PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

R. BONNET

Catégorie et α-catégorie des ensembles ordonnés

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1971, tome 8, fascicule 1
, p. 69-90

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1971__8_1_69_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1971 t.8-1

CATEGORIE ET α-CATEGORIE DES ENSEMBLES ORDONNES

R. BONNET

Le travail qui suit est divisé en deux parties distinctes : la première a pour but d'analyser la catégorie θ des ensembles ordonnés et en particulier la dualité.

C'est ainsi que si V désigne un ensemble ordonné fixé ayant plus de deux éléments et tel que toute partie de V admette une borne supérieure, on appelle dual d'un ensemble ordonné E, l'ensemble ordonné E^* des applications croissantes de E dans V; de plus si f est une application croissante de E dans F, elle induit une application croissante f^* de F^* dans E^*. Les éléments "étoilés" s'érigent en une catégorie qui devient une sous-catégorie de θ et qui est notée θ^*. Dans le cas où $V = \{0,1\}$ avec $0<1$, l'interprétation se fait en considérant E^* comme l'ensemble des sections finales de E (voir aussi dans ce cas M. POUZET [8]). Bien qu'elle puisse paraître très formelle, cette partie permet, d'une part de donner des critères pour savoir si une application f est de la forme g^*, d'autre part dans le cas $V = \{0,1\}$ de redonner des résultats énoncés par l'auteur en collaboration avec M. POUZET [3].

La seconde partie est consacrée à l'étude des α-catégories qui généralise la classe des ensembles artiniens, dispersés. Si α désigne une chaîne ou ensemble totalement ordonné infini, disons qu'un ensemble E est α-ordonné s'il ne contient aucune sous-chaîne isomorphe à α. L'étude de la classe des ensembles α-ordonnés en particulier sa stabilité par rapport à certaines opérations comme la somme et le produit lexicographiques, la réunion et le produit direct, et la nature intrinsèque de la chaîne α considérée permet de poser les problèmes du paragraphe 5-3 dont la solution énoncée sans démonstration paraîtra dans un prochain article intitulé "α-ordre de SZPILRAJN".

1 - CATEGORIE DES ENSEMBLES ORDONNES

1-1. On rappelle qu'un *ensemble ordonné* est la donnée d'un couple (E,ε) dans lequel ε désigne un graphe d'ordre sur un ensemble E; si aucune confusion n'est à craindre, on désignera par E au lieu de (E,ε) un ensemble ordonné, et par $x\leqslant y$ la relation $(x,y)\in\varepsilon$ et on dit alors que x est *inférieur* à y dans E. On dit qu'un ensemble ordonné E est une *chaîne* si pour tous x et y de E, on a $x\leqslant y$ ou $y\leqslant x$, ce qui signifie que x et y sont *comparables*. Enfin on dit qu'un ensemble ordonné E est *libre* si pour tout couple (x,y) d'éléments de E, x et y sont incomparables ce qui signifie $x\nleqslant y$ et $y\nleqslant x$.

De plus si (E,ε) est un ensemble ordonné, on dit que $(E,\overline{\varepsilon})$ est un *renforcement* de (E,ε) si $(E,\overline{\varepsilon})$ est une chaîne telle que $\varepsilon\subset\overline{\varepsilon}$; (E,ε) étant souvent noté E, $(E,\overline{\varepsilon})$ sera écrit $\overline{E}$.

Enfin si E et F désignent deux ensembles ordonnés, on dit que $f: E\to F$ est une application croissante si la relation $x\leqslant y$ de E implique $f(x)\leqslant f(y)$. C'est ainsi qu'on est conduit à introduire la *catégorie des ensembles ordonnés*, notée θ , en prenant comme objets les ensembles ordonnés et comme morphismes les applications croissantes. Si E et F sont deux ensembles ordonnés alors l'ensemble $\theta(E,F)$ des morphismes de E dans F est lui aussi ordonné par $f\leqslant g$ si pour tout x de E, on a $f(x)\leqslant g(x)$ dans F.

Certains résultats sur la dualité étant évidents compte tenu de propriétés catégoriques, il est bon de rappeler la caractérisation de morphismes et d'objets utiles pour la suite (pour le vocabulaire catégorique voir [7]).

1-2. Dans ce numéro, on désignera par $f: E \to F$ une application croissante, et par $\equiv$ la relation d'équivalence sur E associée à f, c'est-à-dire que $x \equiv y$ signifie $f(x) = f(y)$.

Il est bien connu que f est un *monomorphisme* ou un *épimorphisme* si f est respectivement une injection ou une surjection.

