

JACQUES BICHOT

Modules continus

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1971,
tome 8, fascicule 1
, p. 55-61

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1971__8_1_55_0

© Université de Lyon, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MODULES CONTINUS

Jacques BICHOT

Utumi étudia dans plusieurs articles des anneaux, et particulièrement des anneaux réguliers, possédant une propriété plus faible que l'auto-injectivité : il les appelle anneaux continus. En nous inspirant de ses travaux, nous avons cherché à dégager divers affaiblissements de la notion de module *quasi-injectifs*. La seule qui soit à notre connaissance, entièrement originale est celle de module *fortement continu*. Parmi les résultats relatifs aux anneaux d'endomorphismes, le plus intéressant est sans doute celui qui montre que l'anneau des endomorphismes d'un module continu et très complémenté est continu à droite.

1. Terminologie .

On désigne toujours par M un module à gauche sur un anneau unitaire A .

Pour les notions relatives aux sous-modules compléments, facteurs directs absolus, cf. [4] . Comme en [1], nous appelons *infra-injectifs* les modules dont tout sous-module complément est facteur direct absolu. Suivant [2] , nous disons que M est *bien complémenté* lorsque tout sous-module de M possède une plus grande extension essentielle dans M .

Nous introduisons en outre le vocabulaire suivant :

(1.1) M est *directement complémenté* si tout sous-module complément de M en est facteur direct (il est équivalent de dire que tout sous-module de M est essentiel dans un facteur direct de M).

(1.2) M vérifie la *propriété d'addition des facteurs directs* lorsque, si N et N' sont des facteurs directs de M tels que $N \cap N' = 0$, alors $N \oplus N'$ est facteur direct de M (il est équivalent de dire que, si N et N' sont des facteurs directs tels que $N \cap N'$ soit encore facteur direct, alors $N + N'$ est facteur direct, ou encore que, si N et N' sont des facteurs directs tels que $N \cap N' = 0$, il existe un supplémentaire de N contenant N').

(1.3) M est *iso-direct* si tout sous-module de M isomorphe à un facteur direct de M est lui-même facteur direct ; M est *iso-complémenté* si tout sous-module isomorphe à un sous-module complément est aussi un complément.

(1.4) M est *continu* si M est iso-direct et directement complémenté.

(1.5) Un *endomorphisme* φ de M est *continu* si $\text{Ker}(\varphi)$ est un sous-module complément de M (il revient au même de dire que, si N est un sous-module complément de M contenu dans $\text{Im}(\varphi)$, alors $\varphi^{-1}(N)$ est complément, ou encore que, si X est un sous-module contenant $\text{Ker}(\varphi)$ et Y une extension essentielle de X dans M , alors $\varphi(X)$ est essentiel dans $\varphi(Y)$).

(1.6) M est *très bien complémenté* s'il est bien complémenté et si chaque endomorphisme de M est continu (exemple : les modules dont le sous-module singulier est nul).

(1.7) M est *fortement continu* si M est infra-injectif et si tout monomorphisme d'un sous-module de M dans M se prolonge en un endomorphisme de M .

2. Propriétés générales.

(2.1) Pour que M soit infra-injectif, il faut et il suffit que M soit directement complémenté et vérifie la propriété d'addition des facteurs directs.

(2.2) Soit M un module tel que tout monomorphisme d'un sous-module

de M dans M se prolonge en un endomorphisme de M . Alors M est iso-direct. En particulier si M est fortement continu, alors M est continu.

(2.3) Si M est continu, M est infra-injectif.

(2.4) Pour que M soit fortement continu, il faut et il suffit que M soit stable par les endomorphismes continus de son enveloppe injective.

(2.5) Chacune des propriétés :

- i) M est directement complémenté ;
- ii) M vérifie la propriété d'addition des facteurs directs ;
- iii) M est iso-direct ;
- iv) M est iso-complémenté ;
- v) M est continu ;
- vi) M est fortement continu ;
- vii) Tout endomorphisme de M est continu ;
- viii) M est très bien complémenté ;

se conserve par passage à un facteur direct de M .

(2.6) Lorsque M est quasi-injectif, les deux propriétés : tout endomorphisme de M est continu ; M est très bien complémenté - restent valables pour chaque sous-module de M (ces propriétés sont alors en fait équivalentes ; cf. (3.8)).

(2.7) Soit N un sous-module de M , $f : N \rightarrow M$ un morphisme tel que $N \cap f(N) = 0$, P et Q des extensions essentielles maximales de N et $f(N)$ dans M . Si $M' = P \oplus Q$ est iso-complémenté (ce qui est le cas lorsque M est continu), alors il existe un prolongement $g : P \rightarrow M$ de f tel que $g(P) \subset Q$.

(2.8) Soit $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ un module continu, avec $n > 1$. Si, pour chaque k , M_k est isomorphe à un sous-module de $\bigoplus_{i \neq k} M_i$, alors M est quasi-injectif. En particulier, s'il existe un entier $n > 1$ tel que M^n soit continu, alors M est quasi-injectif (et s'il existe un module libre ayant une base formée de 2 éléments au moins, qui soit continu, alors A est auto-injectif à gauche).

