas, le faisceau associé à $P(M)$ est le préfaisceau de Čech $\check{P}(M)$ associé à $P(M)$ [4].

4-2. DEFINITION : Etant donné un anneau commutatif A , si $X = \text{Spec}(A)$ est le spectre premier de A et si $\mathcal{A} = \text{Mod } A$ est la catégorie des A -modules, le foncteur faisceau \check{P} , déterminé par A , est le bi-foncteur :

$$\check{P}(\cdot, \cdot) : \text{Ouv}(X) \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

caractérisé par la proposition 4-1.

En particulier, pour tout objet M de \mathcal{A} , le foncteur :

$$\check{P}(M) = \check{P}(\cdot, M) : \text{Ouv}(X) \rightarrow \mathcal{A}$$

est le faisceau associé à M et c'est aussi le faisceau associé au préfaisceau $P(M) = P(\cdot, M)$.

D'après la remarque 3-7, le foncteur préfaisceau P , déterminé par A , peut être "considéré comme à valeurs dans Mod". Lorsqu'il en est ainsi, le théorème 7 (p. 178) de [2] et le théorème 5-4-4 de [9] montrent qu'une construction analogue à celle du foncteur faisceau \check{P} permet d'obtenir un bifoncteur à valeurs dans Mod qui détermine alors de façon canonique le foncteur faisceau \check{P} , déterminé par A .

Ainsi, il convient de remarquer que le foncteur préfaisceau P et le foncteur faisceau \check{P} , déterminés par A , peuvent être considérés comme à valeurs dans Mod et que cette identification est compatible avec la construction de \check{P} à partir de P .

4-3. THEOREME : Etant donné un anneau commutatif A , si $X = \text{Spec}(A)$ est le spectre premier de A , si $\mathcal{A} = \text{Mod } A$ est la catégorie des A -modules, si P est le foncteur préfaisceau et si \check{P} est le foncteur faisceau, déterminés par A , alors pour tout objet M de \mathcal{A} et pour tout ouvert quasi-compact U de X , le morphisme :

$$\Theta_M^U : P(U, M) \rightarrow \check{P}(U, M)$$

est un isomorphisme.

La proposition 4-1 assure que Θ_M^U est un monomorphisme. Il suffit donc de montrer que Θ_M^U est un épimorphisme et puisque

dans \mathcal{A} , les limites inductives filtrantes sont exactes, tout revient à montrer qu'il existe des recouvrements ouverts \mathcal{U} de U , arbitrairement fins, tels que le morphisme canonique :

$$P(U, M) \rightarrow \check{P}(\mathcal{U}, M)$$

soit un épimorphisme.

Comme U est un ouvert quasi-compact de X et que les ouverts affines spéciaux constituent une base de la topologie de X , il est toujours possible de supposer que \mathcal{U} est constitué par une famille finie $\{U_j\}_{j \in J}$ d'ouverts affines spéciaux formant un recouvrement de U .

Pour tout couple $(j, k) \in J \times J = J^2$, soit $U_{jk} = U_{kj} = U_j \cap U_k$. En posant provisoirement $L = L_U$, $L_j = L_{U_j}$ pour tout $j \in J$ et $L_{jk} = L_{kj} = L_{U_{jk}}$ pour tout $(j, k) \in J^2$, ainsi que $\psi^j = \psi_M^{U_j U}$ pour tout $j \in J$ et $\psi^{kj} = \psi_M^{U_{jk} U_j}$, il est d'abord immédiat que $\check{P}(\mathcal{U}, M)$ est aussi une limite projective du système projectif représenté par le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} L_j M & \xrightarrow{\psi^{kj}} & \\ & \searrow & \\ L_k M & \xrightarrow{\psi^{jk}} & L_{jk} M = L_{kj} M \end{array}$$

dans lequel $j \in J$ et $(j, k) \in J^2$.

Un élément $\xi \in \check{P}(\mathcal{U}, M)$ est donc représenté par une famille $\xi = (\xi_j)_{j \in J}$ d'éléments $\xi_j \in L_j M$ pour tout $j \in J$, telle que tout

$(j,k) \in J^2$ entraîne la relation :

$$(1) \quad \psi^{kj}(\xi_j) = \xi_{kj} = \xi_{jk} = \psi^{jk}(\xi_k) .$$

Tout revient donc à montrer que pour tout élément $\xi \in \check{P}(\mathcal{U}, M)$ caractérisé de cette façon, il existe au moins un élément $\eta \in P(U, M) = LM$ vérifiant pour tout $j \in J$, la relation :

$$(2) \quad \xi_j = \psi^j(\eta) .$$

En posant provisoirement $\mathcal{F}_j = \mathcal{F}_{U_j}$ pour tout $j \in J$ et $\mathcal{F}_{jk} = \mathcal{F}_{U_{jk}}$ pour tout $(j,k) \in J^2$, les relations : $\mathcal{F}_j M \subset \mathcal{F}_{jk} M$ permettent la considération des morphismes canoniques :

$$\mu_{k,j} : M'_j = M/\mathcal{F}_j M \rightarrow M'_{jk} = M/\mathcal{F}_{jk} M = M'_{kj} .$$

Soit $\xi \in \check{P}(\mathcal{U}, M)$ un élément représenté par une famille $\xi = (\xi_j)_{j \in J}$ d'éléments $\xi_j \in L_j M$, vérifiant les relations (1).

L'élément $\xi_j \in L_j M = \varinjlim_{I \in \mathcal{F}_j} \text{Hom}(I, M'_j)$ est représenté par un homomorphisme : $\varphi''_j : Af''_j \rightarrow M'_j$, dans lequel f''_j est le générateur d'un idéal monogène Af''_j , élément de \mathcal{F}_j , c'est-à-dire vérifiant : $U_j = D(f''_j)$ et pour lequel $\xi_j = \overline{\varphi''_j}$, en désignant systématiquement par la lettre "sur lignée", l'image d'un homomorphisme, dans la limite inductive où il figure.

L'élément $\xi_{k,j} \in L_{jk} M = \varinjlim_{I \in \mathcal{F}_{jk}} \text{Hom}(I, M'_{jk})$ image de ξ_j par ψ^{kj} , est représenté par la restriction à l'idéal Af''_{jk}

du composé : $\mu_{kj} \circ \varphi_j'' : Af_j'' \rightarrow M_{jk}'$ et l'élément $\xi_{j,k} \in L_{kj} M = \varinjlim_{I \in \mathcal{F}_k} \text{Hom}(I, M_{jk}')$ image de ξ_k par ψ^{jk} , est représenté par la restriction à l'idéal $Af_j'' f_k''$ du composé :

$$\mu_{jk} \circ \varphi_k'' : Af_k'' \rightarrow M_{jk}' .$$

La définition de $L_{jk} M$, la relation $U_{jk} = U_j \cap U_k = D(f_j'') \cap D(f_k'') = D(f_j'' f_k'')$ et le fait que \mathcal{F}_{jk} admet pour système cofinal les puissances de l'idéal $Af_j'' f_k''$, montrent que les relations (1) entraînent l'existence d'entiers $m_{j,k}$ tels que les restrictions de $\mu_{kj} \circ \varphi_j''$ et de $\mu_{jk} \circ \varphi_k''$ à l'idéal $A(f_j'' f_k'')^{m_{j,k}}$, coïncident.

Puisque l'ensemble J^2 est fini, si m est un entier qui majore les entiers $m_{j,k}$ pour tout $(j,k) \in J^2$, il en résulte que pour tout $(j,k) \in J^2$, les restrictions de $\mu_{kj} \circ \varphi_j''$ et de $\mu_{jk} \circ \varphi_k''$ à l'idéal $Af_j''^m f_k''^m$, coïncident.

En posant $f_j^! = f_j''^m$ pour tout $j \in J$, ce qui entraîne en particulier $U_j = D(f_j^!)$, si $\varphi_j^!$ est la restriction de φ_j'' à l'idéal $Af_j^!$, ce qui entraîne donc $\xi_j = \bar{\varphi}_j^!$, pour tout $(j,k) \in J^2$, les restrictions de $\mu_{kj} \circ \varphi_j^!$ et de $\mu_{jk} \circ \varphi_k^!$ à l'idéal $Af_j^! f_k^!$, coïncident.

Pour tout $j \in J$, l'homomorphisme $\varphi_j^! : Af_j^! \rightarrow M_j^!$ peut être caractérisé par un élément $y_j^! \in M$, dont l'image $y_j^!$ dans $M_j^!$ vérifie :

$$\varphi_j^!(f_j^!) = y_j^! .$$

Puisque les restrictions de $\mu_{kj} \circ \varphi_j'$ et de $\mu_{jk} \circ \varphi_k'$ à l'idéal $Af_j'f_k'$ coïncident, il en résulte la relation :

$$\mu_{kj} \circ \varphi_j'(f_k'f_j') = \mu_{jk} \circ \varphi_k'(f_j'f_k')$$

qui donne alors la relation :

$$\mu_{kj}(f_k'y_j') = \mu_{jk}(f_j'y_k') .$$

Les deux membres de cette relation sont les images dans $M_{jk}' = M/\mathfrak{F}_{jk} M$ des éléments $f_k'y_j'$ et $f_j'y_k'$ de M et cette relation entraîne donc la relation :

$$(f_j'y_k' - f_k'y_j') \in \mathfrak{F}_{jk} M .$$

La relation $U_{jk} = D(f_j'f_k')$, la définition de $\mathfrak{F}_{jk} M$ et le fait que \mathfrak{F}_{jk} admet pour système cofinal les puissances de l'idéal $Af_j'f_k'$, montrent que la relation précédente entraîne l'existence d'entiers $p_{j,k}$ pour tout $(j,k) \in J^2$, tels que :

$$(f_j'f_k')^{p_{j,k}} (f_j'y_k' - f_k'y_j') = 0 .$$

Puisque l'ensemble J^2 est fini, si p est un entier qui majore les entiers $p_{j,k}$ pour tout $(j,k) \in J^2$, il en résulte les relations :

$$(3) \quad (f_j'f_k')^p (f_j'y_k' - f_k'y_j') = 0$$

pour tout $(j,k) \in J^2$.

En posant $f_j = f_j'^{p+1}$ pour tout $j \in J$, ce qui entraîne

en particulier $U_j = D(f_j)$, si φ_j est la restriction de φ'_j à l'idéal $Af_j = Af'_j{}^P f'_j$, ce qui entraîne donc $\xi_j = \overline{\varphi'_j}$, elle est caractérisée par :

$$\varphi_j(f_j) = \varphi'_j(f'_j{}^P f'_j) = f'_j{}^P \varphi'_j(f'_j) = f'_j{}^P y'_j$$

et en posant $x_j = f'_j{}^P y'_j$ pour tout $j \in J$, les images x'_j dans M'_j , vérifient :

$$\varphi_j(f_j) = x'_j .$$

La relation (3) se met sous la forme :

$$f'_j{}^{P+1} (f'_k{}^P y'_k) - f'_k{}^{P+1} (f'_j{}^P y'_j) = 0$$

ce qui donne alors :

$$f_j x'_k - f_k x'_j = 0 .$$

En résumé, pour tout élément $\xi \in \check{P}(\mathcal{U}, M)$ déterminé par une famille $\xi = (\xi_j)_{j \in J}$ d'éléments $\xi_j \in L_j M$, vérifiant les relations (1), il existe une famille $(f_j)_{j \in J}$ d'éléments de A , vérifiant :

$$(4) \quad U_j = D(f_j)$$

une famille $(\varphi_j)_{j \in J}$ d'homomorphismes :

$$(5) \quad \varphi_j : Af_j \rightarrow M'_j$$

vérifiant :

$$(6) \quad \xi_j = \bar{\varphi}_j$$

et une famille $(x_j)_{j \in J}$ d'éléments de M , tels que si x'_j désigne l'image canonique de x_j dans $M'_j = M/\mathfrak{P}_j M$, les homomorphismes φ_j soient caractérisés par les relations :

$$(7) \quad \varphi_j(f_j) = x'_j$$

et que de plus :

$$(8) \quad f_j x_k - f_k x_j = 0$$

pour tout $(j,k) \in J$.

Puisque $U = \bigcup_{j \in J} U_j$, les relations (4) entraînent que l'idéal :

$$Q = \sum_{j \in J} A f_j$$

vérifie $U = D(Q)$ et par suite $Q \in \mathcal{F}$.

Si r est le nombre d'éléments de J , en posant : $\Lambda = A^r$, soit g l'homomorphisme surjectif de Λ sur Q défini par la condition suivante : pour tout $\lambda \in \Lambda$, caractérisé par une famille $\lambda = (\lambda_j)_{j \in J}$ d'éléments de A :

$$g(\lambda) = \sum_{j \in J} \lambda_j f_j .$$

Il en résulte une suite exacte :

$$0 \rightarrow K \rightarrow \Lambda \xrightarrow{g} \mathcal{A} \rightarrow 0$$

dans laquelle le noyau K de g est constitué par les éléments $\lambda = (\lambda_j)_{j \in J}$, vérifiant :

$$\sum_{j \in J} \lambda_j f_j = 0 .$$

Si $\lambda = (\lambda_j)_{j \in J}$ vérifie $\lambda \in K$, pour tout indice $k \in J$, en posant $J_k = J - \{k\}$, il en résulte la relation :

$$-\lambda_k f_k = \sum_{j \in J_k} \lambda_j f_j$$

qui entraîne :

$$-\lambda_k f_k x_k = \sum_{j \in J_k} \lambda_j f_j x_k$$

et les relations (8) impliquent :

$$-\lambda_k f_k x_k = \sum_{j \in J_k} \lambda_j f_k x_j$$

ce qui donne :

$$f_k \left(\sum_{j \in J} \lambda_j x_j \right) = 0 .$$

Puisque la famille $(f_k)_{k \in J}$ engendre l'idéal \mathcal{A} , il en résulte que tout $\alpha \in \mathcal{A}$, vérifie :

$$\alpha \cdot \left(\sum_{j \in J} \lambda_j x_j \right) = 0$$

et puisque $\alpha \in \mathcal{F}$, il en résulte la relation :

$$\left(\sum_{j \in J} \lambda_j x_j \right) \in \mathcal{F}^M .$$

Ainsi, la condition $\lambda \in K$ implique :

$$\left(\sum_{j \in J} \lambda_j x_j \right) \in \mathfrak{F} M .$$

Soit μ l'homomorphisme canonique de M sur $M' = M / \mathfrak{F} M$ et soit φ_0 l'homomorphisme de Λ dans M défini par :

$$\varphi_0(\lambda) = \sum_{j \in J} \lambda_j x_j .$$

Ce qui précède montre donc que la condition $\lambda \in K$ implique :

$$\mu \circ \varphi_0(\lambda) = 0$$

ce qui montre qu'il existe un homomorphisme unique :

$$\varphi : \mathcal{A} \rightarrow M'$$

vérifiant :

$$\varphi \circ g = \mu \circ \varphi_0 .$$

De façon précise, cet homomorphisme φ peut être caractérisé par la condition suivante : pour tout élément $\alpha \in \mathcal{A}$ mis sous la forme :

$$\alpha = \sum_{j \in J} \alpha_j f_j$$

l'élément $\varphi(\alpha)$ de M' est caractérisé par :

$$\varphi(\alpha) = \sum_{j \in J} \alpha_j \mu(x_j)$$

et il est indépendant de la décomposition de α .