Rappelons d'une part que $f: E \to F$ est un *monomorphisme fort* si f est un monomorphisme à décomposition triangulaire triviale, d'autre part que $f: E \to F$ est une *restriction* si pour tout morphisme $g: G \to F$ et pour toute application $h: G \to E$ rendant le diagramme d'application commutatif, soit $f \circ h = g$, alors h est un morphisme ce qui signifie que h est croissant. Les notions duales sont celles d'*épimorphisme fort* et de *réduction* respectivement.

Il est alors clair que les notions de *monomorphisme fort* et de *restriction* coïncident, et dire que f en est un, signifie que pour tout x et y de E, $x \leqslant y$ est équivalent à $f(x) \leqslant f(y)$.

Dire que f est un *épimorphisme fort* signifie que si $x' \leqslant y'$ dans F, il existe une suite finie $z_0, z_1, \ldots z_{2n+1}$ d'éléments de E telle que $f(z_0) = x'$, $f(z_{2n+1}) = y'$ et :

$$z_0 \leqslant z_1 \equiv z_2 \leqslant z_3 \equiv \cdots z_{2i-1} \equiv z_{2i} \leqslant z_{2i+1} \equiv \cdots z_{2n} \leqslant z_{2n+1} .$$

Par contre f est une réduction si pour tous $x' \leq y'$ de F il existe $x \leq y$ dans E vérifiant $f(x) = x'$ et $f(y) = y'$.

1-3. Enfin dans θ, E est un cogénérateur si E n'est pas libre et est un générateur si E n'est pas vide. De plus E est un injectif si E est complet pour l'ordre ce qui signifie que toute partie admet une borne supérieure : pour cela on rappelle que E est un injectif si pour tout monomorphisme fort $i: F \to G$, tout morphisme $f: F \to E$ se prolonge en un morphisme $\bar{f}: G \to E$.

2 - DUALITE

Dans la suite, on désignera par V un cogénérateur injectif c'est-à-dire que V sera un ensemble ordonné complet et non réduit à un élément : par exemple $2 = \{0,1\}$ avec $0<1$ vérifie ces conditions.

2-1. Soit E un ensemble ordonné, on appelle *dual de* E *(relatif à* V*)* l'ensemble ordonné $E^* = \theta(E,V)$ des applications croissantes de E dans V : c'est un ensemble ordonné complet. De plus si f est une application croissante de E dans F elle induit une application croissante f^* de F^* dans E^* définie par $f^*(\varepsilon) = \varepsilon \circ f$ pour $\varepsilon \in F^*$. Il est à noter que f^* commute aux bornes supérieures et inférieures; et f^* sera appelé *dual de* f *(relatif à* V*)*.

Si E est un ensemble ordonné, on dit que $F \subset E$ est une *section finale* de E si pour tout $x \in F$ et $x \leq y$ dans E on a

$y \in F$, on note $\Phi(E)$ l'ensemble ordonné des sections finales de E. Maintenant si $V = 2$, l'ensemble E^* pourra être identifié à $\Phi(E)$ et si f est une application croissante de E dans F, alors l'application $\Phi(f)$ de $\Phi(F)$ dans $\Phi(E)$ définie par $\Phi(f)(K) = f^{-1}(K)$ pour $K \in \Phi(F)$, n'est autre que f^* de F^* dans E^*. Après cet exemple revenons au cas général, un "aller-retour catégorique" nous montre la :

PROPOSITION : Il y a équivalence entre :

> *(i)* f *est un monomorphisme fort (resp. épimorphisme, isomorphisme).*
>
> *(ii)* f^* *est un épimorphisme (resp. monomorphisme, bimorphisme).*

En effet, on montre que si f est un monomorphisme fort alors f^* est un épimorphisme, par l'absurde; la réciproque étant évidente compte tenu des propriétés de V.

Comme $\theta(E,F^*)$ et $\theta(F,E^*)$ sont isomorphes, le foncteur $\theta(\cdot,V)$ de θ dans θ est coadjoint à droite de lui-même donc il transforme les limites à droite en limites à gauche, en particulier les sommes en produits.

2-2. Soit θ^* la catégorie obtenue en prenant comme objets les ensembles ordonnés de la forme E^* et comme morphismes les applications croissantes de la forme f^*. Alors θ et θ^* sont deux catégories duales ; comme 1^+ est isomorphe à V il est alors évident que $\theta^*(X^*,V)$ est isomorphe à X.