(2.9) Soit A un anneau.

a) si A est intègre, alors A est iso-direct à gauche $\Leftrightarrow A$ est iso-direct à droite $\Leftrightarrow A$ est un corps.

b) Tout anneau régulier (au sens de Von Neumann) est iso-direct (à droite et à gauche).

c) Si A est un anneau de Baer, on a équivalence entre : A est régulier ; A est iso-direct à droite ; A est iso-direct à gauche.

d) Si A est un anneau régulier, alors : A est continu à gauche $\Leftrightarrow A$ est directement complété à gauche $\Rightarrow A$ est un anneau de Baer.

e) Soit A un anneau semi-premier commutatif, et I un idéal de A . Le seul complément relatif de I est $\text{Ann}(I)$ et la plus grande extension essentielle de I est donc $\text{Ann}(\text{Ann}(I))$.

f) Pour un anneau commutatif A , on a, en notant A^Δ l'idéal singulier :

A est un anneau de Baer $\Leftrightarrow A^\Delta = 0$ et A est directement complété $\Leftrightarrow A^\Delta = 0$ et A est infra-injectif.

(Dans le cas non commutatif on a encore : $A_g^\Delta = 0$ et A directement complété à gauche $\Rightarrow A$ de Baer $\Rightarrow A_d^\Delta = 0$).

3. Anneaux d'endomorphismes.

Soient E l'anneau des endomorphismes de M , J l'idéal bilatère de E formé des endomorphismes de M dont le noyau est essentiel dans M , et $\bar{E} = E/J$ l'anneau associé de M (cf [3]). On notera E_M etc.. s'il intervient plusieurs modules.

On sait que, si I est l'enveloppe injective de M , il existe un monomorphisme canonique de \bar{E}_M dans \bar{E}_I obtenu en associant à la classe \bar{f} d'un endomorphisme f de M la classe \bar{g} d'un prolongement quelconque de f à I .

(3.1) Soient M un module fortement continu et I son enveloppe injective. Le monomorphisme canonique $\bar{E}_M \rightarrow \bar{E}_I$ est alors un isomorphisme (en particulier l'anneau associé à un module fortement continu est régulier auto-injectif à droite).

(3.2) Soit M un module continu. J_M est alors le radical de Jacobson de E_M et l'anneau associé \bar{E}_M est régulier (pour un anneau continu à gauche, on a donc équivalence entre la régularité, la nullité du radical de Jacobson, la nullité de l'idéal singulier à gauche).

(3.3) Soit M un module infra-injectif. Les familles finies d'idempotents orthogonaux de \bar{E} se relèvent dans E . (c'est-à-dire que si u_1, \dots, u_n sont des idempotents orthogonaux dans \bar{E} , il existe des projecteurs orthogonaux p_1, \dots, p_n de M tels que $u_i = \bar{p}_i$).

(3.4) On sait que si l'anneau des endomorphismes d'un module M est local alors M est indécomposable. Réciproquement, lorsque M est continu, si M est indécomposable, alors E est local.

(3.5) Soit M un module continu très bien complémenté. L'anneau des endomorphismes de M est alors régulier et continu à droite.

(3.6) Etant donné un sous-module X du module M , on notera $Q(X)$ l'intersection des noyaux d'endomorphismes de M contenant X , et si M est bien complémenté, $\omega(X)$ la plus grande extension essentielle de X dans M .

a) Si M est très bien complémenté, alors $\omega(X) \subseteq Q(X)$.

b) Si M est très bien complémenté et directement complémenté, alors $\omega(X) = \varphi(X)$.

Notons alors $F(X)$ l'idéal à gauche de E formé des endomorphismes qui s'annulent sur X , on a $F(X) = Ep$, où p est un projecteur sur un supplémentaire de $\omega(X)$, et $\omega(X) = \text{Ann}_d(F(X)).M$.

c) Si M est continu et très bien complémenté, alors pour tout idéal à droite K de E , on a $\omega(K) = \text{Ann}_d(\text{Ann}_g(K))$ et $\omega(K.M) = \omega(K).M$.

En particulier, pour un anneau régulier continu à gauche A , on a pour tout idéal à gauche K de A : $\omega(K) = \text{Ann}_g(\text{Ann}_d(K))$ (remarquer que A est alors un anneau de Baer).

(3.7) Soit M un module infra-injectif et N un sous-module essentiel de M . Pour que N soit infra-injectif, il faut et il suffit que N soit stable par les projecteurs de M .

(3.8) Soit M un module infra-injectif ; on a équivalence entre :

- a) M est bien complémenté;
- b) Les facteurs directs de M sont stables par les endomorphismes de M à noyau essentiel ;
- c) Tout endomorphisme φ de M tel qu'il existe un facteur direct K vérifiant la condition $\text{Im}(\varphi) \subset K \subset \text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Ker}(\varphi)$ essentiel dans M , est nul.

(a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) est vrai sans hypothèse sur M).

En particulier, un module infra-injectif dont tous les endomorphismes sont continus est bien (et même très bien) complémenté.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. BICHOT *Essentialité et importance dans les modules.*
Thèse 3e cycle Lyon (1968).
- [2] J.Y. CHAMARD-BOIS *Compléments et modules riches en co-irréductibles.* Thèse 3e cycle (1967).
- [3] L. LESIEUR et
R. CROISOT *Cœur d'un module.* Journal de Math.
pures et appl. tome XLII fasc. 4 (1963)
367-407.
- [4] G. RENAULT *Etude des sous-modules compléments
dans un module.* Thèse (1966).
- [5] Y. UTUMI *On continuous rings and self injective rings*
Trans. Am. Math. Soc. vol. 118 (1965) 158-173.
-

Manuscrit remis le 12 septembre 1971.

J. BICHOT
E.S.I. Beyrouth' B.P. 1314 - LIBAN
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 nov. 1918
69 - VILLEURBANNE