ALAIN BOUVIER

Demi-groupes avec base et demi-groupes atomiques

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1971, tome 8, fascicule 1
, p. 23-54
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1971__8_1_23_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1971 t. 8-1

DEMI-GROUPES AVEC BASE ET DEMI-GROUPES ATOMIQUES.

Alain BOUVIER

Ce travail est une *étude comparative* de différentes notions de demi-groupes avec bases, d'une part entre elles d'autre part avec la notion de demi-groupes atomiques que nous avons introduits dans [3].

Dans la première partie, nous comparons entre eux les travaux de Tamura, Kasahara, Aubert, Knight et Storey. Nous montrons l'identité des demi-groupes avec base au sens de Tamura et au sens de Aubert (nous les appelons <u>TA-demi-groupes</u>) ainsi que l'identité des demi-groupes avec base au sens de Knight et Storey et au sens de Kasahara (nous les appelons <u>KSK-demi-groupes</u>).

Nous introduisons la notion de demi-groupes à longueur maximum de factorisation (demi-groupes vérifiant la condition (*) de Kasahara) et les demi-groupes équidivisibles présentés par Knight et Storey comme généralisation des demi-groupes libres. Nous montrons que tout demi-groupe libre est équidivisible et à longueur maximum de factorisation, que ces derniers sont des KSK-demi-groupes et que les KSK-demi-groupes sont des TA-demi-groupes. Nous donnons des exemples montrant que les réciproques sont inexactes et des conditions suffisantes pour que certains des demi-groupes présentés soient des demi-groupes libres.

Dans la seconde partie, nous commençons par étudier les *demi-groupes atomiques à gauche* et à préciser leurs liens avec les TA-demi-groupes à gauche. Nous appelons *demi-groupe atomique* tout demi-groupe atomique à gauche et à droite. Nous démontrons que le demi-groupe simple de BRUCK $\mathcal{C}(D)$ est atomique si et seulement si D est un groupe, ce qui prouve, en particulier, l'atomicité du demi-groupe bicyclique.

Nous examinons ensuite les demi-groupes atomiques forts. Nous montrons que tout demi-groupe de type (R) fini est soit un groupe soit un demi-groupe atomique fort avec zéro, puisque tout KSK-demi-groupe est atomique fort, nous donnons des conditions suffisantes pour que les notions des KSK-demi-groupes, de TA-demi-groupes, de demi-groupes atomiques à gauche, de demi-groupes atomiques et de demi-groupes atomiques forts soient équivalentes.

PREMIERE PARTIE : Demi-groupes avec bases

§1 - *Demi-groupes libres - Demi-groupes équidivisibles*

Soit X un ensemble non vide ; on appelle *demi-groupe libre sur l'ensemble* X tout couple (D, d), où D est un demi-groupe et d : $X \longrightarrow D$ une application, tel que si (D', d') est un couple formé d'un demi-groupe D' et d'une application $d' : X \longrightarrow D'$, il existe un unique homomorphisme de demi-groupes $f : D \longrightarrow D'$ tel que $d' = f_o d$. Par abus de language, on dit que D est un demi-groupe libre sur X. Le demi-groupe libre sur un ensemble X est unique à un isomorphisme près.

On note $\mathcal{F}_X$ l'ensemble des suites finies d'éléments de X. C'est un demi-groupe sur X pour la loi définie par juxtaposition :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)(y_1, y_2, \ldots, y_p) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p)$$

On identifie X à une partie de $\mathcal{F}_X$ au moyen de l'injection : $d_x : x \longmapsto (x)$. On dit qu'un demi-groupe D est un *demi-groupe libre* s'il existe un ensemble X tel que D soit isomorphe à $\mathcal{F}_X$. Les éléments d'un demi-groupe libre sont appelés des *mots*.

(I-1) *Lemme : Un demi-groupe* D *est libre si et seulement s'il contient un complexe* B *tel que :*

- B *engendre* D *(on écrit* $\langle B \rangle = D$)
- *Si les* a_i *et les* b_j *sont des éléments de* B *alors* $a_1 a_2 \ldots a_n = b_1 b_2 \ldots b_p$ *entraine* $n=p$ *et si* $1 \leq i \leq n$ $a_i = b_i$

Démonstration

- Si $D \simeq \mathcal{F}_X$ il suffit de prendre B = X.
- Soit B un complexe de D vérifiant les deux conditions de l'énoncé, et soit $i : B \longrightarrow D$ l'injection canonique.

$$\begin{tikzcd} & D \\ B \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "d_B"'] & \\ & \mathcal{F}_B \arrow[uu, "f"'] \end{tikzcd}$$

Par définition du demi-groupe libre sur B, il existe un unique homomorphisme de demi-groupes $f : \mathcal{F}_B \longrightarrow D$ tel que $f_o d_B = i$.

Puisque f est un homomorphisme de demi-groupes :

$f((b_1, \ldots, b_n))=f((b_1)\ldots(b_n)) = f_o d_B(b_1)\ldots f_o d_B(b_n)=b_1\ldots b_n$.
Comme B engendre D, f est surjective. f est injective, car $f((b_1, \ldots, b_n)) = f((c_1, \ldots, c_p))$ entraine $b_1\ldots b_n=c_1\ldots c_p$ d'où $n = p$ et si $1\leqslant i\leqslant n$ $b_i = c_i$.

Soit D un demi-groupe. On note π l'homomorphisme surjectif de $\mathscr{F}_D$ sur D défini par $\pi : (a_1, \ldots, a_n)\longmapsto a_1\ldots a_n$. Il vérifie $\pi_o d_D = 1_D$. Lorsque $\pi(w) = d$, on dit que le mot w est une *factorisation de* d. Si $w = (a_1, \ldots, a_n)$ $n = l(w)\in \mathbb{N}^*$ est appelé *longueur du mot* **w**. $l : \mathscr{F}_D \longrightarrow \mathbb{N}^*(+)$ est un homomorphisme de demi-groupes.

Définition : On dit que le mot $w' = (b_1,\ldots,b_m)\in\mathscr{F}_D$ *raffine* le mot $w = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathscr{F}_D$ (on écrit $w'\leqslant w$) s'il existe des entiers naturels $i_0, i_1, \ldots, i_n$ tels que $i_0=0<i_1<i_2 \ldots<i_{n-1}<m=i_n$ et tels que

$$a_1=b_1b_2\ldots b_{i_1} \;;\; a_2 = b_{i_1+1}b_{i_1+2}\ldots b_{i_2} \;;\; \ldots,$$

$$a_n = b_{i_{n-1}+1}\, b_{i_{n-1}+2}\ldots b_m.$$

On remarque que :

(+) $w'\leqslant w$ entraîne $\pi(w') = \pi(w)$ et $l(w')\geqslant l(w)$.

(I-2) Lemme

La relation $\leqslant$ est un ordre partiel compatible sur $\mathscr{F}_D$.

Démonstration : Cette relation est réflexive et transitive. Elle est antisymétique car si $w' = (b_1, \ldots, b_m)$ raffine $w=(a_1,\ldots,a_n)$ avec les notations introduites plus haut, compte tenu de (+), on a n = p, d'où $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, ..., i_{n-1} ce qui entraine $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n$.