De plus θ^* est une sous-catégorie (non pleine) de θ, en effet il suffit de s'apercevoir que $X^* = Y^*$ implique $X = Y$ pour conclure. Il est à noter que si X^* et Y^* sont isomorphes en tant qu'objets de θ, ils ne le sont pas nécessairement en tant qu'objets de θ^* : pour cela soit V l'ensemble ordonné $[0,1]$ des réels x tels que $0 \leq x \leq 1$, soient X et Y l'ensemble $\{0,1\}$ avec 0 inférieur à 1 et 0 incomparable à 1 respectivement. Il est alors évident que X^* et Y^* sont isomorphes dans θ, mais non dans θ^*. Si V est l'ensemble ordonné 2, alors dire que X^* et Y^* sont isomorphes dans θ^* revient à dire que X^* et Y^* sont isomorphes dans θ : en effet si φ est un isomorphisme d'ordre de X^* sur Y^* alors φ commute aux bornes supérieures et inférieures et on verra alors que φ est de la forme g^* (corollaire du théorème 2-3).

Cette dualité va nous permettre de résoudre le problème suivant : étant donnée une application f croissante de E^* dans F^*, peut-on dire qu'il existe $g: F \to E$ croissante telle que $g^* = f$?.

Pour cela remarquons d'abord que si E désigne un ensemble ordonné, il existe une restriction $\sim_E$ de E dans $E^{**} = \theta(E^*,V)$, qui à x de E associe $\tilde{x}$ de E^{**}, $\tilde{x}$ étant défini par $\tilde{x}(\varepsilon) = \varepsilon(x)$ pour $\varepsilon \in E^*$. Cependant on peut dire que si f est une application croissante de E dans F^* elle se prolonge en une unique application de la forme g^* de E^{**} dans F^*, c'est-à-dire que l'on a $g^* \circ \sim_E = f$. En effet, ce résultat revient à montrer que $\theta^{**}(X^{**},Y^*)$ est canoniquement isomorphe à

$\theta(X,Y^*)$ ce qui est évident en regardant la suite d'isomorphismes :

$$\theta^*(Y^{**},X^*) \simeq \theta(X,Y^*) = \theta(X,\theta(Y,V)) \simeq \theta(X\times Y,V)$$
$$\simeq \theta(Y,\theta(X,V)) = \theta(Y,X^*).$$

Si E désigne un ensemble ordonné, la restriction $\sim_E$ de E dans E^{**} induit, dans la catégorie θ^*, une réduction $(\sim_E)^*$ de E^{***} dans E^*. Il est à noter que le composé $(\sim_E)^* \circ \sim_{E^*}$ n'est autre que le morphisme identité de E^*.

2-3. Soit $f: Y^* \to X^*$ une application croissante, on dit que f vérifie la condition (*) si on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} Y^{***} \arrow[r, "\sim^*"] \arrow[d, "f^{**}"'] & Y^* \arrow[d, "f"] \\ X^{***} \arrow[r, "\sim^*"] & X^* \end{tikzcd}$$

Compte tenu du fait que $\sim^*$ est une réduction, on obtient le :

THEOREME : *Soit* $f: Y^* \to X^*$ *une application croissante.*
Il y a équivalence entre :
(i) Il existe $g: X \to Y$ *(unique et croissante) telle que* $f = g^*$.
(ii) f *vérifie la condition* (*).

La propriété reliant $\sim_{Y^*}$ et $(\sim_Y)^*$ permet donc d'affirmer que f est de la forme g^* si et seulement on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y^* & \xrightarrow{\sim_{Y^*}} & Y^{***} \\ f\downarrow & & \downarrow f^{**} \\ X^* & \xleftarrow[(\sim_X)^*]{} & X^{***} \end{array}$$

Et dans un cas particulier on obtient le :

COROLLAIRE : *Si* $V = 2$, *soit* $f: Y^* \to X^*$ *une application croissante, il y a équivalence entre :*

(i) f *est de la forme* g^*.

(ii) f *commute aux bornes supérieures et inférieures.*

Pour compléter l'étude, dans le cas où $V = 2$, de la catégorie θ^*, soit $f^*: E^* \to F^*$ un morphisme, alors :

a/ . f^* est un monomorphisme ssi f^* est une injection.

b/ . f^* est un épimorphisme ssi pour tout intervalle ouvert de F^* de la forme $]\alpha,\beta[$ avec α et β dans $f^*(E^*)$, la condition $]\alpha,\beta[\cap f^*(E^*)$ est vide implique que $]\alpha,\beta[$ est vide. De ce paragraphe il ressort le résultat suivant : (montré d'abord par POUZET [3]).