Pour tout $j \in J$, il en résulte en particulier :

$$\varphi(f_j) = \mu(x_j)$$

et comme l'image de $\mu(x_j)$ par l'homomorphisme canonique $\mu_j^! : M' \rightarrow M_j^!$ est $x_j^!$, il en résulte les relations :

$$(9) \quad \mu_j^! \circ \varphi(f_j) = x_j^!$$

Puisque $\alpha \in \mathcal{F}$, l'homomorphisme $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow M'$ détermine un élément $\eta = \overline{\varphi}$ de LM et pour tout $j \in J$, les relations (6), (7) et (9) entraînent les relations :

$$\xi_j = \psi^j(\eta)$$

ce qui achève la démonstration.

4-4. COROLLAIRE : Etant donné un anneau commutatif A , si

$X = \text{Spec}(A)$ est le spectre premier de A , le foncteur faisceau \check{P} déterminé par A , possède les propriétés suivantes :

(a) Le faisceau d'anneaux $\check{P}(A)$ sur X coïncide avec le faisceau structural $\mathcal{O}_X = \tilde{A}$ du schéma affine (X, \mathcal{O}_X) défini par A .

(b) Pour tout A -module M , le faisceau $\check{P}(M)$ sur X est un $\check{P}(A)$ -Module qui coïncide avec le \mathcal{O}_X -Module \tilde{M} associé de façon classique au A -module M .

La remarque qui suit la définition 4-2 montre que le faisceau $\check{P}(M)$ sur X est un $\check{P}(A)$ -Module, c'est-à-dire que pour tout ouvert U de X , l'objet $\check{P}(U, M)$ de Mod est un $\check{P}(U, A)$ -module et que pour deux ouverts U et U' de X vérifiant : $U \supset U'$, le morphisme canonique $\check{P}(U, M) \rightarrow \check{P}(U', M)$ dans Mod se projette dans Ann suivant le morphisme canonique : $\check{P}(U, A) \rightarrow \check{P}(U', A)$.

Pour tout élément $f \in A$, l'ouvert affine spécial $D(f)$ est quasi-compact et le théorème 4-3 entraîne les relations :

$$\check{P}(D(f), A) = P(D(f), A) = L_{D(f)}^A = A_f$$

et

$$\check{P}(D(f), M) = P(D(f), M) = L_{D(f)}^M = M_f$$

dans lesquelles A_f [resp. M_f] est l'anneau [resp. le module] localisé de l'anneau A [resp. du A -module M] pour la localisation \mathcal{L}_f dans la catégorie des A -modules, caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent \mathcal{F}_f des idéaux de A qui contiennent une puissance de f .

Comme la construction classique [7] [2] du faisceau structural $\mathcal{O}_X = \tilde{A}$ [respectivement du \mathcal{O}_X -Module \tilde{M}] le caractérise par les conditions $\Gamma(D(f), \mathcal{O}_X) = A_f$ [resp. : $\Gamma(D(f), \tilde{M}) = M_f$] pour tout élément $f \in A$, le corollaire 4-4 en résulte immédiatement.

4-5. COROLLAIRE : Etant donné un anneau commutatif A , si $X = \text{Spec}(A)$ est le spectre premier de A , si P

est le foncteur préfaisceau et si \check{P} est le foncteur faisceau déterminés par A , pour tout ouvert quasi-compact U de X et pour tout idéal de type fini \mathcal{Q} de A , vérifiant $U = D(\mathcal{Q})$, alors :

(a) Le faisceau structural $\mathcal{O}_X = \tilde{A}$ du schéma affine (X, \mathcal{O}_X) défini par A , vérifie

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \check{P}(U, A) = P(U, A) = L_U A .$$

En particulier, si $\mathcal{F}_U A$ est l'idéal de A constitué par les éléments de A dont l'annulateur appartient à \mathcal{F}_U , c'est-à-dire contient un idéal de la forme \mathcal{Q}^n , avec $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \varinjlim_{D(I)=U} \text{Hom}(I, A/\mathcal{F}_U A) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}(\mathcal{Q}^n, A/\mathcal{F}_U A)$$

(b) Pour tout A -module M , le \mathcal{O}_X -Module \tilde{M} associé à M , vérifie :

$$\Gamma(U, \tilde{M}) = \check{P}(U, M) = P(U, M) = L_U M .$$

En particulier, si $\mathcal{F}_U M$ est le sous-module constitué par les éléments de M dont l'annulateur appartient à \mathcal{F}_U , c'est-à-dire contient un idéal de la forme \mathcal{Q}^n , avec $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\Gamma(U, \tilde{M}) = \varinjlim_{D(I)=U} \text{Hom}(I, M/\mathcal{F}_U M) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}(\mathcal{Q}^n, M/\mathcal{F}_U M) .$$

La caractérisation de \mathcal{F}_U résulte du lemme 2-6 et elle entraîne alors les caractérisations de $\mathcal{F}_U A$ et de $\mathcal{F}_U M$.

Ce corollaire 4-5 est alors une conséquence immédiate des définitions de P et de \check{P} , ainsi que du théorème 4-3 et du corollaire 4-4.

4-6. COROLLAIRE : Etant donné un anneau commutatif A , si $X = \text{Spec}(A)$ est le spectre premier de A , alors :

(a) Pour tout ouvert quasi-compact U de X tel que tout idéal I de A , vérifiant $U = D(I)$ ait un annulateur nul et pour tout idéal de type fini \mathcal{Q} de A vérifiant $U = D(\mathcal{Q})$, le faisceau structural $\mathcal{O}_X = \tilde{A}$ du schéma affine (X, \mathcal{O}_X) défini par A , vérifie :

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \varinjlim_{D(I)=U} \text{Hom}(I, A) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}(\mathcal{Q}^n, A) .$$

(b) Pour tout A -module M et pour tout ouvert quasi-compact U de X tel que tout idéal I de A , vérifiant $U = D(I)$, ne soit contenu dans aucun des annulateurs des éléments non nuls de M et pour tout idéal de type fini \mathcal{Q} de A , vérifiant $U = D(\mathcal{Q})$, le \mathcal{O}_X -Module \tilde{M} associé à M , vérifie :

$$\Gamma(U, \tilde{M}) = \varinjlim_{D(I)=U} \text{Hom}(I, M) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}(\mathcal{Q}^n, M) .$$

Les hypothèses entraînent respectivement $\mathfrak{F}_U A = 0$ et $\mathfrak{F}_U M = 0$. Le corollaire 4-6 est alors une conséquence immédiate du corollaire 4-5.

4-7. LEMME : Etant donné un anneau commutatif noethérien A , soit $\mathcal{A} = \text{Mod } A$ la catégorie des A -modules. Pour toute localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ dans \mathcal{A} , caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent \mathfrak{F} d'idéaux de A , le foncteur localisation L peut être caractérisé par la condition suivante : pour tout objet M de \mathcal{A} :

$$LM = \varinjlim_{I \in \mathfrak{F}} \text{Hom}(I, M) .$$

En effet, si \mathcal{C} est la sous-catégorie localisante de \mathcal{A} associée à $\tilde{\mathcal{L}}$, la proposition 10 (p. 428) de [3] montre que \mathcal{C} est stable par enveloppes injectives et le lemme 4-7 résulte alors du corollaire 1. (p. 413) de [3].

4-8. COROLLAIRE : Etant donné un anneau commutatif noethérien A , si $X = \text{Spec}(A)$ est le spectre premier de A , pour tout ouvert U de X et pour tout idéal Q de A , vérifiant $U = D(Q)$, alors :

(a) Le faisceau structural $\mathcal{O}_X = \tilde{A}$ du schéma affine défini par A , vérifie :

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \varinjlim_{D(I)=U} \text{Hom}(I, A) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}(Q^n, A)$$

(b) Pour tout A -module M , le \mathcal{O}_X -Module \tilde{M} associé à M , vérifie :

$$\Gamma(U, \tilde{M}) = \varinjlim_{D(I)=U} \text{Hom}(I, M) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}(Q^n, M) .$$

Comme tout ouvert U de X est quasi-compact et que tout idéal \mathcal{Q} de A , est de type fini, le corollaire 4-8 est une conséquence du corollaire 4-5 et du lemme 4-7.

4-9. COROLLAIRE : *Etant donné un anneau commutatif noethérien A , si $X = \text{Spec}(A)$ est le spectre premier de A et si $\mathcal{O}_X = \tilde{A}$ est le faisceau structural du schéma affine défini par A , alors pour tout A -module injectif N le \mathcal{O}_X -Module \tilde{N} est un faisceau flasque.*

Puisque N est injectif, pour tout idéal I de A , l'application canonique de $\text{Hom}(A, N)$ dans $\text{Hom}(I, N)$ est surjective et par suite pour tout ouvert U de X , il en est de même pour l'application canonique :

$$N \rightarrow \varinjlim_{D(I)=U} \text{Hom}(I, N)$$

Ainsi, d'après le corollaire 4-8, l'application canonique

$$\psi_N^U : \Gamma(X, \tilde{N}) \rightarrow \Gamma(U, \tilde{N})$$

est surjective, ce qui prouve que le \mathcal{O}_X -Module \tilde{N} est un faisceau flasque [5].

Remarques.

- (a) Compte tenu du corollaire 4-4, le théorème 4-3 exprime que pour tout A -module M et pour tout ouvert quasi-compact U de X , le morphisme canonique :

$$\theta_M^U : L_U M = P(U, M) \rightarrow \Gamma(U, \tilde{M})$$

est un isomorphisme. Ainsi, le théorème 4-3 est une généralisation du théorème (1-3-7) de [7] qui établit le résultat analogue dans le cas particulier où U est un ouvert affine spécial de la forme $D(f)$ avec $f \in A$.

- (b) L'étude des ouverts affines dans les spectres des anneaux intègres noethériens a été abordée dans [12]. Comme il était indiqué que les hypothèses faites étaient très restrictives, pour aborder un problème analogue dans le cas du schéma affine (X, \mathcal{O}_X) défini par un anneau commutatif A quelconque, il convient en particulier d'étudier les anneaux de sections $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ au-dessus d'un ouvert quasi-compact U de X .

La proposition 5-10 et le corollaire 5-11 de [12] qui constituaient des résultats dans cette voie, sont donnés par la partie (a) du corollaire 4-6, qui montre que des résultats analogues subsistent pour tout \mathcal{O}_X -Module \tilde{M} associé à un A -module M .

Comme ce corollaire 4-6 n'est évidemment qu'un cas particulier du corollaire 4-5, il en résulte que les hypothèses relatives aux annulateurs ne sont pas indispensables, à condition de formuler les résultats sous une forme adaptée.

De plus, dans le cas *noethérien*, le corollaire 4-8 montre que les formulations simples des résultats restent valables sans hypothèses sur les annulateurs.

- (c) Etant donné un anneau commutatif A , soit $\mathcal{A} = \text{Mod } A$ la catégorie des A -modules et si $\mathcal{O}_X = \tilde{A}$ est le faisceau structural du schéma affine (X, \mathcal{O}_X) défini par A , soit \mathcal{B}_0 la catégorie des \mathcal{O}_X -Modules (non nécessairement quasi-cohérents) et soit \mathcal{B} la catégorie des \mathcal{O}_X -Modules quasi-cohérents.

D'après le corollaire 4-4, le théorème (1-4-1) de [7] montre que le foncteur \check{P} de \mathcal{A} dans \mathcal{B} et la restriction à \mathcal{B} du foncteur $\Gamma = \Gamma(X, \cdot)$ de \mathcal{B}_0 dans \mathcal{A} , établissent une équivalence entre \mathcal{A} et \mathcal{B} .

Pour tout objet M de \mathcal{A} , il est possible de construire une résolution cohomologique *injective* de M dans \mathcal{A} , de la forme :

$$(1) \quad 0 \rightarrow M \rightarrow N_0 \rightarrow N_1 \rightarrow \dots \rightarrow N_p \rightarrow \dots$$

La proposition (1-3-5) de [7] montre que l'image de cette résolution par le foncteur \check{P} est une résolution cohomologique de $\check{P}(M) = \tilde{M}$, dans \mathcal{B}_0 , de la forme :

$$(2) \quad 0 \rightarrow \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}_0 \rightarrow \tilde{N}_1 \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{N}_p \rightarrow \dots$$

et par application du foncteur $\Gamma = \Gamma(X, \cdot)$ il en résulte un complexe augmenté, dans \mathcal{A} , de la forme :

$$(3) \quad 0 \rightarrow \Gamma\tilde{M} \rightarrow \Gamma\tilde{N}_0 \rightarrow \Gamma\tilde{N}_1 \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma\tilde{N}_p \rightarrow \dots$$

qui, d'après ce qui précède, est équivalent à la résolution (1) et par suite est *acyclique*.

Si l'anneau commutatif A est *noethérien*, le corollaire 4-9 entraîne que la résolution (2) est une *résolution cohomologique* de \tilde{M} dans \mathcal{O}_0 par des *faisceaux flasques*.

Le théorème 4-7-1 de [5] entraîne que la cohomologie $H^*(X, \tilde{M})$ du \mathcal{O}_X -Module \tilde{M} peut être calculée au moyen d'une résolution flasque de \tilde{M} .