- Cet ordre n'est pas nécessairement total : dans $\mathfrak{F}_{\mathbb{N}(.)}$, w = (2, 3) et w' = (1 ; 4) sont incomparables puisque $\pi(w) \neq \pi(w')$.

- Il est compatible ; vérifions le à gauche. Si $w' = (b_1, \ldots, b_m)$ raffine $w = (a_1, \ldots, a_n)$, si $w''=(c_1,\ldots,c_p)$, avec les notations introduites plus haut :

$c_1=c_1;\ldots;c_p=c_p$; $a_1=b_1b_2\ldots b_{i_1};\ldots;$ $a_n=b_{i_{n-1}+1}b_{i_{n-1}+2}\ldots b_m$.

Ce qui montre que le mot w"w' raffine le mot w"w.

<u>Remarque</u> : On verrait de la même façon que si $(a_1,\ldots,a_n)$ raffine $(b_1,\ldots,b_p)$, alors $(a_1, \ldots,a_n,x)$ raffine $(b_1,\ldots,b_p x)$.(++).

<u>Notations</u>. Si le demi-groupe D possède un élément neutre bilatère, on le note e_D. Dans ce cas, $U_d(D)$, -respectivement $U_g(D)$-désigne l'ensemble des éléments de D inversibles à droite, -respectivement à gauche- Sinon, on pose : $U_d = U_g = \emptyset$.

Si $w \in \mathfrak{F}_D$, on note u(w) le nombre de lettres de w appartenants à U_d. L'application $u : \mathfrak{F}_D \longrightarrow \mathbb{N}(+)$ est un homomorphisme de demi-groupes. On pose a(w) =l(w) - u(w).

<u>*(I-3) Lemme*</u>

a) - L'application $a : \mathfrak{F}_D \longrightarrow \mathbb{N}(+)$ *est un homomorphisme de demi-groupes.*

b) - Si w' *raffine* w *alors* $a(w') \geqslant a(w)$.

<u>Démonstration</u>. a) -a, différence de deux homomorphismes à valeurs dans un demi-groupe commutatif est un homomorphisme de demi-groupe.

b) - Si $w' = (b_1, \ldots, b_m)$ raffine $w = (a_1, \ldots, a_n)$, il existe des entiers naturels $i_o = 1 < i_1 < \ldots < i_n = m$, tels que si $1 \leqslant j \leqslant n$ alors :

$$a_j = b_{i_{j-1}+1} \, b_{i_{j-1}+2} \cdots b_{i_j}$$

Comme U_d est stable, si $a_j \notin U_d$, l'un au moins des termes de sa factorisation n'appartient pas à U_d. Dans ce cas, on a donc :

$$a(a_j) = 1 \text{ et } a((b_{i_{j-1}+1}, b_{i_{j-1}+2}, \ldots, b_{i_j})) \geqslant 1$$

à **droite**, si a_j appartient à $v_{d'}$.

$$\text{soit : } a((b_{i_{j-1}+1}, \ldots, b_{i_j})) \geqslant a(a_j)$$

Si $a_j \in U_d$, alors $a(a_j) = o$;

Dans ce cas, on a encore $a((b_{i_{j-1}+1}, \ldots, b_{i_j})) \geqslant a(a_j)$. Comme **a** est homomorphisme, finalement : $a(w') \geqslant a(w)$.

Notations. $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ désignent les équivalences de Green (5), définies sur D par $a \mathcal{R} b \Longleftrightarrow aD^1 = bD^1$ et $a \mathcal{L} b \Longleftrightarrow D^1 a = D^1 b$. $\mathcal{R}$ est l'équivalence associée au préordre ${}_D|$ défini sur D par $a{}_D|b \Longleftrightarrow bD^1 \subseteq aD^1$, appelé relation de divisibilité à gauche (2).

On note S_n le groupe symétrique de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Définition.: On dit que deux mots $w = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $w' = (b_1, \ldots, b_p)$ de $\mathcal{F}^1_D$ *sont* *isomorphes à gauche* (*on écrit* $w \sim w'$) *si* :

- $n = l(w) = p = l(w')$ et $\pi(w) = \pi(w')$.

- Il existe $\tau \in S_n$ tel que pour tout i si $1 \leqslant i \leqslant n$ alors $a_i \mathcal{R} b_{\tau i}$.

La relation "$\sim$" est une congruence sur $\mathcal{F}_D$. U_d est vide ou est une classe modulo $\mathcal{R}$; donc $a_i \in U_d \Longleftrightarrow b_{\tau i} \in U_d$;

(I-4) Lemme : *Si* w *et* w' *sont deux mots isomorphes à gauche, alors :*

$$u(w) = u(w') \text{ et } a(w) = a(w').$$

Définition : Soient a, b, c, d *quatre éléments d'un demi-groupe* D. *On dit que* $s \in D^1$ *est solution de l'équation* ab=cd *si* as=c *et* sd = b *ou si* a = cs et sb = d.

Lorsque w est un raffinement connu à w' et w", on écrit : $w \in w' \wedge w''$.

(I-5) Lemme (7) : *Dans un demi-groupe* D, *les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

a)- *Deux factorisations de tout élément de* D *possèdent un raffinement commun.*

b)- *Toute équation* ab = cd *possède une solution dans* D^1.

Définition : On appelle demi-groupe équidivisible (7) tout demi-groupe qui vérifie les assertions équivalentes du lemme I-5

On remarque que si D est équidivisible, il en est de même de D^1 et D^0.

(I-6) Théorème : *(Knight et Storey)*

Tout demi-groupe libre est équidivisible

Démonstration :

Soit wv = w'v' une équation dans $\mathcal{F}_X$ avec $w = (x_1, \ldots, x_n)$,

$v = (y_1, \ldots, y_m)$, $w' = (z_1, \ldots, z_p)$ et $v' = (t_1, \ldots, t_q)$. On a donc :

$$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = (z_1, \ldots, z_p, t_1, \ldots, t_q).$$

$n + m = p+q$, les lettres correspondantes des deux mots sont deux à deux égales.

+ si $n = p$ alors $m = q$ et $1 \in \mathcal{F}^1_X$ est solution.

+ si $n<p$ alors $(z_{n+1}, \ldots, z_p)$ est solution.

+ si $n>p$ alors $(x_{p+1}, \ldots, x_n)$ est solution.

La réciproque de ce théorème est inexacte.

§2-Demi-groupes de Knight-Storey-Kasahara.

<u>(2- I) Lemme</u> : *Si* B *est un complexe d'un demi-groupe* D, *si* $\langle B\rangle = D$, *les assertions suivantes sont équivalentes* :

(a) - $B = D-D^2$

(b) - $B \quad D-D^2$

(c) - $n>1$ *entraîne* $B^n \cap B = \emptyset$

<u>Démonstration</u> :

Il est clair que (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) montrons (c) $\Longrightarrow$ (a). D'une part si $b \in B$ et si $b = dd'$, comme $D = \langle B\rangle$ on aurait $b(b_1 b_2 \ldots b_n)(c_1 c_2 \ldots c_p)$ avec b_i et c_j dans B, donc $b \in B^{n+p}$ avec $n+p \geqslant 2$ ce qui est contradictoire ; par conséquent

$$B \subseteq D - D^2$$

D'autre part, si $x \in D-D^2$, comme $\langle B\rangle = D$, on peut écrire $x = b_1 b_2 \ldots b_n$ avec $b_i \in B$, et d'après (c), $n = 1$, donc $x = b_1 \in B$.

$$D-D^2 \subseteq B$$

Définition. *On appelle demi-groupe de Knight-Storey-Kasahara ou KSK-demi-groupe tout demi-groupe* D *tel que* $\langle D-D^2\rangle = D$.
On dit alors que $\langle D-D^2\rangle$ *est la KSK-base de* D .