COROLLAIRE : *Soient* (E,ε) *un ensemble ordonné et* $\Phi(E,\varepsilon)$ *l'ensemble, ordonné par l'inclusion, des sections finales de* (E,ε), *alors :*

(a). Si $\mathcal{C}$ *est une chaîne maximale de* $\Phi(E,\varepsilon)$, *il existe un renforcement* $(E,\bar{\varepsilon})$ *de* (E,ε) *tel que* $\Phi(E,\bar{\varepsilon}) = \mathcal{C}$.

(b). Si $(E,\bar{\varepsilon})$ est un renforcement de (E,ε), alors $\Phi(E,\bar{\varepsilon})$ est une chaîne maximale de $\Phi(E,\varepsilon)$.

Ce résultat provient du fait que l'injection canonique de $\mathscr{C}$ dans $\Phi(E,\varepsilon)$ est un épimorphisme si on se place dans θ^*.

Par exemple si $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers alors il existe un isomorphisme de l'ensemble des réels dans l'ensemble $\mathcal{P}(N) \simeq 2^N$ ordonné par inclusion : en effet la chaîne $\mathbb{Q}$ des rationnels est une extension de l'ensemble libre $\mathbb{N}$ (muni de l'égalité) donc $\Phi(\mathbb{Q})$ est une chaîne maximale de $\mathcal{P}(N)=\Phi(N)$. A ce propos remarquons que :

a/ . L'ensemble 2^N ordonné par l'ordre lexicographique est isomorphe à $\Phi(\mathbb{Q})$ et induit sur $\mathcal{P}(N)$ un renforcement noté $\overline{\mathcal{P}(N)}$ qui est isomorphe à une chaîne maximale de $\mathcal{P}(N)$!

b/ . Il existe dans $\mathcal{P}(N)$ une partie libre non dénombrable : pour cela si x est un réel tel que $0<x<1$ alors x s'écrit de façon unique (par excès) sous la forme $x = \sum_{x \geqslant 0} x_n 10^{-n}$ (dite décimale) et si $E(y)$ désigne la partie entière du réel y soit $f(x)$ l'ensemble des $E(10^n x)$ pour x en système décimal : alors f de $]0,1[$ dans $\mathcal{P}(N)$ est une injection et si x et y sont distincts alors $f(x)$ et $f(y)$ sont incomparables dans $\mathcal{P}(N)$.

3 - STRATIFICATION

3-0. Les résultats rappelés ou énoncés dans ce numéro sont indépendants de la théorie de la dualité, mais ils seront utiles pour la suite (voir aussi [2]).

Si E désigne un ensemble ordonné, l'équivalence $\mathcal{R}$ engendrée par l'ordre $\leqslant$ sur E, c'est-à-dire la transitivisation de la relation " $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$ " est appelée connexité, une classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$ est appelée composante connexe, et si $\wp$ désigne la surjection canonique de E sur $E/\mathcal{R}$ alors l'image par $\wp$ de l'ordre sur E est un ordre sur $E/\mathcal{R}$ qui n'est autre que l'égalité. Sous une forme un peu duale, on peut énoncer la :

3-1. *PROPOSITION* : *Soit* (E,ε) *un ensemble ordonné, il existe une équivalence* $\mathcal{R}$ *sur* E, *telle que si* $\wp: E \to E/\mathcal{R}$ *désigne l'ensemble quotient et* $\tilde{\varepsilon}$ *le préordre image par* $\wp$ *de* ε,

(a). $\wp: (E,\varepsilon) \to (E/\mathcal{R}, \tilde{\varepsilon})$ *est un épimorphisme fort.*

(b). $\tilde{\varepsilon}$ *est un ordre total sur* $E/\mathcal{R}$.

(c). Les classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$ *sont des parties libres de* (E,ε).

La démonstration est basée sur le fait qu'il existe une partie libre maximale L_0 auquel on associe l'objet quotient canonique :

$$\wp_1: (E,\varepsilon) \to (E_1,\varepsilon_1)$$

dans lequel ε_1 est l'ordre image par $\wp$ de ε sur $E_1 = E/L_0$ et l'on raisonne par induction en utilisant les limites inductives.

On est donc conduit à appeler *stratification* d'un ensemble ordonné E, la donnée d'une équivalence $\mathcal{R}$ sur E vérifiant les conditions de la proposition.

Il est à noter que $\wp$ est un épimorphisme fort, mais il est impossible de "raffiner" le résultat pour que l'on ait une réduction $\wp$ de (E,ε) sur $(E/\mathcal{R},\tilde{\varepsilon})$: pour cela il suffit de considérer pour (E,ε) la somme directe de ω et de ω^*.