Il en résulte que la cohomologie $H^*(X, \tilde{M})$ du \mathcal{O}_X -Module \tilde{M} est la cohomologie du complexe augmenté (3) et puisqu'il est acyclique, il en résulte :

$$H^p(X, \tilde{M}) = 0$$

pour tout $p > 0$.

Cette méthode permet donc d'établir facilement que pour tout *schéma affine noethérien* (X, \mathcal{O}_X) déterminé par un *anneau commutatif noethérien* A , et pour tout \mathcal{O}_X -Module *quasi-cohérent* \tilde{M} , alors :

$$H^p(X, \tilde{M}) = 0$$

pour tout $p > 0$.

Ainsi, le corollaire 4-9 conduit à une démonstration élémentaire dans le cas des *schémas affines noethériens*, du résultat établi dans le théorème (1-3-1) de [8] pour les schémas affines quelconques, mais dont la démonstration fait appel à une technique beaucoup plus élaborée.

5 - LOCALISATIONS IMAGES DIRECTES.

5-1 - Notations. Etant donnés deux anneaux (non nécessairement commutatifs) A et A' , soient \mathcal{A} et \mathcal{A}' les catégories de modules (à gauche) sur A et sur A' .

Pour tout homomorphisme d'anneaux $\rho : A \rightarrow A'$, le foncteur restriction des scalaires ρ_* de \mathcal{A}' dans \mathcal{A} , est un adjoint à droite au foncteur extension des scalaires ρ^* de \mathcal{A} dans \mathcal{A}' .

Pour toute localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ dans \mathcal{A} , caractérisée par une sous-catégorie localisante \mathcal{C} de \mathcal{A} ou par un ensemble topologisant et idempotent \mathcal{F} , puisque le foncteur ρ_* est exact et commute aux limites inductives, il est facile de vérifier que la sous-catégorie pleine \mathcal{C}' de \mathcal{A}' caractérisée par les objets dont l'image par ρ_* est un objet de \mathcal{C} , constitue une sous-catégorie localisante de \mathcal{A}' , appelée l'image $\mathcal{C}' = \rho(\mathcal{C})$ de \mathcal{C} par ρ . L'ensemble topologisant et idempotent associé à \mathcal{C}' est appelé l'image $\mathcal{F}' = \rho(\mathcal{F})$ de \mathcal{F} par ρ . Il est constitué par les idéaux (à gauche) I' de A' , tels que $\rho_*(A'/I')$ soit un objet de \mathcal{C} . Ainsi, la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ dans \mathcal{A} détermine une localisation $\tilde{\mathcal{L}}'$ dans \mathcal{A}' , appelée l'image $\tilde{\mathcal{L}}' = \rho(\tilde{\mathcal{L}})$ de $\tilde{\mathcal{L}}$ par ρ et caractérisée par la sous-catégorie localisante $\mathcal{C}' = \rho(\mathcal{C})$ ou par l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F}' = \rho(\mathcal{F})$.

5-2. LEMME : Avec les données et les notations précédentes, si l'une ou l'autre des conditions suivantes est réalisée :

(α) Les anneaux A et A' sont commutatifs.

(β) L'anneau A' est le localisé $A_{\mathfrak{F}}$ de A pour la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ et ρ est l'homomorphisme canonique de A dans $A_{\mathfrak{F}}$;

Alors, l'ensemble \mathfrak{F}' est constitué par les idéaux (à gauche) de A' dont l'image réciproque par ρ , appartient à l'ensemble \mathfrak{F} .

La conclusion est immédiate sous la condition (α) et elle est facile à vérifier sous la condition (β) (voir par exemple la partie h) de l'exercice 19 (p. 161) de [1]).

5-3. LEMME : Avec les données et les notations précédentes, soient \mathcal{L} et \mathcal{L}' les sous-catégories locales de $\tilde{\mathcal{L}}$ et de $\tilde{\mathcal{L}}'$, soient S et S' les foncteurs canoniques d'injection de \mathcal{L} dans \mathcal{A} et de \mathcal{L}' dans \mathcal{A}' , et soient T et T' des foncteurs canoniques de \mathcal{A} dans \mathcal{L} et de \mathcal{A}' dans \mathcal{L}' , tels que les foncteurs localisation L et L' associés à $\tilde{\mathcal{L}}$ et à $\tilde{\mathcal{L}}'$ soient caractérisés par :

$$L = ST \quad \text{et} \quad L' = S'T'$$

Alors :

(a) Il existe un foncteur canonique :

$$\rho_0 : \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$$

caractérisé par la condition :

$$(1) \quad \rho_0 T' = T \rho_*$$

(b) Si l'anneau A' est le localisé $A_{\mathcal{F}}$ de A pour la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ et si ρ est l'homomorphisme canonique de A dans $A_{\mathcal{F}}$, le foncteur ρ_0 est caractérisé par la condition :

$$(1') \quad S \rho_0 = \rho_* S'$$

et il existe un foncteur canonique :

$$\rho_1 : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$$

caractérisé par les conditions :

$$(2) \quad S = \rho_* S' \rho_1 \quad \text{et} \quad (3) \quad T' = \rho_1 T \rho_*$$

De plus, les foncteurs ρ_0 et ρ_1 établissent une équivalence entre la catégorie \mathcal{L} et la catégorie \mathcal{L}' .

La définition de la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ montre que le foncteur exact $T \rho_*$ de \mathcal{A}' dans \mathcal{L} s'annule sur la sous-catégorie localisante \mathcal{C}' associée à $\tilde{\mathcal{L}}$. Puisque la catégorie quotient $\mathcal{A}'/\mathcal{C}'$ est équivalente à la catégorie \mathcal{L}' et que le foncteur

canonique de \mathcal{A}' dans $\mathcal{A}'/\mathcal{Q}'$, correspond, dans cette équivalence, au foncteur canonique T' de \mathcal{A}' dans \mathcal{L}' , le corollaire 2 (p. 368) de [3] montre qu'il existe un foncteur unique ρ_0 de \mathcal{L}' dans \mathcal{L} vérifiant la relation :

$$(1) \quad \rho_0 T' = T \rho_* .$$

Sous la condition (b), la proposition 3 (p. 413) de [3] montre qu'il existe un foncteur S_1 de \mathcal{L} dans \mathcal{A}' , induit par le foncteur localisation L , tel que $\rho_* S_1$ soit adjoint à droite à T , ce qui entraîne $S = \rho_* S_1$ et tel que $S_1 T \rho_*$ induise le foncteur localisation L' , ce qui entraîne l'existence d'un foncteur ρ_1 de \mathcal{L} dans \mathcal{L}' , caractérisé par :

$$S_1 = S' \rho_1 \quad \text{et} \quad S' T' = S' \rho_1 T \rho_* .$$

Puisque S' est pleinement fidèle, la seconde relation est équivalente à la relation (3) et, compte tenu de la relation $S = \rho_* S_1$, la première relation se traduit par la relation (2).

La relation $T'S' = I_{\mathcal{L}'}$ entraîne en particulier :

$$\rho_0 = \rho_0 T'S' = T \rho_* S'$$

et il en résulte alors les relations :

$$\rho_0 \rho_1 = T \rho_* S' \rho_1 = TS = I_{\mathcal{L}}$$

et

$$\rho_1 \rho_0 = \rho_1 T \rho_* S' = T'S' = I_{\mathcal{L}'}$$

qui montrent que ρ_0 et ρ_1 établissent une équivalence entre la catégorie \mathcal{L} et la catégorie \mathcal{L}' .

La relation $\rho_1 \rho_0 = I_{\mathcal{L}'}$, et la relation (2) entraînent :

$$S \rho_0 = \rho_* S' \quad \rho_1 \rho_0 = \rho_* S'$$

c'est-à-dire la relation (1') et réciproquement la relation (1') entraîne :

$$S \rho_0 T' = \rho_* S' T' = \rho_* S' \rho_1 T \rho_* = S T \rho_*$$

et puisque S est pleinement fidèle, il en résulte la relation (1), ce qui achève la démonstration.

5-4. DEFINITION : Etant donné un anneau (non nécessairement commutatif) A , soit $\mathcal{A} = \text{Mod } A$ la catégorie des A -modules (à gauche) et soit $\tilde{\mathcal{L}}$ une localisation dans \mathcal{A} caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent \mathcal{F} d'idéaux (à gauche) de A .

Un sous-objet N d'un objet M de \mathcal{A} est \mathcal{F} -clos dans M si $\mathcal{F}(M/N) = 0$, c'est-à-dire si M/N est un objet de la mono-sous-catégorie \mathcal{A} associée à la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$.

Un tel objet N est un sous-objet clos de M pour la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$.

5-5. LEMME : Etant donné un anneau (non nécessairement commutatif) A , soit $\mathcal{A} = \text{Mod } A$ la catégorie des A -modules (à gauche), soit $\tilde{\mathcal{L}}$ une localisation dans

\mathcal{A} , caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent \mathcal{F} d'idéaux (à gauche) de A et soit $\psi : I_{\mathcal{A}} \rightarrow L$ le morphisme fonctoriel canonique du foncteur identique de \mathcal{A} dans le foncteur localisation L de la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$.

Pour tout objet M de \mathcal{A} , l'application : $N \rightarrow LN$ et l'application $N' \rightarrow \psi_M^{-1}(N')$ caractérisent des correspondances bijectives réciproques entre l'ensemble des sous-objets \mathcal{F} -clos dans M et l'ensemble des sous-objets \mathcal{F} -clos dans LM .

Soit \mathcal{C} la sous-catégorie localisante de \mathcal{A} associée à la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ et soit \mathcal{M} la mono-sous-catégorie de \mathcal{A} associée à la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ [10].

Pour simplifier les notations, le morphisme canonique : $\psi_M : M \rightarrow LM$ sera provisoirement noté : $u : M \rightarrow M' = LM$.

Tout d'abord, il sera supposé que u est un monomorphisme, c'est-à-dire que $\mathcal{F}M = 0$.

Pour tout sous-objet N' de M' (et à fortiori de M), la caractérisation d'une \mathcal{C} -enveloppe donnée dans la démonstration de la proposition 4 (p. 372) de [3], montre que le localisé LN' de N' est l'image réciproque dans M' du sous-objet $\mathcal{F}(M'/N')$ de M'/N' .

Il en résulte en particulier que pour que N' soit \mathcal{F} -clos dans M' , il faut et il suffit que $N' = LN'$.

Pour tout sous-objet N de M , puisque $(LN)/_N$ est un objet de \mathcal{C} [3], le sous-objet $(M \cap LN)/_N$ est également un objet de \mathcal{C} . Si N est \mathcal{F} -clos dans M , ce qui signifie que $M/_N$ est un objet de \mathcal{A} , le sous-objet $(M \cap LN)/_N$ est également un objet de \mathcal{A} et puisqu'il appartient aussi à \mathcal{C} , il est nul, ce qui entraîne $N = M \cap LN$. Réciproquement, si un sous-objet N de M vérifie $N = M \cap LN$, ce qui entraîne la relation :

$M/_N = M/(M \cap LN) = (M + LN)/_{LN} \subset M'/_N$, la relation $\mathcal{F}(M'/_N) = 0$, qui résulte de la caractérisation de LN , montre alors que $\mathcal{F}(M/_N) = 0$, c'est-à-dire que N est \mathcal{F} -clos dans M .

Ainsi, pour qu'un sous-objet N de M soit \mathcal{F} -clos dans M , il faut et il suffit que N vérifie : $N = M \cap LN$.

Il en résulte alors que pour tout sous-objet N de M qui est \mathcal{F} -clos dans M , le sous-objet LN de M' est \mathcal{F} -clos dans M' et de plus : $u^{-1}(LN) = M \cap LN = N$.

Soit N' un sous-objet de M' qui est \mathcal{F} -clos dans M' , c'est-à-dire qui vérifie : $N' = LN'$. En posant $N = M \cap N'$, puisque M'_M est un objet de \mathcal{C} , la relation :

$N'_N = N'/(M \cap N') = (N' + M)/_M \subset M'_M$ montre que N'_N est un objet de \mathcal{C} , ce qui entraîne $N = LN'$. Il en résulte la relation : $N = M \cap LN$ qui montre que N est \mathcal{F} -clos dans M et la relation : $N' = LN$.

Ainsi, pour tout sous-objet N' de M' qui est \mathcal{F} -clos dans M' , le sous-objet $u^{-1}(N') = M \cap N'$ de M est \mathcal{F} -clos dans M et de plus : $L(u^{-1}(N')) = N'$.

La conclusion du lemme 5-5 est donc démontrée lorsque u est un monomorphisme.

Pour passer au cas général, il convient de remarquer que si N est un sous-objet de M qui est \mathcal{F} -clos dans M , la suite exacte :

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$$

donne la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{F}N \rightarrow \mathcal{F}M \rightarrow \mathcal{F}(M/N)$$

dans laquelle $\mathcal{F}(M/N) = 0$, ce qui entraîne $\mathcal{F}M \subset N$ et par suite : $M/N = u(M)/u(N)$.

Il en résulte que l'application : $N \rightarrow u(N)$ et l'application : $N'' \rightarrow u^{-1}(N'')$ caractérisent des correspondances bijectives réciproques entre l'ensemble des sous-objets N qui sont \mathcal{F} -clos dans M et l'ensemble des sous-objets N'' qui sont \mathcal{F} -clos dans $u(M)$.

En remarquant que $LN = L(u(N))$ pour tout sous-objet N de M et que $u^{-1}(N') = u^{-1}(N' \cap u(M))$ pour tout sous-objet N' de M' , la combinaison des deux résultats précédents entraîne immédiatement la conclusion du lemme 5-5 dans le cas général.

5-6. COROLLAIRE : Etant donné un anneau (non nécessairement commutatif) A , soit $\mathcal{A} = \text{Mod } A$ la catégorie des A -modules et soit $\tilde{\mathcal{L}}$ une localisation dans \mathcal{A} , caractérisée par un ensemble topologisant et idempo-

tent \mathcal{F} d'idéaux (à gauche) de A .