(2-2) Théorème : *Tout demi-groupe libre est un KSK-demi-groupe*

Démonstration : Conséquence immédiate du lemme 1-1.

La réciproque est inexacte ; le demi-groupe ci-contre est un KSK-demi-groupe de base $B = \{a\}$, mais n'est pas libre.

	a	b	o
a	b	o	o
b	o	o	o
o	o	o	o

Cet exemple montre qu'un KSK-demi-groupe peut posséder des zéros à gauche ou à droite ; par contre :

(2-3) Lemme : *Dans un KSK-Demi-groupe, il n'existe ni élément neutre à droite, ni élément neutre à gauche.*

Démonstration : Si e est un élément neutre à gauche d'un KSK-demi-groupe D, e peut s'écrire $e = b_1b_2...b_n$ avec $b_i \in B$; donc :
$b_n = b_1b_2...b_nb_n \in B^{n+1}$ avec $b_i \in B$ et $n+1 \geqslant 2$ ce qui est absurde.

On peut remarquer que si D est un KSK-demi-groupe sans zéro alors D^o n'est pas un KSK-demi-groupe ; en particulier $\mathfrak{F}_X^o$ n'est pas un KSK-demi-groupe.

Définition : *Soit* D *un demi-groupe ; on dit que deux éléments* x *et* y *de* D *sont indépendants à gauche si* R_x *et* R_y *sont deux éléments incomparables de l'ensemble ordonné* $D/\mathcal{R}$. *Toute partie* A *de* D *dont les éléments sont deux à deux indépendants à gauche est appelée partie libre à gauche.*

On dit que $p \in D-U_d$ est irréductible à gauche si :

$$a_D| p \quad \text{entraîne } a \in U_d \text{ ou } a\mathcal{R}p$$

On dit que p est <u>irréductible</u> s'il est irréductible à droite et à gauche.

<u>(2-4) Théorème</u> : *Dans un KSK-demi-groupe, la base est une partie libre maximale ; c'est l'ensemble des éléments irréductibles.*

<u>*Démonstration*</u> : + Soit B la base d'un KSK-demi-groupe D ; puisque $B \subseteq D-D^2$, les éléments de B sont irréductibles à droite et à gauche.

+ B est une partie libre à droite et à gauche ; si par exemple b et b' sont deux éléments distincts de B et si $b_D| b'$, alors il existe x dans D tel que $b' = bx$. Comme $\langle B\rangle = D$ alors $x = b_1 b_2 \ldots b_n$ avec b_i B et $b' = bb_1 b_2 \ldots b_n$ donc $b' \in B^{n+1}$ ce qui est absurde.

+ C'est une partie libre maximale, car si L est une partie libre contenant strictement B, si $y \in L-B$, comme $\langle B\rangle = D$, $y = b_1 \ldots b_n$ avec $b_i \in B \subseteq L$, donc $b_{1D}| y$ ce qui contredit la liberté de L.

+ Soit P l'ensemble des éléments irréductibles de D, on a $B \subseteq P$; montrons l'inclusion opposée. Soit $p \in P$; comme $\langle B\rangle = D$, $p = b_1 \ldots b_n$, donc $b_{1D}| p$. Comme p et b_1 sont irréductibles, $b_{1D}| p$ entraîne $b_1 \mathcal{R} p$.

En particulier, $p_D| b_1$, c'est-à-dire : il existe $x \in D^1$ tel que $b_1 = px$. Comme $b_1 \notin D^2$ on a nécessairement $x = 1$ et $p = b_1 \in B$.

(2-5) *Lemme* : *Soit D un KSK-Demi-groupe de base B et $\pi : \mathfrak{F} \longrightarrow D$ l'homomorphisme canonique surjectif. π est un isomorphisme si et seulement si D est équidivisible.*

Démonstration : + Si π est un isomorphisme, D est un demi-groupe libre, donc est équidivisible (2-2).

+ Si D est équidivisible, π est injectif :

Supposons que $b_1b_2\ldots b_n = c_1c_2\ldots c_m = d$ avec b_i et c_j éléments de B. Ces deux factorisations de d possèdent un raffinement commun $(e_1, \ldots, e_p)$. On peut supposer que chaque $e_k \in B$. Alors, $(e_1, \ldots, e_p) = (b_1, \ldots, b_n)$, sinon au moins l'un des b_i admettrait une factorisation ce qui est absurde. On a donc : $(b_1, \ldots, b_n) = (e_1, \ldots, e_p) = (b_1, \ldots, c_m)$.

(2-6) *Théorème* : *(Knight et Storey)*

Tout KSK-demi-groupe équidivisible est libre.

§3-Demi-groupes à longueur maximum de factorisation.

Notation. On note $Z_g(D)$ ou Z_g l'ensemble des zéros à gauche du demi-groupe D, et $N_d(D)$ ou N_d, l'ensemble de ses éléments neutres à droite.

Définitions. 1) - On dit que D est un demi-groupe de type (R) à gauche (2) si : $(\forall d \in D)(\forall d' \in D)(dd' = d \Longrightarrow d \in Z_g \text{ ou } d' \in N_d)$.

On appelle demi-groupe de type (R) tout demi-groupe de type (R) à gauche et à droite.

2) - On dit qu'un demi-groupe D est un demi-groupe à longueur maximum de factorisation si :

$(\forall d \in D)(\exists n \in \mathbb{N}^*)\ (\forall w \in \mathfrak{F}_D)(\ \pi(w) = d \Longrightarrow l(w) \leq n)$.

<u>(3-1) Lemme</u> : *a) - tout demi-groupe libre est un demi-groupe à longueur maximum de factorisation.*

b) - Un demi-groupe à longueur maximum de factorisation est de type (R) *sans idempotent.*

Par contre, un demi-groupe à longueur maximum de factorisation (même simplifiable) n'est pas nécessairement un demi-groupe : $D = \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ |x| \geq 2\}$ est, pour la multiplication usuelle, un demi-groupe à longueur maximum de factorisation ; il n'est pas libre puisque $2.2 = (-2)(-2)$. De même, un demi-groupe de type (R) sans idempotent n'est pas nécessairement à longueur maximum de factorisation (6). On remarque encore qu'un demi-groupe à longueur maximum de factorisation est nécessairement infini mais pas nécessairement simplifiable.

<u>(3-2) Théorème:</u> *(Kasahara)*

Tout demi-groupe à longueur maximum de factorisation est un KSK-demi-groupe.

<u>*Démonstration*</u> : + Soit D un demi-groupe à longueur maximale de factorisation ; posons $B = D-D^2$ et montrons que $\langle B\rangle = D$.