Cependant on peut annoncer la :

3-2. *PROPOSITION : Soit* (E,ε) *un ensemble ordonné, il existe une équivalence* $\mathcal{R}$ *sur* E *et un ordre total* $\tilde{\varepsilon}$ *sur* $E/\mathcal{R}$ *tel que :*

(a). $\wp : (E,\varepsilon) \to (E/\mathcal{R},\tilde{\varepsilon})$ *est une application croissante telle que si* $x' \leqslant y'$ *dans* $E/\mathcal{R}$ *, il existe* x, z_1, z_2, y *dans* E *tels que* $\wp(x) = x'$, $\wp(y) = y'$ *et* $x \leqslant z_1 \equiv z_2 \leqslant y$.

(b). Les classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$ *sont des parties libres de* (E,ε).

La démonstration est pratiquement la même que pour la proposition précédente.

4 - α-CATEGORIE D'ENSEMBLES ORDONNES.

4-0. Avant d'entamer l'aspect théorique de l'étude, nous allons préciser quelques notations et conventions [2].

Pour la commodité de l'écriture, on désignera par ω, η et λ l'ensemble ordonné des entiers naturels, des nombres rationnels et réels respectivement. Si α désigne un ensemble ordonné, α^* désignera l'ensemble ordonné ayant même ensemble sous-jacent mais muni de l'ordre opposé : par exemple ω^* désigne l'ensemble des entiers négatifs (à un isomorphisme près).

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles ordonnés indexée par un ensemble ordonné I. On notera $\underset{i\in I}{S}\ A_i = A$ l'ensemble ordonné dont l'ensemble sous-jacent est la somme directe (ou réunion disjointe) des A_i pour i dans I, et dont le graphe d'ordre est défini par : $x\leqslant y$ dans A si x et y étant considérés comme éléments de A_{i_x} et A_{i_y} respectivement alors $i_x<i_y$ dans I, ou $i_x = i_y$ et alors on a $x\leqslant y$ dans A_{i_x}. On admettra les principaux résultats sur la somme ainsi définie appelée *somme lexicographique*.

De plus si $(A_i)_{i<\beta}$ est une famille d'ensembles ordonnés indexée par un ordinal β, on note $\underset{i<\beta^*}{P}\ A_i$ l'ensemble ordonné dont l'ensemble sous-jacent est le produit direct des A_i pour $i\in I$, ensemble noté $\prod_I A_i$, et dont le graphe d'ordre est défini par $x\leqslant y$ si $x = (x_i)_{i<\beta}$ et $y = (y_i)$ vérifient pour le plus petit indice i tel que $x_i\neq y_i$ alors $x_i<y_i$. Si $\beta = \{0,1\}$ alors $\underset{i<\beta}{P}\ A_i$ est noté $A_0\cdot A_1$. Il s'en suit que $2\cdot\omega = \omega$ alors que $\omega\cdot 2 = \omega + \omega$.

4-1. Soient E et F deux ensembles ordonnés. La relation "il existe un isomorphisme f de E sur F " est une équivalence dans

θ et un représentant est appelé *type d'ordre* : il est noté $\tau(E)$. La relation "il existe une restriction f de E dans F " est un préordre, c'est-à-dire une relation réflexive et transitive, dans θ, notée $E \leqslant F$, l'équivalence associée à ce préordre est appelée par R. FRAISSE l'*équimorphie* et un représentant par classe d'équivalence est dit *genre d'ordre* : il est noté $\gamma(E)$, et si $\gamma(E) = \gamma(F)$ on écrit alors aussi $E \equiv F$. La négation de $E \leqslant F$ est notée $E \nleqslant F$ et $E < F$ signifie $E \leqslant F$ et $F \nleqslant E$.

Par exemple l'isomorphie et l'équimorphie coïncident pour les ensembles bien ordonnés et les ensembles libres, alors que $\eta \equiv 1+\eta+1$.

4-2. Dans la suite, on désigne par α le genre d'une chaîne infinie.

DEFINITION : *On appelle* α-catégorie des ensembles ordonnés, *notée* α-θ, *la catégorie dont les objets sont les ensembles ordonnés* E *tels que* $\alpha \nleqslant E$ *et les morphismes sont les applications croissantes.*

Par exemple en prenant $\alpha = \omega^*$, ω, η on obtient la catégorie des ensembles artiniens, noethériens ou dispersés. D'autres exemples dans d'autres catégories peuvent être fournis par la catégorie des arbres, des treillis distributifs, modulaires, des graphes planaires,..., des groupes de torsion ($Z \nleqslant G$), des groupes sans sous-groupes divisibles ($\mathbb{Q} \nleqslant G$).