Soit $\rho : A \rightarrow A'$ l'homomorphisme canonique de A dans l'anneau localisé. $A' = A_{\mathcal{F}}$ de A pour la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$, soit $\mathcal{A}' = \text{Mod } A'$ la catégorie des A' -modules, soit $\tilde{\mathcal{L}}' = \rho(\tilde{\mathcal{L}})$ la localisation dans \mathcal{A}' , image par ρ de la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ et soit $\mathcal{F}' = \rho(\mathcal{F})$ l'ensemble topologisant et idempotent d'idéaux (à gauche) de A , image par ρ de l'ensemble \mathcal{F} .

Alors, l'application : $I \rightarrow I_{\mathcal{F}}$ et l'application : $I' \rightarrow \rho^{-1}(I)$ caractérisent des correspondances bijectives réciproques entre l'ensemble des idéaux (à gauche) I de A qui sont \mathcal{F} -clos dans A et l'ensemble des idéaux (à gauche) I' de A' qui sont \mathcal{F}' -clos dans A' .

Pour tout objet M' de \mathcal{A}' et pour tout élément $y \in M'$, l'annulateur dans A de y considéré comme un élément de $\rho_* M'$ est l'image réciproque par ρ de l'annulateur dans A' de y considéré comme un élément de M' . Puisque le lemme 5-2 montre que $I' \in \mathcal{F}'$ équivaut à $\rho^{-1}(I') \in \mathcal{F}$, il en résulte la relation :

$$\mathcal{F} \rho_* M' = \rho_* \mathcal{F}' M' .$$

Pour tout objet M' de \mathcal{A}' et pour tout sous-objet N' de M' , cette relation et l'exactitude du foncteur ρ_* montrent

que pour que N' soit \mathcal{F}' -clos dans M' , il faut et il suffit que $\rho_* N'$ soit \mathcal{F} -clos dans $\rho_* M'$.

La relation : $\rho_*(M_{\mathcal{F}}) = LM$ pour tout objet M de \mathcal{A} , montre alors que le corollaire 5-6 résulte du lemme 5-5.

5-7. COROLLAIRE : Avec les données et les notations du corollaire 5-6, si l'anneau A est commutatif (ce qui entraîne que l'anneau $A' = A_{\mathcal{F}'}$ est commutatif), alors, l'application $\mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}_{\mathcal{F}}$ et l'application $\mathfrak{p}' \rightarrow \rho^{-1}(\mathfrak{p}')$ caractérisent des correspondances bijectives réciproques entre l'ensemble des idéaux premiers \mathfrak{p} de A qui n'appartiennent pas à \mathcal{F} et l'ensemble des idéaux premiers \mathfrak{p}' de A' qui n'appartiennent pas à \mathcal{F}' .

Si \mathfrak{p} est un idéal premier de A , l'annulateur de tout élément non nul du A -module A/\mathfrak{p} est égal à \mathfrak{p} , ce qui entraîne que $\mathcal{F}(A/\mathfrak{p}) = A/\mathfrak{p}$ si $\mathfrak{p} \in \mathcal{F}$ et que $\mathcal{F}(A/\mathfrak{p}) = 0$ si $\mathfrak{p} \notin \mathcal{F}$. En particulier, pour que \mathfrak{p} soit \mathcal{F} -clos dans A , il faut et il suffit que $\mathfrak{p} \notin \mathcal{F}$. De même, pour qu'un idéal premier \mathfrak{p}' de A' soit \mathcal{F}' -clos dans A' , il faut et il suffit que $\mathfrak{p}' \notin \mathcal{F}'$.

Compte tenu du corollaire 5-6, il en résulte que pour démontrer le corollaire 5-7, tout revient à montrer que les deux correspondances transforment un idéal premier en un idéal premier.

Il est bien connu que pour tout idéal premier \mathfrak{p}' de A' , l'idéal $\mathfrak{p} = \rho^{-1}(\mathfrak{p}')$ de A est premier.

La construction classique d'un anneau localisé permet de montrer que le localisé d'un anneau intègre est un anneau intègre. Puisque le foncteur localisation est exact à gauche, pour tout idéal premier \mathfrak{p} de A , la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathfrak{p} \rightarrow A \rightarrow A/\mathfrak{p} \rightarrow 0$$

donne une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{F}} \rightarrow A_{\mathcal{F}} \rightarrow (A/\mathfrak{p})_{\mathcal{F}}$$

qui montre que $A_{\mathcal{F}}/\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ est un sous-anneau de l'anneau intègre $(A/\mathfrak{p})_{\mathcal{F}}$. Si $\mathfrak{p} \notin \mathcal{F}$, ce qui entraîne $\mathcal{P}_{\mathcal{F}} \neq A_{\mathcal{F}}$, il en résulte que $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ est un idéal premier de $A' = A_{\mathcal{F}}$, ce qui achève la démonstration.

5-8. LEMME : Etant donnés deux anneaux commutatifs A et A' , si $X = \text{Spec}(A)$ et $X' = \text{Spec}(A')$ sont les spectres premiers de A et de A' munis de la topologie spectrale, si $\mathcal{A} = \text{Mod } A$ et $\mathcal{A}' = \text{Mod } A'$ sont les catégories des A -modules et des A' -modules et si $\rho : A \rightarrow A'$ est un homomorphisme d'anneaux, soit $\varphi : X' \rightarrow X$ l'application continue déterminée par ρ .

Alors, pour tout ouvert U de X , en posant $U' = \varphi^{-1}(U)$, la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_{U'}$ dans \mathcal{A}' , associée à l'ouvert U' de X , est l'image par ρ de la

localisation $\tilde{\mathcal{L}}_U$ dans \mathcal{A} , associée à l'ouvert U de X .

Soient \mathcal{F}_U et \mathcal{F}'_U , les ensembles topologisants et idempotents associés aux localisations $\tilde{\mathcal{L}}_U$ et $\tilde{\mathcal{L}}'_U$, et soit $\mathcal{F}' = \rho(\mathcal{F}_U)$ l'ensemble topologisant et idempotent associé à la localisation $\tilde{\mathcal{L}}' = \rho(\tilde{\mathcal{L}}_U)$ image par ρ de la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_U$.

Pour tout idéal I de A , en posant $\bar{\rho}(I) = A'\rho(I)$, la définition de l'application continue $\varphi: X' \rightarrow X$ entraîne la relation :

$$\varphi^{-1}(D(I)) = D(\bar{\rho}(I)) .$$

D'après le lemme 5-2, l'ensemble $\mathcal{F}' = \rho(\mathcal{F}_U)$ est constitué par les idéaux I' de A' dont l'image réciproque $\rho^{-1}(I')$ appartient à \mathcal{F}_U .

En particulier, pour tout $I' \in \mathcal{F}'$, il existe $I \in \mathcal{F}_U$ tel que $\rho(I) \subset I'$, ce qui est équivalent à $\bar{\rho}(I) \subset I'$. Puisque la condition $I \in \mathcal{F}_U$ se traduit par la relation : $U \subset D(I)$, il en résulte la relation :

$$U' = \varphi^{-1}(U) \subset \varphi^{-1}(D(I)) = D(\bar{\rho}(I)) \subset D(I')$$

qui entraîne $I' \in \mathcal{F}'_U$.

Ainsi, les ensembles \mathcal{F}' et \mathcal{F}'_U , vérifient la relation :

$$\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}'_U .$$

Si cette inclusion n'est pas une égalité, il existe un idéal I'' de A' vérifiant :

$$I'' \in \mathfrak{F}'_U, \quad \text{et} \quad I'' \notin \mathfrak{F}'$$

c'est-à-dire :

$$U' \subset D(I'') \quad \text{et} \quad \rho^{-1}(I'') \notin \mathfrak{F}'_U$$

ou encore :

$$U' \subset D(I'') \quad \text{et} \quad U \not\subset D(\rho^{-1}(I'')) .$$

L'idéal $I' = r(I'')$, racine de l'idéal I'' , vérifie :

$$\rho^{-1}(I') = \rho^{-1}(r(I'')) = r(\rho^{-1}(I''))$$

ce qui entraîne : $D(I'') = D(I')$ et $D(\rho^{-1}(I'')) = D(\rho^{-1}(I'))$.

Ainsi, il existe un idéal I' de A' , tel que $I' = r(I')$ et $\rho^{-1}(I') = r(\rho^{-1}(I'))$, et vérifiant :

$$U' \subset D(I') \quad \text{et} \quad U \not\subset D(\rho^{-1}(I')) .$$

Soit α un idéal de A , vérifiant $U = D(\alpha)$ et par suite :

$$U' = \varphi^{-1}(U) = \varphi^{-1}(D(\alpha)) = D(\bar{\rho}(\alpha))$$

La condition $U \not\subset D(\rho^{-1}(I'))$ entraîne $\alpha \not\subset \rho^{-1}(I')$ et par suite $\rho(\alpha) \not\subset I'$ et $\bar{\rho}(\alpha) \not\subset I'$. Puisque l'idéal I' est égal à sa racine, il existe donc un idéal premier \mathfrak{p}' de A' , vérifiant $\bar{\rho}(\alpha) \not\subset \mathfrak{p}'$ et $I' \subset \mathfrak{p}'$; c'est-à-dire $\mathfrak{p}' \in D(\bar{\rho}(\alpha)) = U'$ et $\mathfrak{p}' \notin D(I')$, ce qui est absurde en vertu de la condition : $U' \subset D(I')$. Ainsi, il en résulte l'égalité :

$$\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}'_U,$$

ce qui achève la démonstration.

5-9. THEOREME : Etant donné un anneau commutatif A , soit $X = \text{Spec}(A)$ le spectre premier de A muni de la topologie spectrale et soit $\mathcal{A} = \text{Mod } A$ la catégorie des A -modules.

Pour tout ouvert U de l'espace topologique X , soit $\tilde{\mathcal{L}}_U$ la localisation dans \mathcal{A} , associée à l'ouvert U de X et caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent \mathcal{F}_U , soit $\rho = \psi_A^U : A \rightarrow A'$ l'homomorphisme canonique de A dans l'anneau localisé $A' = A_{\mathcal{F}_U}$ de A pour la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_U$, soit $X' = \text{Spec}(A')$ le spectre premier de A' muni de la topologie spectrale et soit $\varphi : X' \rightarrow X$ l'application continue déterminée par l'homomorphisme ρ .

Alors, l'application continue $\varphi : X' \rightarrow X$ induit un homéomorphisme w de l'ouvert $U' = \varphi^{-1}(U)$ de X' sur l'ouvert U de X .

Soit $\mathcal{A}' = \text{Mod } A'$ la catégorie des A' -modules. D'après le lemme 5-8, la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_U$, dans \mathcal{A}' , associée à l'ouvert $U' = \varphi^{-1}(U)$ de X' et caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F}_{U'}$, est l'image par ρ de la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_U$ dans \mathcal{A} , associée à l'ouvert U de X . Comme les idéaux premiers \mathfrak{p} de A qui n'appartiennent pas à \mathcal{F}_U sont les éléments de l'ouvert U de X et comme les idéaux premiers \mathfrak{p}' de A' qui n'appartiennent pas à $\mathcal{F}_{U'}$, sont les éléments de l'ouvert $U' = \varphi^{-1}(U)$

de X' , le corollaire 5-7 montre que l'application $\rho' \rightarrow \rho^{-1}(\rho') = \varphi(\rho')$ caractérise une correspondance bijective de $U' = \varphi^{-1}(U)$ sur U .

Ainsi, l'application continue $\varphi : X' \rightarrow X$ induit une application continue bijective w de l'ouvert $U' = \varphi^{-1}(U)$ de X' sur l'ouvert U de X , caractérisée par la condition : $w(\rho') = \varphi(\rho') = \rho^{-1}(\rho')$ pour tout $\rho' \in U'$ et dont l'application inverse w^{-1} est caractérisée par la condition : $w^{-1}(\rho) = \rho_{\mathcal{F}_U}$ pour tout $\rho \in U$.

Tout revient à montrer que w est un homéomorphisme.

Pour tout ouvert U'_0 de U' , il existe au moins un idéal \mathcal{A}'_0 de A' tel que : $U'_0 = U' \cap D(\mathcal{A}'_0)$. En posant :

$$Y' = U' - U_0$$

tout $\rho' \in Y'$ vérifie $\rho' \in U'$ et $\rho' \notin D(\mathcal{A}'_0)$, c'est-à-dire : $\mathcal{A}'_0 \subset \rho'$. L'idéal $\mathcal{A}' = \bigcap_{\rho' \in Y'} \rho'$ de A' , vérifie donc

$\mathcal{A}'_0 \subset \mathcal{A}'$ et par suite : $D(\mathcal{A}'_0) \subset D(\mathcal{A}')$. Puisque tout $\rho' \in Y'$ vérifie naturellement $\rho' \notin D(\mathcal{A}')$, il en résulte la relation :

$$(1) \quad U'_0 = U' \cap D(\mathcal{A}'_0) = U' \cap D(\mathcal{A}')$$

qui entraîne la caractérisation :

$$(1') \quad Y' = \{ \rho' \in U' ; \mathcal{A}' \subset \rho' \} .$$

Puisque les éléments $\rho' \in Y'$ sont des idéaux premiers n'appartenant pas à \mathcal{F}_U , ils sont \mathcal{F}_U -clos dans A'

et il en résulte facilement que l'idéal $\mathfrak{a}' = \bigcap_{\mathfrak{p}' \in Y'} \mathfrak{p}'$ est \mathfrak{S}_U -clos dans A' . Le corollaire 5-6 entraîne alors que l'idéal $\mathfrak{a} = \rho^{-1}(\mathfrak{a}')$ de A , vérifie : $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}_{\mathfrak{S}_U}$.