+ Soit $d \in D$; il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $d = d_1 d_2 \ldots d_m$ entraîne $m \leq n$. donc $M = \{n \in \mathbb{N}^* ;\ d = d_1 d_2 \ldots d_m \Longrightarrow m \leq n\} \neq \emptyset$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ le plus petit élément de M.

+ Il existe $b_1, b_2, \ldots, b_k$ dans B tels que $d = b_1 b_2 \ldots b_k$, car si $d \in D^k$ alors l'entier $k-1$ serait un élément de M. Donc il existe $d_1, \ldots, d_k$ tels que $d = d_1 d_2 \ldots d_k$. Pour $1 \leq i \leq k$, d_i B car si l'un des d_i n'est pas un élément de B, il peut se factoriser, et d possède une factorisation de longueur supérieure à k+1 ce qui est absurde. D'où le résultat.

La réciproque de ce théorème est inexacte (6). De 3-2 et 2-6, on déduit :

(3-3) *Théorème (Knight et Storey)*

Tout demi-groupe équidivisible à longueur maximum de factorisation est un demi-groupe libre.

§4-Demi-groupes de Tamura-Aubert.

(4-1) *Lemme* : *Soit* B *un complexe d'un demi)groupe* D *tel que* $BD^1 = D$; *les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) - B *est minimal (pour l'inclusion) dans l'ensemble des complexes* X *de* D *tels que* $XD^1 = D$

b) - B *est un complexe libre.*

Démonstration : + Supposons que B soit un complexe minimal dans l'ensemble des complexes X de D tels que $XD^1 = D$ et ne soit pas libre. Par définition, il existe deux éléments a et b distincts de B tels que, par exemple, $b_D | a$. Posons $X = B-\{a\}$; on a b X donc : $b_D | a \Longrightarrow aD^1 \subseteq bD^1 \subseteq XD^1$.

Alors : $D = BD^1 = (X \cup \{a\})D^1 = XD^1 \cup aD^1 = XD^1$ avec $X \subset B$ ce qui est absurde.

+ Soit B un complexe libre tel que $BD^1 = D$. Si B n'est pas minimal dans l'ensemble des complexes X tels que $XD^1 = D$, il existe un complexe Y tel que $Y \subset B$ et tel que $YD^1 = D$.

Soit $b \in B-Y$; comme $b \in YD^1$, il existe $y \in Y$ tel que $y_D \backslash b$. Puisque $y \in Y$ et $b \notin Y$, on a $y \neq b$ ce qui contredit la liberté de B.

Définition : *On dit qu'un demi-groupe D est un demi-groupe de Tamura-Aubert à gauche, ou un TA-demi-groupe à gauche s'il possède un complexe libre B tel que* $BD^1=B$; *B est alors appelé une base à gauche au sens de Tamura-Aubert ou TA-base à gauche.*

On appelle TA-demi-groupe tout TA-demi-groupe à droite et à gauche et TA-demi-groupe fort tout TA-demi-groupe tel que toute TA-base à droite est une TA-base à gauche et réciproquement.

Il est évident que :

(4-2) Lemme : *Pour un complexe B d'un demi-groupe D, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

a) - $BD^1 = D$

b) - *Pour tout* $d \in D$ *il existe* $b \in B$ *tel que* $R_b \leq R_d$.

(4-3) Théorème : *Tout KSK-demi-groupe D est un TA-demi-groupe fort et la KSK-base de D est une TA-base de D.*

Démonstration : Soit D un KSK-demi-groupe de base B ; d'une part, B est libre (2-4) ; d'autre part, puisque $\langle B \rangle = D$, pour tout $d \in D$, il existe $b \in B$ tel que $R_b \leq R_d$, donc $BD^1 = D$(4-2).

Remarque : La réciproque de 4-3 est inexacte ; $\mathfrak{F}_X^o$ est un TA-demi-groupe fort mais n'est pas une KSK-demi-groupe

(4-4) Théorème (*Tamura*)

Dans un TA-demi-groupe à gauche D, deux TA-bases à gauche sont équipotentes. Si D est une TA-base à gauche de D, si, D *possède un élément neutre*, $B = \{u\}$ *avec* $u \in U_d$; *Sinon* B *est un système représentatif d'éléments irréductibles*

<u>*Démonstration*</u> : + Notons $\mathcal{M}(D/\mathcal{R})$ l'ensemble des éléments minimaux de $D/\mathcal{R}$; et soit B une TA-base à gauche de D. Si $b \in B$ alors $R_b \in \mathcal{M}(D/\mathcal{R})$; sinon il existe $d \in D$ tel que $R_d < R_b$. Comme B est une TA-base à gauche de D, il existe $b' \in B$ tel que $R_{b'} < R_d$ (4-2) ; on a donc $R_{b'} < R_b$ ce qui est absurde puisque B est libre à gauche.

L'application $b \longmapsto R_b$ de B dans $\mathcal{M}(D/\mathcal{R})$ est injective car B est libre à gauche ; elle est surjective car si $R_x \in \mathcal{M}(D/\mathcal{R})$, d'après (4-2), il existe $b \in B$ tel que $R_b \leqslant R_x$; comme R_x est minimal dans $D/\mathcal{R}$, on a $R_b = R_x \in \mathcal{M}(D/\mathcal{R})$.

$$\text{Card } B = \text{Card } \mathcal{M}(D/\mathcal{R}).$$

+ Si D est unitaire, alors $\mathcal{M}(D/\mathcal{R}) = \{U_d\}$. Comme $\{1\}$ est une TA-base à gauche, on a Card B = 1 et $B = \{u\}$ avec $u \in U_d$.

Si D n'est pas unitaire, dire que $R_b \in \mathcal{M}(D/\mathcal{R})$ équivaut à dire que b est irréductible à gauche. Comme B est libre à gauche et que Card B = Card $\mathcal{M}(D/\mathcal{R})$, B est un système représentatif d'éléments irréductibles à gauche.

(4-5) *Corollaire* (*Aubert*)

Un TA-demi-groupe à gauche est réunion de ses idéaux principaux à droite maximaux.

En effet, $xD^1 \subseteq yD^1 \Longleftrightarrow R_y \leqslant R_x$; donc dD^1 est un idéal à droite maximal si et seulement si $R_d \in \mathcal{M}(D/\mathcal{R})$. Si $d \in D$, d'après

(4-2), il existe $b \in B$ tel que $R_b \leq R_d$ donc tel que $d \in bD^1$ où bD^1 est un idéal à droite maximal.

Remarque. Soit D un demi-groupe non unitaire ; si $\mathcal{K}(D/\mathcal{R})$ n'est pas vide, un système représentatif d'éléments irréductibles à gauche n'est pas nécessairement une TA-base à gauche, même si D n'est pas unitaire. Par exemple, soit D_1 un demi-groupe de carré nul, $D_2 = \{e_2\}$ on pose $D = D_1 \cup D_2 \cup \{0\}$; on définit sur D une loi prolongeant celles de D_1 et D_2, tous les autres produits étant nuls. $\{e_2\}$ est un système représentatif d'éléments irréductibles à gauche. Ce n'est pas une TA-base à gauche car $e_2D^1 = \{e_2, 0\} \subset D$.