Si E est un objet de α-θ, c'est-à-dire si $\alpha \not\leq E$, on dit que E est un *ensemble α-ordonné* [2]. Il est alors évident que l'on a $\alpha \leq \beta$ si et seulement si $\alpha\text{-}\theta \subset \beta\text{-}\theta$, en particulier $\alpha \equiv \beta$ équivaut à $\alpha\text{-}\theta = \beta\text{-}\theta$. Enfin tout sous-objet, c'est-à-dire restriction, d'un ensemble α-ordonné l'est, et toute somme directe d'ensembles α-ordonnés est aussi α-ordonnée.

L'étude qui suit ayant pour but d'analyser la stabilité de α-θ vis à vis d'opérations classiques sur les ensembles ordonnés, en fonction de certaines propriétés intrinsèques de α, on est conduit à poser les définitions suivantes :

4-3. *Soit χ un cardinal et $\mathcal{C}$ une sous-catégorie de θ, stable par isomorphie; on dit que :*

(a). $\mathcal{C}$ est stable par χ-somme lexicographique *si pour toute famille $(E_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$ indexée par un objet I de $\mathcal{C}$ tel que Card $I<\chi$, alors la somme lexicographique $\underset{I}{S}\, E_i$ est dans $\mathcal{C}$.*

(b). $\mathcal{C}$ est stable par χ-produit direct *si pour toute famille $(E_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$ telle que Card $I<\chi$, alors le produit direct $\prod_I E_i$ est dans $\mathcal{C}$.*

(c). $\mathcal{C}$ est stable par χ-produit lexicographique *si pour toute famille $(E_i)_{i<\beta}$ d'ensembles ordonnés de $\mathcal{C}$ indexée par un ordinal β tel que $\overline{\beta}<\chi$ alors le produit lexicographique $\underset{\beta}{P}\, E_i$ est dans $\mathcal{C}$.*

(d). $\mathcal{C}$ *est* stable par χ-réunion *si pour tout ensemble ordonné* (E,ε) *et pour toute famille* $(F_i, \mathcal{F}_i)_{i\in I}$ *d'objets de* $\mathcal{C}$ *tels que* $F_i \subset F$ *et* $\mathcal{F}_i = \varepsilon \cap F\times F$, *si* Card $I<\chi$ *alors l'objet* $(F,\mathcal{F}) = (\bigcup_I F_i, \bigcup_I \mathcal{F}_i)$ *est dans* $\mathcal{C}$.

(e). *On dit alors que* $\mathcal{C}$ *est stable par une de ces opérations, si elle est stable pour tout cardinal.*

4-4. Le lien avec les α-catégories est le suivant :

(a). *Pour que* α-θ *soit stable par* χ-*somme lexicographique il faut et il suffit que* α *vérifie la condition suivante :*

" *Pour toute famille* $(\alpha_i)_{i\in\beta}$ *de genre d'ordre indéxée par un type d'ordre, tels que* $\alpha = \underset{\beta}{S}\, \alpha_i$ *et* Card $\beta<\chi$, *si* β' *désigne l'ensemble des* i *tels que* $\alpha_i \neq 0$, *alors on a soit* $\beta' \equiv \alpha$, *soit l'existence d'un* i *tel que* $\alpha_i \equiv \alpha$ ".

Par exemple avec $\chi = \omega$, cette condition est vérifiée pour les ordinaux de la forme ω^β, pour les genres $(\omega+\omega^*)\cdot\omega$, $\omega^*\omega$ ou η ; d'ailleurs dans ce cas on dit que α est *indécomposable.*

(b). α-θ *est stable par* χ-*réunion si et seulement si* α *vérifie la condition suivante :*

" *Pour toute famille* $(\alpha_i)_{i\in I}$ *de genres d'ordre indexée par un ensemble* I *tel que* Card $I<\chi$, *si*

$\alpha = \bigcup_{i \in I} \alpha_i$, *il existe un* i *dans* I *tel que* $\alpha \equiv \alpha_i$".

Avec $\chi = \omega$, on dit que α est *impartible* et par exemple ω^β, $\omega\omega^*$, η vérifient cette condition alors que ceci est faux pour $(\omega+\omega^*)\cdot\omega$.

(c). *Enfin si* α-θ *est stable par* χ-*produit lexicographique, alors* α *vérifie la condition :*

"Pour toute famille $(\alpha_i)_{i<\beta}$ *de genres d'ordre indexée par un ordinal régulier* β *tel que* $\beta<\chi$, *si* $\alpha = \underset{i<\beta}{P}\ \alpha_i$, *alors il existe un* i *tel que* $\alpha \equiv \alpha_i$.