L'ouvert U_0 de U caractérisé par :

$$(2) \quad U_0 = U \cap D(\mathfrak{a})$$

détermine la partie Y de U définie par :

$$Y = U - U_0$$

et elle admet la caractérisation :

$$(2') \quad Y = \{ \mathfrak{p} \in U ; \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \} .$$

Pour tout $\mathfrak{p}' \in Y'$, la relation (1') entraîne $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{p}'$, ce qui implique $\mathfrak{a} = \rho^{-1}(\mathfrak{a}') \subset \rho^{-1}(\mathfrak{p}')$ et la relation (2') montre que l'élément :

$$\mathfrak{p} = \varphi(\mathfrak{p}') = w(\mathfrak{p}') = \rho^{-1}(\mathfrak{p}') \quad \text{vérifie } \mathfrak{p} \in Y .$$

Ainsi :

$$(3) \quad w(Y') \subset Y .$$

Pour tout $\mathfrak{p} \in Y$, la relation (2') entraîne $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, ce qui implique $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}_{\mathfrak{S}_U} \subset \mathfrak{p}_{\mathfrak{S}_U}$ et la relation (1') montre que l'élément : $\mathfrak{p}' = w^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}_{\mathfrak{S}_U}$ vérifie $\mathfrak{p}' \in Y'$. Ainsi :

$$(4) \quad w^{-1}(Y) \subset Y' .$$

Puisque w est bijective, les relations (3) et (4) entraînent $w(Y') = Y$ et par suite :

$$(5) \quad w(U'_0) = U_0 .$$

La relation (5) montre que l'application continue bijective w de U' sur U est ouverte, c'est-à-dire que w est un homéomorphisme de U' sur U , induit par l'application continue $\varphi : X' \rightarrow X$, ce qui achève la démonstration.

6 - OUVERTS QUASI-COMPACTS DES SCHEMAS AFFINES.

6-1 - Hypothèses et notations. Etant donné un anneau commutatif A , soit (X, \mathcal{O}_X) le schéma affine associé à A , pour lequel $X = \text{Spec}(A)$ est le spectre premier de A muni de la topologie spectrale et $\mathcal{O}_X = \tilde{A}$ le faisceau structural vérifiant en particulier : $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(X, \tilde{A})$

Etant donné un ouvert quasi-compact U de X , soit (U, \mathcal{O}_U) le préschéma induit sur U par le schéma affine (X, \mathcal{O}_X) .

L'anneau A' des sections du faisceau structural $\mathcal{O}_X = \tilde{A}$, au-dessus de l'ouvert quasi-compact U de X est défini par :

$$A' = \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \Gamma(U, \tilde{A})$$

et la restriction à U détermine un homomorphisme canonique d'anneaux :

$$\rho : A \rightarrow A'$$

Soient $\mathcal{A} = \text{Mod } A$ et $\mathcal{A}' = \text{Mod } A'$ les catégories de A -modules et de A' -modules.

Soit \mathcal{B} la catégorie des \mathcal{O}_X -Modules quasi-cohérents et soit Γ la restriction à \mathcal{B} du foncteur sections $\Gamma(X, \cdot)$ défini sur la catégorie des \mathcal{O}_X -Modules.

Si \check{P} est le foncteur faisceau associé à l'anneau A , le théorème 4-3, le corollaire 4-4 et théorème (1-4-1) de [7] montrent que les foncteurs :

$$\check{P} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \quad \text{et} \quad \Gamma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$$

établissent une équivalence entre les catégories \mathcal{A} et \mathcal{B} , ce qui entraîne les relations :

$$(1) \quad \Gamma \check{P} = I_{\mathcal{A}} \quad \text{et} \quad (1') \quad \check{P} \Gamma = I_{\mathcal{B}} .$$

Soit \mathcal{B}'_U la catégorie des \mathcal{O}_U -Modules quasi-cohérents et soit $\Gamma' : \mathcal{B}'_U \rightarrow \mathcal{A}'$ la restriction à \mathcal{B}'_U du foncteur sections $\Gamma'(U, \cdot)$ défini sur la catégorie des \mathcal{O}_U -Modules.

Soit $\Gamma_U : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}'$ la restriction à \mathcal{B} du foncteur sections $\Gamma(U, \cdot)$ défini sur la catégorie des \mathcal{O}_X -Modules.

La proposition (9-4-2) de [7] montre que le morphisme quasi-compact j défini par l'injection canonique de U dans X , détermine un foncteur image directe : $j_* : \mathcal{B}'_U \rightarrow \mathcal{B}$ et un foncteur image réciproque : $j^* : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'_U$, vérifiant :

$$(2) \quad j^* j_* = I_{\mathcal{B}'_U}$$

Si $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}_U$ est la localisation dans \mathcal{A} , associée à l'ouvert U de X et caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F} = \mathcal{F}_U$ et si $\mathcal{L} = \mathcal{L}_U$ est la sous-catégorie locale de \mathcal{A} , associée à $\tilde{\mathcal{L}}_U$, soit S le foncteur canonique d'injection de \mathcal{L} dans \mathcal{A} et soit T le foncteur canonique de \mathcal{A} dans \mathcal{L} , tel que le foncteur localisation $L = L_U$ de la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$, soit caractérisé par :

$$(3) \quad L_U = ST \quad \text{et} \quad (3') \quad TS = I_{\mathcal{L}} .$$

Enfin, soit S_1 le foncteur utilisé dans la démonstration du lemme 5-3 .

6-2. LEMME : Avec les hypothèses précédentes, les données vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} (a) \quad \Gamma j_* &= \rho_* \Gamma' & (a') \quad \Gamma_U &= \Gamma' j^* \\ (b) \quad \rho_* \Gamma_U &= L_U \Gamma & (b') \quad \Gamma_U &= S_1 T \Gamma \\ (c) \quad L_U &= \Gamma j_* j^* \check{P} & (c') \quad j_* j^* &= \check{P} L_U \Gamma . \end{aligned}$$

Les relations (a) et (a') résultent immédiatement de la construction des foncteurs j_* et j^* [7] .

Pour tout objet M de \mathcal{A} , la définition du foncteur Γ_U entraîne la relation : $\Gamma_U \check{P}(M) = \check{P}(U, M)$. Puisque U est quasi-compact, le théorème 4-3 entraîne : $\check{P}(U, M) = P(U, M)$ et le corollaire 4-4 entraîne : $A' = \Gamma_U \check{P}(A) = P(U, A) = A_{\mathcal{F}}$. La partie (b)

du lemme 5-3 est donc applicable. La construction du foncteur préfaisceau P associé à A , implique alors la relation :

$$\Gamma_U \check{P}(M) = P(U, M) = S_1 TM$$

pour tout objet M de \mathcal{A} , ce qui entraîne les relations :

$$\Gamma_U \check{P} = S_1 T \quad \text{et} \quad \rho_* \Gamma_U \check{P} = \rho_* S_1 T = ST = L_U .$$

Par composition avec Γ , la relation (1') implique alors les relations (b') et (b).

Les relations (a), (a') et (b) entraînent la relation :

$$\Gamma j_* j^* \check{P} = \rho_* \Gamma' j^* \check{P} = \rho_* \Gamma_U \check{P} = L_U \Gamma \check{P}$$

et la relation (1) implique alors la relation (c).

Enfin, compte tenu des relations (1) et (1'), la relation (c) implique facilement la relation (c').

6-3. THEOREME : *Etant donné un schéma affine (X, \mathcal{O}_X) , associé à un anneau commutatif A , soit $\mathcal{A} = \text{Mod } A$ la catégorie des A -modules.*

Pour tout ouvert quasi-compact U de X , soit (U, \mathcal{O}_U) le préschéma induit sur U par le schéma affine (X, \mathcal{O}_X) .

Alors, la catégorie \mathcal{B}'_U des \mathcal{O}_U -Modules quasi-cohérents est équivalente à la sous-catégorie locale \mathcal{L}'_U de \mathcal{A} , déterminée par la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_U$ dans \mathcal{A} , associée à l'ouvert U de X .

De façon précise, avec les notations précédentes, cette équivalence est caractérisée par les foncteurs :

$$\lambda : \mathcal{B}'_U \rightarrow \mathcal{L}_U \quad \text{et} \quad \mu : \mathcal{L}_U \rightarrow \mathcal{B}'_U$$

définis par les relations :

$$\lambda = T \Gamma j_* \quad \text{et} \quad \mu = j^* \check{P} S .$$

La relation (c) du lemme 6-2 entraîne la relation :

$$\lambda \mu = T \Gamma j_* j^* \check{P} S = T L_U S$$

et les relations (3) et (3') impliquent alors :

$$\lambda \mu = I_{\mathcal{L}} .$$

La relation (3) entraîne la relation :

$$\mu \lambda = j^* \check{P} S T \Gamma j_* = j^* \check{P} L_U \Gamma j_*$$

et la relation (c') du lemme 6-2 et la relation (2) impliquent alors :

$$\mu \lambda = I_{\mathcal{B}'_U}$$

Les relations :

$$\lambda \mu = I_{\mathcal{L}} \quad \text{et} \quad \mu \lambda = I_{\mathcal{B}'_U}$$

montrent que λ et μ caractérisent une équivalence entre la catégorie \mathcal{B}'_U et la catégorie \mathcal{L}_U .

6-4. COROLLAIRE : Avec les données et les notations du théorème 6-3, en posant $A' = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, soit $\mathcal{A}' = \text{Mod } A'$ la catégorie des A' -modules et soit :

$$\rho : A \rightarrow A'$$

l'homomorphisme canonique d'anneaux déterminé par la restriction à l'ouvert U de X .

Alors, la catégorie \mathcal{B}'_U des \mathcal{O}_U -Modules quasi-cohérents est équivalente à la sous-catégorie locale \mathcal{L}' de \mathcal{A}' , déterminée par la localisation $\tilde{\mathcal{L}}'$ dans \mathcal{A}' , image par ρ de la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_U$ dans \mathcal{A} , associée à l'ouvert U de X .

De façon précise, avec les notations antérieures et en considérant le foncteur :

$$\check{P}'_U : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{B}'_U$$

défini par :

$$\check{P}'_U = j^* \check{P} \rho_*$$

cette équivalence est caractérisée par les foncteurs :

$$\lambda' : \mathcal{B}'_U \rightarrow \mathcal{L}' \quad \text{et} \quad \mu' : \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{B}'_U$$

définis par les relations :

$$\lambda' = T' \Gamma' \quad \text{et} \quad \mu' = \check{P}'_U S'$$

dans lesquelles S' est le foncteur canonique de \mathcal{L}' dans \mathcal{A}' et T' le foncteur canonique de \mathcal{A}' dans \mathcal{L}' , tel que le foncteur localisation L' de la localisa-

tion $\tilde{\mathcal{L}}'$, soit caractérisé par :

$$L' = S' T' \quad \text{avec} \quad T' S' = I_{\mathcal{L}'}$$

Puisque l'ouvert U de X est quasi-compact, le théorème 4-3 et le corollaire 4-4 montrent que l'anneau A' est le localisé de l'anneau A pour la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_U$ dans \mathcal{A} . Les conclusions de la partie (b) du lemme 5-3 sont donc applicables, compte tenu de la concordance des notations.

Comme les foncteurs :

$$\rho_0 : \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}_U \quad \text{et} \quad \rho_1 : \mathcal{L}_U \rightarrow \mathcal{L}'$$

caractérisent une équivalence entre la catégorie \mathcal{L}_U et la catégorie \mathcal{L}' , le théorème 6-3 entraîne que les foncteurs :

$$\lambda' = \rho_1 \lambda : \mathcal{B}_U' \rightarrow \mathcal{L}' \quad \text{et} \quad \mu' = \mu \rho_0 : \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{B}_U'$$

caractérisent une équivalence entre la catégorie \mathcal{B}_U' et la catégorie \mathcal{L}' .

Tout revient à démontrer les formules définissant les foncteurs λ' et μ' dans l'énoncé du corollaire 6-4.

La relation (a) du lemme 6-2 entraîne la relation :

$$\lambda' = \rho_1 \lambda = \rho_1 T \Gamma j_* = \rho_1 T \rho_* \Gamma'$$

et la relation (3) du lemme 5-3 implique alors :

$$\lambda' = T' \Gamma' .$$

La relation (1') du lemme 5-3 entraîne la relation :

$$\mu' = \mu \rho_0 = j^* \check{P} S \rho_0 = j^* \check{P} \rho_* S'$$

et la définition du foncteur \check{P}'_U implique alors :

$$\mu' = \check{P}'_U S'$$

ce qui achève la démonstration.

6-5. COROLLAIRE : Avec les données et les notations du corollaire 6-4, alors :

(a) le "foncteur \mathcal{O}_U -Module quasi-cohérent associé" :

$$\mu T = j^* \check{P} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}'_U$$

est exact et admet pour adjoint à droite le foncteur pleinement fidèle :

$$S \lambda = \rho_* \Gamma' : \mathcal{B}'_U \rightarrow \mathcal{A} .$$

En particulier, tout \mathcal{O}_U -Module quasi-cohérent G est déterminé par le A -module $\rho_* \Gamma' G = \rho_* \Gamma'(U, G)$ de ses sections au-dessus de U et pour qu'un objet M de \mathcal{A} soit le A -module des sections au-dessus de U , d'un \mathcal{O}_U -Module quasi-cohérent, il faut et il suffit que M soit un objet de la sous-catégorie locale \mathcal{L}_U de la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_U$ dans \mathcal{A} , associée à U .

(b) le foncteur " \mathcal{O}_U -Module quasi-cohérent associé" :

$$\mu' T' = \check{P}'_U : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{B}'_U$$

est exact et admet pour adjoint à droite le foncteur pleinement fidèle :

$$S' \lambda' = \Gamma' : \mathcal{B}'_U \rightarrow \mathcal{A}' .$$

En particulier, tout \mathcal{O}_U -Module cohérent G est déterminé par le A' -module $\Gamma'G = \Gamma'(U, G)$ de ses sections au-dessus de U et pour qu'un objet M' de \mathcal{A}' soit le A' -module des sections au-dessus de U , d'un \mathcal{O}_U -Module quasi-cohérent, il faut et il suffit que M' soit un objet de la sous-catégorie locale \mathcal{L}' de la localisation $\tilde{\mathcal{L}}'$ dans \mathcal{A}' , image par ρ de $\tilde{\mathcal{L}}'_U$.