On peut préciser ceci en remarquant que lorsque D n'est pas unitaire et que $\mathcal{K}(D/\mathcal{R})$ n'est pas vide, un système représentatif d'éléments irréductibles à gauche est une TA-base à gauche si et seulement si pour tout $x \in D$, il existe $b \in B$ tel que $R_b \leq R_x$.

Définition : On dit qu'un complexe B *d'un demi-groupe* D *est une pseudo-base à gauche de* D *si* B *est une partie libre à gauche maximale*

(4-6) Lemme : Toute TA-base à gauche est une pseudo-base à gauche.

Démonstration : Soit B une TA-base à gauche de D ; par définition, B est libre à gauche. Si B n'est pas maximal, il existe $b_o \notin B$ tel que $B \cup \{b_o\}$ est libre. Comme $b_o \in D$, d'après (4-2), il existe $b \in B$ tel que $R_b \leq R_{b_o}$. Puisque $b_o \in B$, on a en fait

$R_b \subsetneq R_{b_o}$, ce qui contredit la liberté de $B \cup \{b_o\}$.

Le lemme suivant montre que la réciproque de (4-6) est inexacte : toute pseudo-base à gauche n'est pas nécessairement une TA-base à gauche.

(4-7) Lemme : *Dans tout demi-groupe, il existe une pseudo-base à gauche contenant une partie libre à gauche donnée.*

On peut faire un classement des demi-groupes de la façon suivante :

1ère classe : les demi-groupes sans TA-base à gauche ; par exemple $\mathbb{N}$ muni de la loi $x*y = \min(x, y)$

2ème classe : Les TA-demi-groupes àgauche possédant des pseudo-bases à gauche qui ne sont pas des bases à gauche. C'est le cas par exemple de tout demi-groupe commutatif unitaire principal qui n'est pas un groupe.(il existe de tels demi-groupes : le demi-groupe multiplicatif de tout anneau à valuation dont le groupe de valuation n'est pas discret) Un tel demi-groupe est avec TA-base ; par contre si aD est un idéal principal propre $\{a\}$ est une pseudo-base à gauche et n'est pas une TA-base à gauche de D

3ème classe : Les TA-demi-groupes à gauche tels que toute pseudo-base à gauche est une TA-base à gauche. Concernants ces derniers, on peut énoncer le théorème suivant qui étend au cas non commutatif un résultat de AUBERT (1).

(4-8) Théorème : *Si* D *est un demi-groupe unitaire, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) Tout pseudo-base à gauche est une TA-base à gauche.

b) D est un groupe.

Démonstration : (b)$\Longrightarrow$(a). Si D est un groupe, une pseudo-base à gauche est nécessairement réduite à un élément x et $xD = D$.

(a)$\Longrightarrow$(b). Soit e l'élément neutre de D ; $B = \{e\}$ est une TA-base à gauche de D. Soit $d \in D$; d'apèrs (4-6) comme d est libre à gauche, il existe une pseudo-base à gauche M contenant $\{d\}$. Par hypothèse, M est une TA-base à gauche ; d'après (4-4)

$$\text{Card } M = \text{Card } B = 1 \quad \text{donc} \quad M = \{d\}$$

Comme M est une TA-base à gauche $dD = D$, donc il existe $y \in D$ tel que $dy = e$; d est inversible à droite dans D. D est un groupe.

Remarque. On démontre (8) que dans un TA-demi-groupe à gauche, si B est une TA-base à gauche, les translations à gauche sont entièrement déterminées par les applications $f : B \longrightarrow D$ telles que

$$(\forall (b, b') \in B \times B)(\forall (x, y) \in D \times D)(bx = b'y \Longrightarrow f(b)x = f(b')y)$$

DEUXIEME PARTIE : Atomicité

§1-Demi-groupes atomiques à gauche.

On pose $Z = Z_g \cup Z_d$ (c'est un idéal bilatère) et $D^* = D - Z$. On appelle éléments non nuls les éléments de D^*

Définitions : *1) On dit qu'un demi-groupe D est atomique à gauche s'il possède un complexe B, formé d'éléments irr* *ductibles à gauche et tel que*

$$\langle B\rangle = D^{*} - U_d$$

2) On dit qu'un demi-groupe vérifie la <u>*condition*</u> *si* $N_g = \emptyset$ *ou si* $N_g = \{e_D\}$.

<u>*Exemple*</u> : Tout demi-groupe simple à droite est atomique à gauche, car dans un tel demi-groupe, tout élément est irréductible à gauche.

(1-1) permet de construire de nombreux demi-groupes atomiques à gauche.

<u>*(I-I) Théorème*</u> : *Si D est un demi-groupe de type (R) à droite vérifiant la condition* N_g *, si* $D/\mathcal{R}$ *et* $D/\mathcal{L}$ *vérifient la condition minimale alors D est un demi-groupe atomique à gauche.*

<u>*Démonstration*</u> : a)-Tout élément de D - U admet un diviseur à gauche irréductible à gauche.

On sait (2) que dans un demi-groupe de type (R) d'un côté on a : $U_d = U_g = U$. Soit $d \in D-U$ tel que $R_{d_1} < R_d$. Si d_1 n'est pas irréductible à gauche, il existe $d_2 \in D-U$ tel que $R_{d_2} < R_{d_1}$.

Ce raisonnement est fini ; sinon, il permettrait de construire, par récurrence, une suite strictement décroissante de $D/\mathcal{R}$, ce qui est absurde puisque $D/\mathcal{R}$ vérifie la condition minimale.

b) - Soit $d \in D^{*}-U$; si d n'est pas irréductible à gauche, d'après (a), il existe p_1 irréductible à gauche tel que $d = p_1 d_1$. Comme d n'est pas irréductible à gauche, on est assuré que $d_1 \notin U$. Puisque Z est un idéal bilatère de D

$p_1d_1 \notin Z \Longrightarrow d_1 \notin Z$ donc $d_1 \in D^*-U$. Si d_1 n'est pas irréductible à gauche, on peut refaire avec d_1 le raisonnement tenu pour d. Ce procédé est fini ; sinon, par récurrence, il permet de construire deux suites $(p_n)_{n\geqslant 1}$ et $(d_n)_{n\geqslant 1}$ où p_n est irréductible à gauche, $d_n \in D^*-U$ et telles que $d_n = p_{n+1}d_{n+1}$. En particulier, $d_{n+1} \mid_D d_n$ donc $L_{d_{n+1}} \subsetneq L_{d_n}$. Comme $D/\mathcal{L}$ vérifie la condition minimale, la suite décroissante $(L_{d_n})_{n\geqslant 1}$ est stationnaire. Il existe donc un entier n 1 tel que $L_{d_{n+1}} = L_{d_n}$. Comme D est un demi-groupe de type (R) à droite vérifiant la condition N_g,

$$d_{n+1} \in L_{d_n} \Longrightarrow \exists u \in U(D^1)\ d_{n+1} = ud_n.$$

Alors : $d_n = p_{n+1}d_{n+1} = p_{n+1}ud_n$; puisque $d_n \notin Z$, que D est de type (R) et vérifie la condition N_g

$$d_{n+1} = p_{n+1}ud_n \Longrightarrow p_{n+}u = e_D \Longrightarrow p_{n+1} \in U$$ ce qui est contradictoire.