Il est à noter que la réciproque est fausse en prenant $\chi = \omega$, l'ordinal $\alpha = \omega^\omega$ vérifie la condition; et si on pose $E = \underset{n<\omega^*}{S}\ \omega^n$, et $F = \omega$, il est clair que E et F sont α-ordonnés alors que $E\cdot F$ ne l'est pas. Si $\chi = \omega$, la condition s'exprime en disant que α est *indissociable*.

Par exemple $(\omega+1)$-θ est stable par ω-produit lexicographique alors que $(\omega+2)$-θ ne l'est pas.

5 - RAPPORT ENTRE STABILITES : NORMALITE

5-1. Soit α un genre de chaîne infinie, on dit que α est *normal* si pour toute chaîne C, C est α-ordonné si et seulement si il en est de même de $\Phi(C)$: on rappelle que $\Phi(C)$ est l'ensemble des sections finales de C, ordonné par l'inclusion.

POUZET a montré que si $\alpha \equiv 2\alpha$ alors α est normal. J'ignore si la condition est suffisante, sauf dans le cas où α est dénombrable en raisonnant sur l'arithmétique des chaînes. Le même raisonnement montre de plus que si α est impartible alors α est normal [voir appendice]. On ignore si l'implication est toujours vraie: ainsi ω, $\omega^*+\omega$, $\omega^*\omega$ et η sont normaux, alors que λ ne l'est pas.

5-2. Avec cette définition, on a la :

PROPOSITION : *Si α est normal, il y a équivalence entre :*

(i). α-θ est stable par χ-réunion.

(ii). α-θ est stable par χ-produit direct.

En effet supposons α-θ stable par χ-réunion et soit $E = \prod E_i$ un χ-produit direct d'ensembles ordonnés tel que E ne soit pas α-ordonné; alors α est isomorphe à une chaîne C de E et si p_i désigne la projection de E sur E_i , on a $C \subset \prod p_i(C)$. Il s'ensuit que $C \leqslant \prod \Phi(p_i(C)) \simeq \Phi(\coprod p_i(C))$.

Désignons par X l'ensemble ordonné $\coprod p_i(C)$. De $\alpha \leqslant \Phi(X)$ on déduit l'existence d'une chaîne maximale $\mathcal{C}$ de $\Phi(X)$ telle que $\alpha \leqslant \mathcal{C} \subset \Phi(X)$. D'après le second corollaire 2-3 on a $\mathcal{C} = \Phi(\overline{X})$ pour un certain renforcement $\overline{X}$ de X. α étant normal il s'ensuit que $\alpha \leqslant \overline{X}$ donc il existe un $i \in I$ tel que $\alpha \leqslant p_i(C) \subset E_i$, et on conclut. Réciproquement, soient C une chaîne et $(C_i)_{i\in I}$ une famille de chaînes telles que $\alpha = \tau(C)$ et $C = \bigcup C_i$. Comme on a une bijection canonique croissante de $\coprod C_i$ dans C, on a donc un isomorphisme de $\Phi(C)$ dans $\Phi(\coprod C_i) = \prod \Phi(C_i)$ et le résultat devient alors évident.

Par exemple α-θ avec $\alpha = \omega^2$, $\omega^*\omega$ a des produits directs finis.

5-3. L'étude des renforcements d'un ensemble ordonné nous amène à poser trois problèmes dont nous donnerons la réponse sans justification ici : α désignera toujours le genre d'une chaîne dénombrable.

Problème 1. - Quels sont les α tels que pour tout ensemble α-ordonné (E,ε), il existe un renforcement $(E,\bar{\varepsilon})$ (resp. une stratification $(E/\mathcal{R},\tilde{\varepsilon})$) de (E,ε) qui soit α-ordonné? Ce problème est important quand on sait qu'un ensemble ordonné (E,ε) est isomorphe à un produit de chaînes $\prod_I (E,\bar{\varepsilon}_i)$ par l'application diagonale, dans lequel $(E,\bar{\varepsilon}_i)_{i\in I}$ est la famille des renforcements de (E,ε). Si α est solution du problème, l'étude d'ensembles α-ordonnés se ramène donc, modulo un produit direct, à l'étude des chaînes α-ordonnées dont on connaît l'arithmétique.

Les seuls α répondant au problème sont les π_ν, π_ν^*, $\pi_\nu^*+\pi_\mu$ ou η pour $\nu,\mu<\omega_1$ avec $\pi_0 = \omega$ et $\pi_\nu = \pi_{\nu-1}\cdot\omega$ si ν est isolé, $\pi_\nu = \underset{\mu<\nu}{S}\ \pi_\mu$ voir [1].