Les relations (3) et (1) entraînent la relation :

$$\mu T = j^* \check{P} S T = j^* \check{P} L_U = j^* \check{P} L_U \Gamma \check{P}$$

et la relation (c') du lemme 6-2, implique alors :

$$\mu T = j^* j_* j^* \check{P}$$

et d'après la relation (2), il en résulte la relation :

$$\mu T = j^* \check{P}$$

La relation (3) entraîne la relation :

$$S \lambda = S T \Gamma j_* = L_U \Gamma j_*$$

et les relations (b) et (a') du lemme 6-2, impliquent alors :

$$S \lambda = \rho_* \Gamma_U j_* = \rho_* \Gamma' j^* j_*$$

et d'après la relation (2), il en résulte la relation :

$$S \lambda = \rho_* \Gamma' .$$

La démonstration du corollaire 6-4 a établi la relation :

$$\mu' = \mu \rho_0 .$$

La relation (1) du lemme 5-3 entraîne alors la relation :

$$\mu' T' = \mu \rho_0 T' = \mu T \rho_* .$$

La relation $\mu T = j^* \check{P}$ démontrée ci-dessus et la définition du foncteur \check{P}'_U impliquent donc la relation :

$$\mu' T' = \check{P}'_U .$$

La démonstration du corollaire 6-4 a établi la relation :

$$\lambda' = \rho_1 \lambda$$

et compte tenu de la relation : $\rho_0 \rho_1 = I_{\mathcal{L}}$, elle est équivalente à la relation :

$$\lambda = \rho_0 \lambda' .$$

La relation : $S_1 = S' \rho_1$ établie dans la démonstration du lemme 5-3, entraîne alors la relation :

$$S' \lambda' = S' \rho_1 \lambda = S_1 \lambda = S_1 \rho_0 \lambda' .$$

La relation : $\lambda' = T' \Gamma'$ du corollaire 6-4 entraîne donc

$$S' \lambda' = S_1 \rho_0 T' \Gamma'$$

et la relation (1) du lemme 5-3 et les relations (a), (b') et

(a') du lemme 6-2 impliquent la relation :

$$S' \lambda' = S_1 T \rho_* \Gamma' = S_1 T \Gamma j_* = \Gamma_U j_* = \Gamma' j^* j_* .$$

La relation (2) entraîne alors la relation :

$$S' \lambda' = \Gamma' .$$

Ces relations étant démontrées, il en résulte facilement les relations :

$$(S\lambda)(\mu T) = ST = L_U \quad \text{et} \quad (\mu T)(S\lambda) = \mu I_{\mathcal{L}} \lambda = \mu \lambda = I_{\mathcal{Q}'_U}$$

ainsi que les relations :

$$(S'\lambda')(\mu'T') = S'T' = L' \quad \text{et} \quad (\mu'T')(S'\lambda') = \mu'I_{\mathcal{L}',\lambda'} = \mu'\lambda' = I_{\mathcal{Q}'_U} .$$

Les affirmations complémentaires du corollaire 6-5, résultent alors immédiatement des propriétés générales d'une localisation.

6-6. LEMME : Etant donné un anneau (non nécessairement commutatif) A , soit $\mathcal{A} = \text{Mod } A$ la catégorie des A -modules (\tilde{a} gauche).

Etant données deux localisations $\tilde{\mathcal{L}}$ et $\tilde{\mathcal{L}}_0$ dans \mathcal{A} , si \mathcal{L} et \mathcal{L}_0 sont les sous-catégories locales de \mathcal{A} déterminées par $\tilde{\mathcal{L}}$ et $\tilde{\mathcal{L}}_0$, soient S et S_0 les foncteurs canoniques d'injection de \mathcal{L} dans \mathcal{A} et de \mathcal{L}_0 dans \mathcal{A} , et soient T et T_0 les foncteurs canoniques

de \mathcal{A} dans \mathcal{L} et de \mathcal{A} dans \mathcal{L}_0 tels que les foncteurs localisations L et L_0 des localisations $\tilde{\mathcal{L}}$ et $\tilde{\mathcal{L}}_0$ soient caractérisés par :

$$L = ST \quad \text{et} \quad L_0 = S_0 T_0$$

avec :

$$TS = I_{\mathcal{L}} \quad \text{et} \quad T_0 S_0 = I_{\mathcal{L}_0} .$$

Alors, si la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_0$ est plus fine que la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$, il existe des foncteurs uniques :

$$\sigma : \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L} \quad \text{et} \quad \tau : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_0$$

tels que :

$$S_0 = S \sigma \quad \text{et} \quad T_0 = \tau T .$$

De plus le foncteur pleinement fidèle σ est adjoint à droite au foncteur exact τ .

L'hypothèse entraîne que la sous-catégorie localisante \mathcal{C} de $\tilde{\mathcal{L}}$ est une sous-catégorie de la sous-catégorie localisante \mathcal{C}_0 de $\tilde{\mathcal{L}}_0$. Le corollaire 4-4 de [10] montre alors que \mathcal{L}_0 est une sous-catégorie pleine de \mathcal{L} , ce qui assure l'existence et l'unicité du foncteur pleinement fidèle σ vérifiant $S_0 = S \sigma$. Comme le foncteur exact T_0 s'annule sur \mathcal{C}_0 et par suite sur \mathcal{C} , puisque la catégorie \mathcal{L} est équivalente à la catégorie quotient \mathcal{A}/\mathcal{C} , les corollaires 2 et 3 (p. 368 et 369) de [3] montrent

qu'il existe un foncteur exact unique τ de \mathcal{L} dans \mathcal{L}_0 , vérifiant $T_0 = \tau T$.

Le foncteur S_0 étant un adjoint à droite au foncteur T_0 , il existe un isomorphisme fonctoriel canonique :

$$\text{Hom}_{\mathcal{L}_0} (T_0 S \cdot, \cdot) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{A}} (S \cdot, S_0 \cdot).$$

Puisque le foncteur S est pleinement fidèle, la relation $T_0 S = \tau TS = \tau I = \tau$ et la relation $S_0 = S\sigma$ donnent alors un isomorphisme fonctoriel :

$$\text{Hom}_{\mathcal{L}_0} (\tau \cdot, \cdot) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{L}} (\cdot, \sigma \cdot)$$

ce qui achève la démonstration.

6-7. LEMME : Etant donné un anneau (non nécessairement commutatif) A , soit $\mathcal{A} = \text{Mod } A$ la catégorie des A -modules (à gauche).

Etant donnée une localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ dans \mathcal{A} , caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent \mathcal{F} , soit

$$\rho : A \rightarrow A'$$

l'homomorphisme canonique de A dans l'anneau localisé $A' = A_{\mathcal{F}}$ de A pour la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$, soit \mathcal{A}' la catégorie des A' -modules (à gauche) et soit F le foncteur de \mathcal{A} dans \mathcal{A}' tel que le foncteur localisation canonique L de $\tilde{\mathcal{L}}$ soit caractérisé par :

$$L = \rho_* F.$$

Pour toute localisation $\tilde{\mathcal{L}}_0$ dans \mathcal{A} , plus fine que la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ et caractérisée par un ensemble topologisant et idempotent \mathcal{F}_0 , soit $\tilde{\mathcal{L}}'_0 = \rho(\tilde{\mathcal{L}}_0)$ la localisation dans \mathcal{A}' , image par ρ de $\tilde{\mathcal{L}}_0$ et caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F}'_0 = \rho(\mathcal{F}_0)$, image par ρ de \mathcal{F}_0 , alors :

(a) L'anneau localisé $A'_{\mathcal{F}'_0}$ de A' pour $\tilde{\mathcal{L}}'_0$ coïncide avec l'anneau localisé $A_{\mathcal{F}_0}$ de A pour $\tilde{\mathcal{L}}_0$ et les homomorphismes canoniques :

$$\rho' : A' \rightarrow A'' = A'_{\mathcal{F}'_0} \quad \text{et} \quad \rho'' : A \rightarrow A'' = A_{\mathcal{F}_0}$$

vérifient la relation :

$$\rho'' = \rho' \rho .$$

(b) Si $\mathcal{A}'' = \text{Mod } A''$ est la catégorie des A'' -modules (à gauche) et si F_0 et F'_0 sont les foncteurs de \mathcal{A} dans \mathcal{A}'' et de \mathcal{A}' dans \mathcal{A}'' tels que les foncteurs localisations L_0 et L'_0 de $\tilde{\mathcal{L}}_0$ et $\tilde{\mathcal{L}}'_0$ soient caractérisés par :

$$L_0 = \rho'_* F_0 \quad \text{et} \quad L'_0 = \rho'_* F'_0$$

alors :

$$F_0 = F'_0 F \quad \text{et} \quad F'_0 = F_0 \rho_*$$

Il est immédiat que la localisation $\tilde{\mathcal{L}}'_0 = \rho(\tilde{\mathcal{L}}_0)$ est plus fine que la localisation $\tilde{\mathcal{L}}'_0 = \rho(\tilde{\mathcal{L}})$ dans \mathcal{A}' , image par ρ de $\tilde{\mathcal{L}}$. Le lemme 6-6 est donc applicable et avec des notations évidentes déduites de celles du lemme 6-6, il existe des foncteurs

uniques :

$$\sigma' : \mathcal{L}'_0 \rightarrow \mathcal{L}' \quad \text{et} \quad \tau' : \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}'_0$$

tels que :

$$S'_0 = S' \sigma' \quad \text{et} \quad T'_0 = \tau' T' .$$

De plus, le foncteur pleinement fidèle σ' est adjoint à droite au foncteur exact τ' .

Avec les notations du lemme 5-3 et de sa démonstration, le foncteur F introduit dans le lemme 6-7 est caractérisé par :

$$F = S_1 T = S' \rho_1 T .$$

Le foncteur T_0 de \mathcal{A} dans \mathcal{L}'_0 défini par :

$$T_0 = T'_0 F$$

vérifie donc :

$$T_0 = \tau' T' S' \rho_1 T$$

et comme $T'S' = I_{\mathcal{L}'}$, il en résulte la relation :

$$T_0 = \tau' \rho_1 T .$$

Compte tenu du lemme 6-6, cette relation montre que le foncteur T_0 est exact et admet pour adjoint à droite, le foncteur pleinement fidèle S_0 de \mathcal{L}'_0 dans \mathcal{A} défini par :

$$S_0 = S \rho_0 \sigma' .$$

Soient \mathcal{C}_0 et \mathcal{C}'_0 les sous-catégories localisantes de \mathcal{L}'_0 et de \mathcal{L}'_0 .

Pour tout objet M de \mathcal{A} , la condition $T_0 M = 0$ signifie que $FM = S' \rho_1 TM$ est un objet de \mathcal{C}'_0 , c'est-à-dire que $\rho_* S' \rho_1 TM$ est un objet de \mathcal{C}_0 et d'après le lemme 5-3 cette condition signifie que STM est un objet de \mathcal{C}_0 . Comme la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_0$ est plus fine que la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$, il est facile de vérifier que pour que STM soit un objet de \mathcal{C}_0 , il faut et il suffit que M soit un objet de \mathcal{C}_0 .

Ainsi, la sous-catégorie localisante \mathcal{C}_0 est le noyau du foncteur T_0 .

La proposition 5 (p. 374) de [3] montre alors que le foncteur T_0 induit une équivalence entre la catégorie quotient $\mathcal{A}/\mathcal{C}_0$ et la catégorie \mathcal{L}'_0 . De plus, le foncteur localisation L_0 vérifie :

$$L_0 = S_0 T_0 .$$

Il en résulte en particulier que l'anneau localisé $A_{\mathcal{F}'_0}$ de A pour $\tilde{\mathcal{L}}_0$ est l'opposé de l'anneau des endomorphismes de l'objet $T_0 A = T'_0 FA$. Comme $FA = A'$, l'anneau localisé $A'_{\mathcal{F}'_0}$ de A' pour $\tilde{\mathcal{L}}_0$ est l'opposé de l'anneau des endomorphismes de l'objet $T'_0 A'$ et par suite :

$$A_{\mathcal{F}'_0} = A'' = A'_{\mathcal{F}'_0} .$$

Il est alors immédiat que les homomorphismes canoniques

ρ' et ρ'' vérifient :

$$\rho'' = \rho' \rho .$$

En introduisant la localisation $\tilde{\mathcal{L}}''_0 = \rho'(\tilde{\mathcal{L}}'_0)$ dans \mathcal{A}'' , image par ρ' de $\tilde{\mathcal{L}}'_0$, avec des notations évidentes analogues à celles du lemme 5-3, les résultats précédents montrent que le foncteur F'_0 de \mathcal{A}' dans \mathcal{A}'' est caractérisé par :

$$F'_0 = S'' \rho'_1 T'_0 .$$

et que le foncteur F_0 de \mathcal{A} dans \mathcal{A}'' est caractérisé par :

$$F_0 = S'' \rho'_1 T_0 .$$

La relation : $T_0 = T'_0 F$ entraîne alors la relation :

$$F_0 = F'_0 F .$$

La relation : $T'_0 = \tau' T'$ et le lemme 5-3 entraînent la relation :

$$T'_0 = \tau' T' = \tau' \rho_1 T \rho_*$$

et la relation $T_0 = \tau' \rho_1 T$ entraîne alors la relation :

$$T'_0 = T_0 \rho_* .$$

Il en résulte la relation :

$$F'_0 = F_0 \rho_*$$

ce qui achève la démonstration.

6-8. THEOREME : Etant donné un schéma affine (X, \mathcal{O}_X) , associé à un anneau commutatif A , pour tout ouvert quasi-compact U de X , en posant $A' = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ soit :

$$\rho : A \rightarrow A'$$

l'homomorphisme canonique d'anneaux déterminé par la restriction à l'ouvert U de X et si $(X', \mathcal{O}'_{X'})$ est le schéma affine, associé à l'anneau A' , soit

$$\varphi : X' \rightarrow X$$

l'application continue caractérisée par l'homomorphisme ρ .

En posant $U' = \varphi^{-1}(U)$, soient (U, \mathcal{O}_U) et $(U', \mathcal{O}'_{U'})$ les préschémas induits sur U et U' par les schémas affines (X, \mathcal{O}_X) et $(X', \mathcal{O}'_{X'})$. Alors :

(a) L'ouvert $U' = \varphi^{-1}(U)$ de X' est un ouvert quasi-compact, partout dense dans X' et l'homomorphisme canonique d'anneaux

$$\rho' : A' = \Gamma(X', \mathcal{O}'_{X'}) \rightarrow \Gamma(U', \mathcal{O}'_{U'})$$

déterminé par la restriction à l'ouvert U' de X' est un isomorphisme.