Remarque : Ce théorème est une généralisation du résultat suivant (DUBREIL Algèbre-Gauthier-Villars th. 6 P. 217) : "Si D est un demi-groupe commutatif, unitaire, simplifiable, si $D/\mathcal{R}$ vérifie la condition minimale, tout élément de D qui n'est pas une unité est le produit d'un nombre fini d'éléments irréductibles.

Exemples : 1) - Tout demi-groupe fini, de type (R) à droite et vérifiant la condition N_g est un demi-groupe atomique à gauche.

2) - $D=\{x \in \mathbb{Z} ; |x| \neq 1\}$ muni de la loi $x*y = x|y|$

est un demi-groupe de type (R) à gauche vérifiant la condition N_d ; $D/\mathcal{R}$ et $D/\mathcal{L}$ vérifient la condition minimale donc D est un demi-groupe atomique à droite.

La notion de demi-groupe atomique d'un côté est latéralisée : on peut construire un demi-groupe atomique à gauche qui n'est pas atomique à droite. Voir "BOUVIER A. Demi-groupes avec bases - Séminaire P. LEFEBVRE 69/70 Exposés 14 et 15 Dep. Math. Univ. Lyon 1."

<u>(I-2) Théorème</u> : *Pour qu'un demi-groupe atomique à gauche soit un TA-demi-groupe à gauche, il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée :*

$$Z_g = D \ ; \ Z_g = o \ ; \ Z_g = \emptyset$$

si en outre $N_g = \emptyset$, tout système représentatif d'éléments irréductibles à gauche de D est une TA-base à gauche de D .

<u>*Démonstration*</u> : + Si $N_g \neq \emptyset$, D est un TA-demi-groupe à gauche ; supposons donc $N_g \neq \emptyset$.

+ Nous avons déjà vu que lorsque $Z_g = D$, D est un TA-demi-groupe à gauche.

+ Si $Z_g = \emptyset$, soit I un système représentatif d'éléments irréductibles à gauche. I est libre à gauche. Soit $d \in D$; deux cas sont possibles :

Si $d \in Z_d$, si l'on désigne par B un complexe de D formé d'éléments irréductibles à gauche, pour tout élément $b \in B$ on a $R_b \leqslant R_d$.

Si $d \in D^*$, il existe $b \in B$ tel que $R_b < R_d$. Comme I est un système représentatif d'éléments irréductibles à gauche, il existe $p \in I$ tel que $R_p = R_b \leqslant R_d$. D'après le lemme 1-4-2, cela montre que I est une TA-base à gauche de D.

+ Si $Z = \{0\}$, on voit de même que si $d \in D^*$, il existe $p \in I$ tel que $R_p \leqslant R_b$; comme pour tout $p \in I$ on a $R_p \leqslant R_o$, I est une TA-base à gauche de D.

Un TA-demi-groupe à gauche n'est pas nécessairement atomique à gauche ; en effet, soit D un demi-groupe de carré nul (c'est à dire un demi-groupe avec zéro bilatère w tel que pour tout couple d'éléments $xy = yx = w$; D^1 est un TA-demi-groupe à gauche. Soient D_1 et D_2 deux demi-groupes isomorphes au TA-demi-groupe à gauche précédent. On note e_1 et e_2 leur élément neutre respectif, w_1 et w_2 leur zéro bilatère. On pose $E = D_1 \cup D_2 \cup \{o\}$. $B = \{e_1, e_2\}$ est une TA-base à gauche de E ; mais E n'est pas atomique à gauche car ses éléments irréductibles à gauche sont e_1 et e_2, et $\langle\{e_1, e_2\}\rangle = \{e_1, e_2, o\} \subset E^*$.

Toutefois, on peut donner une condition suffisante pour qu'un TA-demi-groupe à gauche soit atomique à gauche :

(1-3) Lemme : *Pour qu'un TA-demi-groupe à gauche sans élément neutre à gauche soit atomique à gauche, il suffit qu'il soit de type* (R) *à droite et que* $D/\mathcal{L}$ *vérifie la condition minimale.*

Démonstration : Il est facile de voir que dans un TA-demi-groupe à gauche sans élément neutre à gauche, tout élément de D admet un diviseur à gauche irréductible à gauche ; on peut alors refaire la même démonstration que pour le théorème 1-1.

Remarques : Soit D un demi-groupe atomique à gauche, P l'ensemble des éléments de D irréductibles à gauche et non nuls. Supposons $P \neq \emptyset$. Alors

$$\mathcal{H} = \{B \; ; \; \emptyset \subset B \subseteq P \text{ et } \langle B\rangle = D^{*} - U_d\} \neq \emptyset$$

On peut au sujet des éléments de poser les questions suivantes : $\mathcal{H}$ possède-t-il des éléments minimaux pour l'inclusion ? Un élément minimal de est-il un système représentatif d'éléments iiréductibles à gauche non nuls ? Un système représentatif d'éléments irréductibles à gauche non nuls est-il un élément minimal de ? Nous connaissons quelques réponses à ces questions :

+ Tout élément A de $\mathcal{H}$ contient un système représentatif d'éléments irréductibles à gauche non nuls. Car si I est un tel système, si $p \in I$ alors $p = a_1 a_2 \ldots a_n$ avec $a_i \in A$ donc $p \mathcal{R} a_1$.

+ Lorsque D est commutatif, les éléments minimaux de $\mathcal{H}$ sont les systèmes représentatifs d'éléments irréductibles non nuls.

+ Dans $\mathcal{E}(p, q)$, $\{q\}$ est un système représentatif d'éléments irréductibles à gauche non nuls ; ce n'est pas un élément de $\mathcal{H}$ car $\langle\{q\}\rangle$ $D-U_d$.

+ Toujours dans $\mathcal{E}(p, q)$, $\{q, qp^2\}$ est un élément minimal de $\mathcal{H}$ mais ce n'est pas un système représentatif d'éléments irréductibles à gauche non nuls de D puisque q et qp^2 sont associés à gauche.

§2 - Demi-groupes atomiques

Définition : On dit qu'un demi-groupe est atomique s'il est atomique à gauche et à droite.

Dans un tel demi-groupe, tout élément de $D^*-(U_d \cup U_g)$ possède une factorisation en éléments irréductibles à gauche (appelée factorisation complète à gauche) et une factorisation en éléments irréductibles à droite. Mais on n'exige pas qu'une factorisation complète à gauche soit une factorisation complète à droite, ni l'inverse.

On sait que tout demi-groupe D est immersible dans un demi-groupe simple $\mathcal{C}(D)$: Théorème de BRUCK (5). $\mathcal{C}(D)$ est appelé demi-groupe de BRUCK associé à D. Tout élément de $\mathcal{C}(D)$ s'écrit de façon unique $q^m x p^n$ avec m, $n \in \mathbb{N}$ et $x \in D$. La loi de $\mathcal{C}(D)$ et soumise aux règles suivantes :

$$pq = 1 \; ; \; p^n q^n = 1 \; ; \; p^o = q^o = 1 \; ; \; p\bar{x} = p \; ; \; \bar{x}q = q.$$

On démontre également que si $P = \{p^n\}_{n \geq o}$ alors :

$$R(q^i \bar{x} q^j) = q^i \overline{R(x)} P \text{ et } U_d(\mathcal{C}(D)) = \overline{U_d(D^1)} P$$

(2-1) Théorème : ***Atomicité du demi-groupe de BRUCK***

Le demi-groupe de BRUCK $\mathcal{C}(D)$ est un demi-groupe atomique si et seulement si D est un groupe.