Problème 2. - Quels sont les α tels que pour tout ensemble α-ordonné (E,ε) ayant toutes ses parties libres finies, pour tout renforcement $(E,\bar{\varepsilon})$ de (E,ε) ce renforcement soit α-ordonné ? Ce problème de même intérêt que le précédent et résolu de façon indépendante a exactement les mêmes solutions ! On en ignore la raison profonde [1].

Problème 3. - Quels sont les α tels que si (E,ε) est un ensemble ordonné vérifiant d'une part pour toute chaîne C de (E,ε) on a $\tau(C)<\alpha$ (en particulier (E,ε) est α-ordonné), d'autre part toute partie libre de (E,ε) est au plus dénombrable, alors E est au plus dénombrable ? La résolution de ce problème permet en particulier de résoudre ceci : Soit X un ensemble de cardinal ω_1, f et g deux injections de X dans ω_1 et λ respectivement, et sur X soit $\leqslant$ l'ordre défini par $x\leqslant y$ ssi $f(x) \leqslant f(y)$ et $g(x) \leqslant g(y)$, alors les chaînes et les parties libres de X sont dénombrables. De plus X est artinien et si on tronque X de telle sorte que les chaînes restantes ne dépassent pas un ordinal dénombrable α fixé, l'ensemble restant est-il dénombrable ?. On peut montrer que le problème 3 admet comme solution tous les genres de chaînes dispersés.

APPENDICE.

Toutes les chaînes considérées dans la suite seront dénombrables. Si α est une chaîne, on dit que α est *dispersée* si α est η-ordonné.

De plus soit $(\alpha_n)_{n<\omega}$ une suite, on appelle ω-somme ou ω^*-somme des (α_n) la chaîne $\alpha' = \underset{n<\omega}{S}\, \alpha_n$ ou $\alpha'' = \underset{n<\omega^*}{S}\, \alpha_n$ respectivement. Si (α_n) est une suite, on dit qu'elle est monotone si $m\leqslant n$ implique $\alpha_m \leqslant \alpha_n$ et quasi-monotone si pour tout m il existe $n\geqslant m$ tel que $\alpha_m \leqslant \alpha_n$, et une ω-somme d'une suite de ce type est appelée ω-somme monotone ou quasi-monotone respectivement.

1. - Soit $(\mathcal{D}_\nu)_{\nu<\omega_1}$ la famille d'ensemble de chaînes dispersées définie par :

- $\mathcal{D}_0$ contient 0 et 1.
- Si $(\mathcal{D}_\nu)_{\nu<\mu}$ est définie, alors $\mathcal{D}_\mu$ est l'ensemble des ω-sommes et ω^*-sommes d'éléments de $\bigcup_{\nu<\mu} \mathcal{D}_\nu$. Posons $\mathcal{D} = \bigcup_{\nu<\omega_1} \mathcal{D}_\nu$.

2. - Soient $\mathcal{D}_{qm}$ et $\mathcal{D}_m$ définies de la même façon en remplaçant ω-sommes et ω^*-sommes par ω-sommes et ω^*-sommes quasi-monotones et par ω-sommes et ω^*-sommes monotones respectivement.

Modulo les résultats de COROMINAS [4], LAVER [6], on peut montrer que :

a. $\mathcal{D}$ est la classe des genres de chaînes dispersés.

b. $\mathcal{D}_m$ est la classe des genres de chaînes dispersés impartibles.

c. $\mathcal{D}_{qm}$ est la classe des genres de chaînes dispersés indécomposables.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BONNET : *Stratification et extension des genres de chaînes dénombrables*. C.R.A.S. t.269 , p.880 (1969).

[2] BONNET : *Catégorie et α-catégorie des ensembles ordonnés*. Thèse 3ème Cycle (1969) Lyon.

[3] BONNET et POUZET : *Extension et Stratification d'ensembles dispersés*. C.R.A.S. t.268, p.1512 (1969).

[4] COROMINAS : *Arithmétique des chaînes dispersées*. (Lyon - non publié).

[5] FRAISSE : *Sur la comparaison des types d'ordres*. C.R.A.S. t.226, p.1330 (1948).

[6] LAVER : *On FRAISSE' s order type conjecture*. Annals of Math. Vol.93, n°1, p.89-111 (1971).

[7] MITCHELL : *Theory of categories*.

[8] POUZET : *Sections initiales d'un ensemble ordonné*. C.R.A.S. t.269, p.113 (1969).