(b) L'application continue $\varphi : X' \rightarrow X$ induit un homéomorphisme w de l'ouvert U' de X' sur l'ouvert U de X , tel que :

$$\mathcal{O}_U = w_*(\mathcal{O}'_{U'}) .$$

Autrement dit, w caractérise un isomorphisme de préschémas :

$$W : (U', \mathcal{O}_{U'}) \rightarrow (U, \mathcal{O}_U) .$$

Soit $\mathcal{A} = \text{Mod } A$ la catégorie des A -modules et soit $\mathcal{A}' = \text{Mod } A'$ la catégorie des A' -modules. Soit $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}_U$ la localisation dans \mathcal{A} , associée à l'ouvert quasi-compact U de X et caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F} = \mathcal{F}_U$.

D'après le théorème 4-3 et le corollaire 4-4, l'anneau $A' = \Gamma(U, \mathcal{O}_{X'})$ est le localisé $A_{\mathcal{F}}$ de l'anneau A pour la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ et l'homomorphisme canonique ρ coïncide avec l'homomorphisme ψ_A^U . Le théorème 5-9 montre donc que l'application continue $\varphi : X' \rightarrow X$ induit un homéomorphisme w de l'ouvert $U' = \varphi^{-1}(U)$ de X' sur l'ouvert U de X .

Pour tout ouvert U_0 de U , c'est-à-dire pour tout ouvert U_0 de X tel que $U_0 \subset U$, en posant $U'_0 = w^{-1}(U_0) = \varphi^{-1}(U_0)$, soit $\tilde{\mathcal{L}}'_0 = \tilde{\mathcal{L}}_{U_0}$ la localisation dans \mathcal{A} associée à l'ouvert U_0 de X et caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F}'_0 = \mathcal{F}_{U_0}$ et soit $\tilde{\mathcal{L}}'_0 = \tilde{\mathcal{L}}_{U'_0}$ la localisation dans \mathcal{A}' associée à l'ouvert U'_0 de X' et caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F}'_0 = \mathcal{F}_{U'_0}$. D'après le lemme 5-8, la localisation $\tilde{\mathcal{L}}'_0$ dans \mathcal{A}' est l'image par ρ de la localisation $\tilde{\mathcal{L}}'_0$ dans \mathcal{A} .

Puisque la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_0$ est plus fine que la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$, le lemme 6-7 entraîne la relation :

$$F_0 M = F'_0(FM)$$

pour tout objet M de \mathcal{A} .

Si l'ouvert U_0 est quasi-compact (par exemple si U_0 est un ouvert affine spécial) le théorème 4-3 et le corollaire 4-4 donnent les relations :

$$\Gamma(U_0, \tilde{M}) = F_0 M$$

et

$$\Gamma'(U'_0, \tilde{FM}) = F'_0(FM)$$

qui entraînent donc :

$$\Gamma(U_0, \tilde{M}) = \Gamma'(U'_0, \tilde{FM}) .$$

Si j^* et j'^* sont les foncteurs images réciproques déterminés par les morphismes de préschémas j et j' associés aux injections canoniques de U dans X et de U' dans X' , il en résulte les relations :

$$\Gamma(U_0, j^* \tilde{M}) = \Gamma'(U'_0, j'^* \tilde{FM})$$

pour tout ouvert quasi-compact U_0 de U .

D'après la définition du foncteur image directe w_* , la relation $U'_0 = w^{-1}(U_0)$ entraîne :

$$\Gamma(U_0, w_* j'^* \tilde{FM}) = \Gamma'(U'_0, j'^* \tilde{FM})$$

et il en résulte donc les relations :

$$\Gamma(U_0, j^* \tilde{M}) = \Gamma(U_0, w_* j'^* \tilde{FM})$$

valables pour tout ouvert quasi-compact U_0 de U .

Puisque $j^* \tilde{M}$ et $w_* j'^* \tilde{FM}$ sont des faisceaux sur U et que tout ouvert de U admet un recouvrement par des ouverts quasi-compacts, les relations :

$$\Gamma(U_0, j^* \tilde{M}) = \Gamma(U_0, w_* j'^* \tilde{FM})$$

restent valables pour tout ouvert U_0 de U , ce qui entraîne la relation :

$$(1) \quad j^* \tilde{M} = w_* j'^* \tilde{FM} .$$

En particulier, puisque $FA = A'$, cette relation entraîne

$$j^* \tilde{A} = w_* j'^* \tilde{A}'$$

c'est-à-dire la relation :

$$(2) \quad \mathcal{O}_U = w_* (\mathcal{O}_{U'}) .$$

Il en résulte que l'homéomorphisme w de U' sur U et le morphisme identique de \mathcal{O}_U sur $w_* (\mathcal{O}_{U'})$ caractérisent bien un isomorphisme de préschémas :

$$W : (U', \mathcal{O}_{U'}) \rightarrow (U, \mathcal{O}_U)$$

ce qui achève la démonstration de la partie (b).

Avec les notations du lemme 6-7, pour tout ouvert quasi-compact U_0 de U , l'homomorphisme canonique :

$$\rho' : A' \rightarrow A'' = A'_{\mathcal{F}'_0}$$

est l'homomorphisme canonique, de l'anneau :

$$A' = \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \Gamma'(X', \mathcal{O}'_{X'})$$

dans l'anneau :

$$\Gamma(U_0, \mathcal{O}_X) = A_{\mathcal{F}'_0} = A'' = A'_{\mathcal{F}'_0} = \Gamma'(U'_0, \mathcal{O}'_{X'})$$

déterminé par la restriction à l'ouvert U' de X' .

En particulier, si $U_0 = U$, ce qui entraîne $U'_0 = U'$, il en résulte que l'homomorphisme canonique :

$$\rho' : A' = \Gamma'(X', \mathcal{O}'_{X'}) \rightarrow \Gamma'(U', \mathcal{O}'_{X'})$$

est un isomorphisme.

Il convient de remarquer que ce résultat exprime que l'anneau A' coïncide avec l'anneau localisé $A'_{\mathcal{F}'}$, de A' pour la localisation $\tilde{\mathcal{F}}' = \tilde{\mathcal{L}}'_U$, dans \mathcal{A}' , associée à l'ouvert U' de X' et caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'_U$.

Il en résulte en particulier la relation :

$$(3) \quad \mathcal{F}' A' = 0 .$$

Puisque w est un homéomorphisme et que U est un ouvert quasi-compact de X , l'ouvert U' de X' est également quasi-compact. Il existe donc une famille finie $(g'_j)_{j \in J}$ d'éléments

de A' , telle que :

$$U' = \bigcup_{j \in J} D(g'_j) .$$

Soit f' un élément de A' tel que l'ouvert affine spécial $D(f')$ de X' vérifie :

$$D(f') \cap U' = \emptyset .$$

Pour tout $j \in J$, il en résulte :

$$D(f' g'_j) = D(f') \cap D(g'_j) = \emptyset$$

et par suite, il existe des entiers n_j tels que :

$$(f' g'_j)^{n_j} = 0 .$$

Si n est un majorant des entiers n_j pour $j \in J$, en posant :

$$f'_0 = f'^n \quad \text{et} \quad f'_j = g'_j{}^n$$

pour tout $j \in J$, ce qui entraîne à fortiori :

$$f'_0 f'_j = 0$$

pour tout $j \in J$, les relations :

$$D(g'_j) = D(f'_j)$$

pour tout $j \in J$, entraînent :

$$U' = \bigcup_{j \in J} D(f'_j)$$

et de plus :

$$D(f') = D(f'_0) .$$

Les relations $f'_0 f'_j = 0$ pour tout $j \in J'$ montrent que l'annulateur de f'_0 contient l'idéal :

$$\alpha' = \sum_{j \in J} A' f'_j$$

de A' qui appartient à l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'_U$. Il en résulte la relation :

$$f'_0 \in \mathcal{F}' A'$$

et la relation (3) entraîne :

$$f'_0 = 0$$

ce qui donne : $D(f') = D(f'_0) = \emptyset$.

Ainsi tout ouvert affine spécial de X' disjoint de U' est vide. Il en résulte que U' est partout dense dans X' , ce qui achève la démonstration de la partie (a).

6-9. COROLLAIRE : Avec les données et les notations du théorème

6-8, soit ϕ le morphisme du schéma affine $(X', \mathcal{O}'_{X'})$ dans le schéma affine (X, \mathcal{O}_X) déterminé par l'homomorphisme ρ et soit F le foncteur de \mathcal{A} dans \mathcal{A}' tel que le foncteur localisation L de la localisation $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}_U$ dans \mathcal{A} , associée à l'ouvert U de X , soit caractérisé par : $L = \rho_* F$.

Si j^* et j'^* sont les foncteurs images réciproques déterminés par les morphismes de préschémas j

et j' associées aux injections canoniques de U dans X et de U' dans X' , alors :

(a) Tout objet M de \mathcal{A} vérifie :

$$j^* \tilde{M} = w_* j'^* \tilde{M}$$

(b) Tout objet M' de \mathcal{A}' vérifie :

$$j'^* \tilde{M}' = w_*^{-1} j^* \tilde{M}' .$$

Compte tenu de la relation :

$$\mathcal{O}_U = w_*(\mathcal{O}_{U'})$$

la partie (a) est une conséquence immédiate de la relation (1) établie dans la démonstration du théorème 6-8.

Comme dans la démonstration du théorème 6-8, le lemme 6-7 entraîne la relation :

$$F'_0 M' = F_0(\rho_* M')$$

pour tout objet M' de \mathcal{A}' , ce qui implique la relation :

$$\Gamma(U'_0, \tilde{M}') = \Gamma(U_0, \widetilde{\rho_* M'})$$

pour tout ouvert quasi-compact U'_0 de U' . Un raisonnement analogue à celui de la démonstration du théorème 6-8, conduit à la relation :

$$j'^* \tilde{M}' = w_*^{-1} j^* \widetilde{\rho_* M'}$$

La partie (b) est alors une conséquence immédiate de la

relation :

$$\widetilde{\rho}_* M' = \phi_* (\widetilde{M}')$$

qui résulte de la proposition (1-6-3) de [7] .

7 - OUVERTS AFFINES DES SCHEMAS AFFINES.

7-1. THEOREME : Etant donné un schéma affine (X, \mathcal{O}_X) , associé à un anneau commutatif A , soit $\mathcal{A} = \text{Mod } A$ la catégorie des A -modules.

Pour tout ouvert quasi-compact U de X , soit (U, \mathcal{O}_U) le préschéma induit sur U par le schéma affine (X, \mathcal{O}_X) , soit \mathcal{B}'_U la catégorie des \mathcal{O}_U -Modules quasi-cohérents et en posant $A' = \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ soit $\mathcal{A}' = \text{Mod } A'$ la catégorie des A' -modules.

Alors, il y a équivalence des conditions suivantes :

- (a) L'ouvert U de X est un ouvert affine.
- (b) Le foncteur section Γ' de \mathcal{B}'_U dans \mathcal{A}' détermine une équivalence.
- (b') Le foncteur Γ' de \mathcal{B}'_U dans \mathcal{A}' est exact.
- (c) La localisation $\widetilde{\mathcal{L}}'_U$ dans \mathcal{A} , associée à l'ouvert U de X , est exacte.

(c') La localisation $\tilde{\mathcal{L}}_U$ dans \mathcal{A} , associée à l'ouvert U de X , est plate.

(d) Toute famille finie $(f_j)_{j \in J}$ d'éléments de A , telle que :

$$U = \bigcup_{j \in J} D(f_j)$$

vérifie la condition :

(d₀) Il existe une famille $(g_j)_{j \in J}$ de sections $g_j \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, telle que :

$$\sum_{j \in J} g_j (f_j | U) = 1 | U .$$

(d') Il existe au moins une famille finie $(f_j)_{j \in J}$ d'éléments de A , telle que :

$$U = \bigcup_{j \in J} D(f_j)$$

et vérifiant la condition (d₀).

(e) Tout idéal de type fini \mathcal{Q} de A admettant un système fini de générateurs $(f_j)_{j \in J}$ et tel que $U = D(\mathcal{Q})$, vérifie la condition :

(e₀) Si $u : A \rightarrow A_0$ est l'homomorphisme canonique de A dans l'anneau quotient A_0 de A par l'idéal I_0 constitué par les éléments de A , annihilés par une puissance de \mathcal{Q} , il existe un entier n et une famille $(h_j)_{j \in J}$ de A -homomorphisme h_j de \mathcal{Q}^n dans A_0 , telle que :

$$\sum_{j \in J} h_j(x) u(f_j) = u(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{A}^n$.

(e') Il existe au moins un idéal de type fini \mathcal{Q} de A , admettant un système fini de générateurs $(f_j)_{j \in J}$ et tel que $U = D(\mathcal{Q})$, vérifiant la condition (e₀).

Soit $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}_U$ la localisation dans \mathcal{A} associée à l'ouvert U de X et caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F} = \mathcal{F}_U$. Puisque l'ouvert U de X est quasi-compact, le théorème 4-3 et le corollaire 4-4 montrent que l'anneau A' est l'anneau localisé $A_{\mathcal{F}}$ de A pour la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$. Il en résulte que l'anneau A' est caractérisé par :

$$A' = A_{\mathcal{F}} = \varinjlim_{I \in \mathcal{F}} \text{Hom}(I, A/I)$$

et l'homomorphisme de restriction ρ de A dans A' coïncide avec l'homomorphisme ψ_A^U .

Tout d'abord, pour qu'une famille finie $(f_j)_{j \in J}$ d'éléments de A vérifie

$$U = \bigcup_{j \in J} D(f_j)$$

il faut et il suffit que $(f_j)_{j \in J}$ soit un système fini de générateurs d'un idéal de type fini \mathcal{Q} de A , tel que $U = D(\mathcal{Q})$.

D'autre part, pour tout idéal de type fini \mathcal{Q} de A vérifiant cette condition, l'ensemble \mathcal{F} admet pour système co-

final les puissances de \mathcal{Q} et par suite l'idéal I_0 introduit dans la condition (e_0) coïncide avec l'idéal $\mathfrak{F}A$, ce qui entraîne $A_0 = A_{\mathfrak{F}A}$. Il en résulte alors que l'anneau A' peut être caractérisé par :

$$A' = A_{\mathfrak{F}} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}(\mathcal{Q}^n, A_0) .$$

Compte tenu de la caractérisation classique de la structure multiplicative de l'anneau $A_{\mathfrak{F}}$, ces remarques entraînent immédiatement l'équivalence des conditions (d_0) et (e_0) .