Démonstration : a) - Cherchons les diviseurs à gauche de $a = q^n \bar{x} p^n$. On pose $n = q(a)$. Il est facile de vérifier que l'on a toujours : $q(ab) \geq q(a)$.

Par conséquent, si b divise a à gauche, alors : $q(a) \geq q(b)$. D'après ce que nous avons dit plus haut sur les classes à gauche modulo $\mathcal{R}$ et les éléments inversibles à droite dans $\mathcal{E}(D)$, les diviseurs à gauche de $a = q^i \bar{x} p^j$, non inversibles à droite et non associés à gauche à a sont de l'un des trois types suivants : - $q^i \bar{y} p^k$ avec $y \notin R(x)$

- $q^n \bar{y} p^k$ avec $o<n<i$

- $\bar{y} p^k$ avec $y \notin U_d(D^1)$.

b) - Si $n>1$ alors $q^n \bar{x}\, p^m$ est réductible à gauche car

$$q^n \bar{x}\, p^m = q^{n-1} \bar{x}\, p^m\, q^{m+1}\, \bar{x}\, p^m$$

avec $q^{n-1}\, \bar{x}\, p^m \notin R(q^n \bar{x}\, p^m)$ et $q^{n-1}\, \bar{x}\, p^m \notin U_d(\mathcal{E}(D))$ puisque $n-1>o$.

c) - Condition suffisante : supposons que D soit un groupe et montrons que $\mathcal{E}(D)$ est atomique. D'après ce que nous venons de voir, si $\mathcal{E}(D)$ possède des éléments irréductibles à gauche ils ne peuvent être que de la force $q\bar{y}p^k$ (car $\bar{x}p^m \in U_d(\mathcal{E}(D))$). D'après (a), un diviseur à gauche de $q\bar{y}p^k$ est soit de la forme $q\bar{x}p^m \in q\overline{R(y)}P = R(q\bar{y}p^m)$ puisque D est un groupe, soit de la forme $q\bar{x}p^m \in U_d(\mathcal{E}(D))$. Donc tout élément de la forme $q\bar{x}p^k$ est irréductible à gauche.

$\mathcal{E}(D)$ est atomique à gauche puisque

$$q^n \bar{x} p^m = (q\bar{x})(q\bar{x})\ldots(q\bar{x}p^m)$$

On verrait de la même façon que $\mathcal{E}(D)$ est atomique à droite.

d) - Condition nécessaire : Supposons que D ne soit pas un groupe, et montrons que dans ce cas $\mathcal{E}(D)$ n'est pas atomique. Puisque D n'est pas un groupe : $U_d(D^1) \subset D^1$. D'après (b), les éléments de $\mathcal{C}(D)$ éventuellement irréductibles à gauche sont de la forme $q\bar{x}p^m$ ou $\bar{x}p^m$:

$*$ Soit $y \notin U_d(D^1)$; les éléments de la forme $q\bar{x}p^m$ sont réductibles à gauche car : $\bar{y}p^2q^3\bar{x}\,p^m = \bar{y}q\bar{x}p^m = q\bar{x}p^m$ avec $\bar{y}p^2 \notin Ud(\quad(D))$ puisque $y \notin U_d(D^1)$ et $\bar{y}p^2 \notin R(q\bar{x}p^m)$.

$*$ Par conséquent, l'ensemble E des éléments irréductibles à gauche de $\mathcal{C}(D)$ est un sous-ensemble de $\{\bar{x}p^m\}_{x \in D^1} = F$.

Comme $\langle E \rangle \subseteq \langle F \rangle \subset \mathcal{C}(D) - U_d(\mathcal{C}(D))$, on voit que D n'est pas atomique à gauche donc n'est pas atomique.

<u>(2-2) *Corollaire*</u> : *Le demi-groupe bicyclique est atomique.*

Car $\mathcal{C}(p, q) = \mathcal{C}(\{e\})$.

<u>*Remarque*</u> : Dans $\mathcal{C}(p, q)$ l'élément q^2p^3 admet $q(qp^3)$ pour factorisation complète à gauche et $(q^2p)pp$ pour factorisation complète à droite.

<u>*Définition*</u> : On dit que D est un <u>demi-groupe atomique fort</u> si $U_d = U_g = U$ et si tout élément de D^*-U possède une factorisation en éléments irréductibles (éléments qui sont à la fois irréductibles à droite et à gauche). Une factorisation en éléments irréductibles est appelée <u>factorisation complète.</u>

Tout demi-groupe atomique fort est atomique ; la réciproque est inexacte : $\mathcal{C}(p, q)$ est atomique mais n'est pas atomique fort. Le résultat suivant permet de donner des exemples de demi-groupes atomiques forts :

<u>(2-3) *Théorème*</u> : *Si* D *est un demi-groupe de type* (R) , *si* $D/\mathcal{R}$ *et* $D/\mathcal{L}$ *vérifient la condition minimale, alors* D *est un demi-groupe atomique fort.*

Démonstration : Dans un demi-groupe de type (R), $U_d = U_g$, les notions d'irréductibilité à droite et à gauche sont confondues (3), les conditions N_g et N_d sont satisfaites. Il suffit donc d'appliquer (1-1).

(2-4) Théorème : *Structure des demi-groupes finis de type* (R)
si D *est un demi-groupe fini de type* (R),
deux cas sont possibles :
- D *est un groupe*
- D *est atomique fort avec zéro.*

Démonstration : Dans un demi-groupe de type (R), deux cas sont possibles : $Z_g = Z_d = \emptyset$ ou $Z_g = Z_d = \{o\}$.

+ Si $Z_g = Z_d = \emptyset$, si $x \in D$, x est d'ordre fini, donc il existe deux entiers $n>m$ tels que $x^n = x^m$. Comme D est de type (R)sans zéro, cela entraine $x^{n-m} = 1$ avec $n-m \geqslant 1$.

+ Si $Z_g = Z_d = \{o\}$, d'après (2-3), D est un demi-groupe atomique fort avec zéro.

Remarques. 1) - Ce théorème redonne le résultat classique : tout demi-groupe fini simplifiable est un groupe.

2) - Un demi-groupe de type (R) fini avec zéro n'est pas nécessairement la réunion d'un groupe et d'un zéro comme le montre l'exemple ci-contre.

	a	b	o
a	b	o	o
b	o	o	o
o	o	o	o

(2-5) Théorème : *Tout KSK-demi-groupe est un demi-groupe atomique fort.*

Démonstration : Soit D un KSK-demi-groupe et B la KSK-base. On dit que D est sans élément neutre (Lemme 1-2-3), que les éléments de B sont irréductibles (Théorème 1-2-4) et que <B> = D.

La réciproque de ce théorème est inexacte ; $\mathcal{R}_X^o$ est un demi-groupe atomique fort mais n'est pas un KSK-demi-groupe.

<u>(2-6) *Théorème*</u> : *Si* D *est un demi-groupe de type* (R) *sans idempotent tel que* D/$\mathfrak{R}$ *vérifie la condition minimale les assertions suivantes sont équivalentes*

a) - D *est atomique fort*

b) - D *est atomique*

c) - D *est atomique à gauche*

d) - D *est un TA-demi-groupe*

e) - D *est un TA-demi-groupe à gauche*

f) - D *est un KSK-demi-groupe*

<u>*Démonstration*</u> : Les implications suivantes sont triviales :

(a)$\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$(c) et (d)$\Longrightarrow$(e)

(c)$\Longrightarrow$(a) car dans un demi-gorupe D de type (R), l'irréductibilité à droite est équivalente à l'irréductibilité à gauche, et D est sans idempotent, donc $U_d = U_g = \emptyset$.

(a)$\Longrightarrow$(d) d'après (1-2) (e)$\Longrightarrow$(c) d'après (1-3 (f)$\Longrightarrow$(a) d'après (2-5) (c)$\Longrightarrow$(f) conséquence du lemme (2-7) suivant :

<u>(2-7) Lemme</u> : *Pour qu'un demi-groupe atomique à gauche soit un KSK-demi-groupe, il suffit qu'il soit de type* (R) *sans idempotent.*

Soit B l'ensemble des éléments de D irréductibles à gauche. Comme D est atomique à gauche, on est assuré que B n'est pas vide. Pour la même raison, puisque D est sans idempotents $\langle B\rangle = D$. Il nous reste à prouver que si $n\geqslant 2$ alors $B\cap B^n=\emptyset$. Supposons le contraire ; si $b\in B\cap B^n$ avec $n\geqslant 2$, on peut écrire

$$b = b_1 b_2 \ldots b_n \quad \text{avec } b_i \in B$$

On a donc $b_{1D}|b$. Comme b est irréductible à gauche et que $U_d = \emptyset$

$$b_{1D}|b \Longrightarrow b_1 \mathcal{R} b$$

Comme D est de type (R) $R_b = \{bu \; ; \; u \in U(D^1)\} = \{b\}$; par conséquent $b_1 = b$ et $b = bb_2b_3\ldots b_n$.

Or dans un demi-groupe de type (R) sans idempotent, on a nécessairement pour tout d et d' de D : $dd' \neq 0$. D'où une contradiction.

Définition : On appelle <u>demi-groupe à factorisation unique à gauche</u> tout demi-groupe D qui vérifie les conditions suivantes :

* D est atomique
* Dans D, les notions d'irréductibilité à gauche et à droite sont confondues.
* Deux factorisations complètes d'un élément de D^*-U_d sont isomorphes à gauche (§I-1).

$\mathfrak{F}_X$ et $\mathfrak{F}^o_X$ sont à factorisation unique à gauche. Mais un demi-groupe à factorisation unique à gauche n'est pas nécessairement un demi-groupe libre. On peut remarquer que tout demi-groupe à factorisation unique à gauche est atomique fort.

Définition : On appelle <u>demi-groupe prééquidivisible à gauche</u> tout demi-groupe D tel que deux factorisations d'un élément de D^*-U_d possèdent des raffinements isomorphes à gauche dans D^1.

Il est clair que tout demi-groupe équidivisible est prééquidivisible à gauche et à droite.

<u>(2-8) *Théorème*</u> : *Tout demi-groupe à factorisation unique à gauche est prééquidivisible à gauche.*

<u>***Démonstration***</u> : Supposons que $d \in D^{*}-U_d$ possède deux factorisations $w_1 = (a_1, \ldots, a_n)$ et $w_2 = (b_1, \ldots, b_p)$. Puisque Z est un idéal bilatère de D : $d \notin Z \Longrightarrow a_i \notin Z$ et $b_j \notin Z$. Puisque D est à factorisation unique à gauche, on peut raffiner w_1 et w_2 en remplaçant les a_i et les b_j par l'une de leurs factorisations complètes. On obtient :

$$w'_1 = (c_1, \ldots, c_m) \leqslant w_1 \text{ et } w'_2 = (d_1, \ldots, d_q) \leqslant w_2.$$

Dans w'_1 et w'_2, "absorbons" les unités (on peut le faire à droite ou à gauche, car les notions d'irréductibilité à gauche et à droite sont confondues). On obtient ainsi deux factorisations w''_1 et w''_2 telles que $w''_1 \geqslant w'_1$, $w''_2 \geqslant w'_2$ et dont tous les termes sont irréductibles. w''_1 et w''_2 sont donc deux factorisations complètes de d ; par hypothèse, elles sont isomorphes à gauche. Comme les éléments qui les composent sont les éléments non inversibles à droite de w'_1 et w'_2, nous voyons que les éléments non inversibles de ces deux mots sont associés à gauche (à une permutation près).

Si m = q, il est clair que $w'_1 \sim w'_2$

Supposons par exemple m>q ; alors, si $w''_2{}' = (d_1, \ldots, d_q, 1, \ldots, 1)$ où 1 figure m-q fois, $w'_2{}''$ raffine w'_2 donc w_2 ; comme ses termes non inversibles sont ceux de w''_2, il est clair que

$$w''_2{}' \sim w'_1$$

La réciproque de ce théorème est inexacte : un demi-groupe prééquidivisible à gauche n'est pas nécessairement à factorisation unique à gauche. En effet, le demi-groupe bicyclique est équidivisible (7) donc prééquidivisible à gauche ; mais il n'est pas à factorisation unique à gauche.

Remarque : On a donc la situation suivante :

$$\begin{tikzcd}
& \text{Factorisation unique à gauche} \arrow[dr] & \\
\text{Libre} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{prééquidivisible} \\
& \text{Equidivisible} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] K.E. AUBERT : On the ideal theory of commutative semi-groups Math. Scand. 1 (1953) p. 39 - 54

[2] BOUVIER A. : Demi-groupes de type (R). Demi-groupe commutatifs à factorisation unique C.R. Acad. Sciences Paris t 268 (1969) p. 372-375

[3] BOUVIER A. : Demi-groupes de type (T)C.R. Acad. Sciences Paris t 270 (1970) p. 561-563

[4] BOUVIER A et FAISANT A : Une généralisation du demi-groupe bicyclique Séminaire P. Lefebvre 69/70 Exp. 5 Dep. Math. Fac. Sciences LYON

[5] CLIFFORD A.H. and PRESTON G.B. : Algebraic theory of semi-groups. Math. Survey Number 7 T1 et 2 (1967)

[6] KASAHARA S. : A note on semi-groups with a base Math. Japon 6 (1962) p. 45-57

[7] KNIGHT J.D. and STOREY A.J. : Equidivisible semigroups Journal of algebra 12 1969 p. 24-48

[8] TAMURA T. : One sided bases and translations of a semigroup Math. J AP. 3(1955) p. 137-141

Manuscrit reçu le 15 avril 1970

A. BOUVIER
Maitre assistant
Département de Mathématiques
43, bd du 11 novembre 1918
69 - VILLEURBANNE