Il en résulte immédiatement que les conditions (d) et (e) sont équivalentes et que de même les conditions (d') et (e') sont équivalentes.

Le théorème (1-4-1) de [7] montre que la condition (a) entraîne la condition (b) .

Il est évident que la condition (b) entraîne la condition (b') .

Les relations (a) et (c) du lemme 6-2 entraînent la relation

$$L_U = \rho_* \Gamma' j^* \check{P} .$$

D'après le corollaire 6-5, le foncteur $j^* \check{P}$ est exact et comme le foncteur ρ_* est exact, si le foncteur Γ' est exact, le foncteur localisation L_U de la localisation $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}_U$ dans \mathcal{A} est exact. Ainsi, la condition (b') entraîne la condition (c) .

Puisque l'ouvert U de X est quasi-compact, la proposition 2-9 montre que la localisation $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}_U$ dans \mathcal{A} est de type fini. La proposition 3-5 et le théorème 3-6 de [11] montrent donc que la condition (c) entraîne la condition (c').

Soit $\tilde{\mathcal{L}}' = \rho(\tilde{\mathcal{L}})$ la localisation dans \mathcal{A}' , image par ρ de la localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ et caractérisée par l'ensemble topologisant et idempotent $\mathfrak{F}' = \rho(\mathfrak{F})$ image par ρ de l'ensemble \mathfrak{F} .

D'après le théorème 3-6 de [11], pour que la localisation $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}_U$ dans \mathcal{A} soit plate, il faut et il suffit que l'ensemble \mathfrak{F}' vérifie

$$\mathfrak{F}' = \{A'\} .$$

En particulier, lorsque la localisation $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}_U$ dans \mathcal{A} est plate, pour tout idéal Q de A tel que $Q \in \mathfrak{F}$, le lemme 5-2 entraîne que l'idéal $A'\rho(Q)$ de A' est un élément de \mathfrak{F}' et par suite :

$$A'\rho(Q) = A' .$$

Toute famille finie $(f_j)_{j \in J}$ d'éléments de A , telle que :

$$U = \bigcup_{j \in J} D(f_j)$$

est un système fini de générateurs d'un idéal de type fini Q de A vérifiant : $U = D(Q)$ et par suite : $Q \in \mathfrak{F}$.

Ce qui précède montre donc que la condition (c') entraîne

$$\sum_{j \in J} A'\rho(f_j) = A'$$

de X' sur l'ouvert U de X , qui caractérise un isomorphisme de préschémas :

$$W : (X', \mathcal{O}_{X'}^i) \rightarrow (U, \mathcal{O}_U)$$

La condition (d') entraîne donc que le préschéma (U, \mathcal{O}_U) , induit sur l'ouvert U par le schéma affine (X, \mathcal{O}_X) , est isomorphe au schéma affine $(X', \mathcal{O}_{X'}^i)$, c'est-à-dire que l'ouvert U de X est un ouvert affine.

Ainsi, la condition (d') entraîne la condition (a), ce qui achève la démonstration.

7-2 - Notations - Etant donné un schéma affine (X, \mathcal{O}_X) , associé à un anneau commutatif A , pour tout ouvert U de X , en posant : $A' = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, le foncteur section $\Gamma(U, \cdot)$ de la catégorie des \mathcal{O}_X -Modules (non nécessairement quasi-cohérents) dans la catégorie $\mathcal{A}' = \text{Mod } A'$ des A' -modules, est exact à gauche.

Pour tout entier $p \geq 0$, soit $H^p(U, \cdot)$, le $p^{\text{ième}}$ foncteur dérivé du foncteur $\Gamma(U, \cdot)$. Ces foncteurs $H^p(U, \cdot)$ caractérisent un *foncteur cohomologique universel* [6], noté $H^*(U, \cdot)$, de la catégorie des \mathcal{O}_X -Modules dans la catégorie \mathcal{A}' des A' -modules, d'après une remarque analogue à la remarque (0-12-1-2) de [8].

De même, pour tout entier $p \geq 0$, soit $\check{H}^p(U, \cdot)$ le $p^{\text{ième}}$ foncteur associé au foncteur $\Gamma(U, \cdot)$ par la méthode de Čech. (Voir par exemple [5] ou [9]).

Puisque l'anneau A' est commutatif, pour tout entier n , la considération de la puissance $n^{\text{ième}}$ des deux membres de la relation précédente, montre que l'élément unité $1'$ de A' peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire, à coefficients dans A' , d'éléments de A' qui sont les images par ρ d'éléments de l'idéal \mathcal{Q}^n . Autrement dit, il en résulte la relation :

$$A' \rho(\mathcal{Q}^n) = A'$$

qui montre que A' est le seul idéal \mathcal{Q}' de A' vérifiant :

$$\mathcal{Q}^n \subset \rho^{-1}(\mathcal{Q}')$$

Comme la condition $U = D(\mathcal{Q})$ entraîne que l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F} = \mathcal{F}_U$ admet pour système cofinal les puissances de l'idéal \mathcal{Q} , le lemme 5-2 montre que l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{F}' = \rho(\mathcal{F})$, image par ρ de l'ensemble \mathcal{F} , vérifie :

$$\mathcal{F}' = \{A'\} .$$

Soit $(X', \mathcal{O}_{X'}')$ le schéma affine associé à l'anneau A' et soit $\varphi: X' \rightarrow X$ l'application continue déterminée par l'homomorphisme d'anneaux $\rho: A \rightarrow A'$. Le lemme 5-8 entraîne que la localisation $\tilde{\mathcal{L}}' = \rho(\tilde{\mathcal{L}})$ dans \mathcal{A}' est la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_U$, dans \mathcal{A}' , associée à l'ouvert $U' = \varphi^{-1}(U)$ de X' . La relation $\mathcal{F}' = \{A'\}$ entraîne donc $U' = X'$ et le théorème 6-8 montre que l'application continue $\varphi: X' \rightarrow X$ induit un homéomorphisme w

de X' sur l'ouvert U de X , qui caractérise un isomorphisme de préschémas :

$$W : (X', \mathcal{O}_{X'}) \rightarrow (U, \mathcal{O}_U) .$$

La condition (d') entraîne donc que le préschéma (U, \mathcal{O}_U) , induit sur l'ouvert U par le schéma affine (X, \mathcal{O}_X) , est isomorphe au schéma affine $(X', \mathcal{O}_{X'})$, c'est-à-dire que l'ouvert U de X est un ouvert affine.

Ainsi, la condition (d') entraîne la condition (a) , ce qui achève la démonstration.

7-2 - Notations - Etant donné un schéma affine (X, \mathcal{O}_X) , associé à un anneau commutatif A , pour tout ouvert U de X , en posant : $A' = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, le foncteur section $\Gamma(U, \cdot)$ de la catégorie des \mathcal{O}_X -Modules (non nécessairement quasi-cohérents) dans la catégorie $\mathcal{A}' = \text{Mod } A'$ des A' -modules, est exact à gauche.

Pour tout entier $p \geq 0$, soit $H^p(U, \cdot)$, le $p^{\text{ième}}$ foncteur dérivé du foncteur $\Gamma(U, \cdot)$. Ces foncteurs $H^p(U, \cdot)$ caractérisent un *foncteur cohomologique universel* [6], noté $H^*(U, \cdot)$, de la catégorie des \mathcal{O}_X -Modules dans la catégorie \mathcal{A}' des A' -modules, d'après une remarque analogue à la remarque (0-12-1-2) de [8].

De même, pour tout entier $p \geq 0$, soit $\check{H}^p(U, \cdot)$ le $p^{\text{ième}}$ foncteur associé au foncteur $\Gamma(U, \cdot)$ par la méthode de Čech. (Voir par exemple [5] ou [9]).

7-3. LEMME : Etant donné un schéma affine (X, \mathcal{O}_X) , associé à un anneau commutatif A , pour tout ouvert affine U de X , tout \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent \tilde{M} , vérifie :

$$\check{H}^p(U, \tilde{M}) = 0$$

pour tout $p > 0$.

Tout d'abord, il est immédiat que tout ouvert affine U de X est quasi-compact.

Soit \mathcal{U} un recouvrement ouvert de l'ouvert quasi-compact U de X , par des ouverts $U_j = D(f_j)$, caractérisés par une famille finie $(f_j)_{j \in J}$, d'éléments de A , vérifiant

$$U = \bigcup_{j \in J} D(f_j) .$$

Le théorème 7-1 entraîne qu'il existe une famille $(g_j)_{j \in J}$ de sections $g_j \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, telle que :

$$\sum_{j \in J} g_j (f_j | U) = 1 | U .$$

Pour tout \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent \tilde{M} , la restriction $\tilde{M}|_U$ de \tilde{M} à l'ouvert U est un $(\mathcal{O}_X|_U)$ -Module quasi-cohérent et le corollaire (1-2-4) de [8] entraîne alors :

$$H^p(\mathcal{U}, \tilde{M}) = 0$$

pour tout $p > 0$.

Comme les recouvrements ouverts de U , de la forme \mathcal{U} ,

sont arbitrairement fins , par passage "à la limite inductive", il en résulte alors :

$$\check{H}^p(U, \tilde{M}) = 0$$

pour tout $p > 0$, ce qui achève la démonstration.

7-4. COROLLAIRE : Etant donné un schéma affine (X, \mathcal{O}_X) , associé à un anneau commutatif A , pour tout ouvert U de X , avec les notations précédentes, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) L'ouvert U de X est un ouvert affine.

(b) L'ouvert U de X est quasi-compact et tout \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent \tilde{M} , vérifie :

$$H^p(U, \tilde{M}) = 0$$

pour tout $p > 0$.

Naturellement, tout ouvert affine de X est quasi-compact.

Soit \mathcal{V} l'ensemble des ouverts affines de X . La proposition (5-5-6) de [7] montre que $U' \in \mathcal{V}$ et $U'' \in \mathcal{V}$ impliquent : $U' \cap U'' \in \mathcal{V}$. Il est évident que \mathcal{V} contient des ouverts arbitrairement petits. Enfin, pour tout \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent \tilde{M} , le lemme 7-3 entraîne :

$$\check{H}^q(U', \tilde{M}) = 0$$

pour tout $q \geq 1$ et tout $U' \in \mathcal{V}$.

Ainsi, pour tout \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent \tilde{M} , la famille \mathcal{V} , qui constitue naturellement un recouvrement ouvert de X , possède les propriétés a), b) et c) de l'énoncé du théorème 5-9-2 de [5]. La démonstration de ce théorème 5-9-2 de [5] établit, par récurrence sur n , que les homomorphismes canoniques :

$$\check{H}^n(U', \tilde{M}) \rightarrow H^n(U', \tilde{M})$$

sont bijectifs pour tout $U' \in \mathcal{V}$.

Compte tenu de ce résultat, le lemme 7-3, entraîne :

$$H^p(U', \tilde{M}) = 0$$

pour tout $p > 0$ et tout $U' \in \mathcal{V}$.

Ainsi, la condition (a) entraîne la condition (b).

Avec les notations 6-1, pour tout ouvert quasi-compact U de X , le foncteur Γ_U , défini sur la catégorie \mathcal{B} des \mathcal{O}_X -Modules quasi-cohérents, est la restriction du foncteur section $\Gamma(U, \cdot)$ défini sur la catégorie des \mathcal{O}_X -Modules. Il en résulte immédiatement que la condition (b) entraîne que le foncteur Γ_U est exact.

Les relations (c), (a) et (a') du lemme 6-2 entraînent la relation :

$$L_U = \Gamma j_* j^* \check{P} = \rho_* \Gamma' j^* \check{P} = \rho_* \Gamma_U \check{P}$$

et comme les foncteurs ρ_* et \check{P} sont toujours exacts, il en résulte alors que le foncteur localisation L_U est exact, c'est-à-dire que la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_U$ dans \mathcal{A} , associée à l'ouvert quasi-compact U de X , est exacte. Le théorème 7-1 entraîne alors que l'ouvert U de X est un ouvert affine.

Ainsi, la condition (b) entraîne la condition (a), ce qui achève la démonstration.

7-5. Remarque - Le corollaire 7-4 constitue une généralisation du théorème (1-3-1) de [8].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI : *Algèbre commutative*, Ch.I. *Modules plats*. Ch.II. *Localisations*, Paris Hermann (Act. Sc. et Ind. 1290, *Eléments de Mathématiques*).
- [2] C. CHEVALLEY : *Introduction à la Théorie des Schémas*, Cours professé à l'I.H.P., Année 1964-65, édité par le Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique.
- [3] P. GABRIEL : *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. Fr., t.90, 1962, p. 323-448 (Thèse Sc. Math. Paris 1961).
- [4] J. GIRAUD : *Analysis Situs*, Séminaire BOURBAKI, Mai 1963.
- [5] R. GODEMENT : *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Paris Hermann 1958 (Act. Sc. et Ind., 1252, Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, XIII).
- [6] A. GROTHENDIECK : *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku math. J, Série 2, t.9, 1957, p. 119-221.
- [7] A. GROTHENDIECK : *Eléments de géométrie algébrique*, I. *La langage des schémas*, Paris Presses universitaires de France, 1960 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications Mathématiques N°4).
- [8] A. GROTHENDIECK : *Eléments de géométrie algébrique*, III. *Etude cohomologique des faisceaux cohérents*, Paris Presses Universitaires de France 1961 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques N°11).

Localisations et schémas affines

- [9] M. HACQUE : *Pré-faisceaux et faisceaux sur les situations*, Cahiers de topologie et géométrie différentielle, Vol.IX, 3, 3^{ème} trimestre 1967, p. 36-108 (Dunod, Paris).
- [10] M. HACQUE : *Mono-sous-catégories d'une catégorie de modules*, Publications du Département de Math. Fac. des Sc. de LYON, t.6, 1969, fasc.1, p. 13-48.
- [11] M. HACQUE : *Localisations exactes et localisations plates*, Publications du Département de Math. Fac. des Sc. de LYON, t.6, 1969, fasc.2, p. 97-117.
- [12] D. LAZARD : *Autour de la platitude*, Bull. Soc.Math. Fr., t.97, 1969, p. 81-128 (Thèse Sc. Math. Paris, 1968).

Manuscrit remis le 20 mars 1970.

M. HACQUE
Maître de Conférences
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
43, bd du 11 novembre 1918
VILLEURBANNE