Publications du Département de mathématiques de Lyon

Henri Buchwalter

Topologies et compactologies

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1969, tome 6, fascicule 2
, p. 1-74

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1969__6_2_1_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1969 t.6-2

TOPOLOGIES ET COMPACTOLOGIES

par Henri BUCHWALTER

On étudie une nouvelle structure, celle des espaces compactologiques, qui sont des ensembles munis d'une famille de parties K sur lesquelles existent des topologies compactes. Introduite pour la première fois par L. Waelbroeck (W1 et W2) dans un cadre vectoriel pour établir un théorème de dualité en caractérisant la catégorie duale de celle des elc complets, cette structure est en réalité susceptible d'une extension assez large. En fait la dualité échange objets topologiques (espaces topologiques, elc, algèbres localement convexes) et objets compactologiques (espaces compactologiques, espaces compactologiques convexes, algèbres compactologiques).

Dans le chapitre 1 on associe à chaque espace compactologique X l'algèbre localement convexe complète $C(X)$ de ses fonctions "continues" (c'est-à-dire continues sur chaque "compact" de X) et à chaque algèbre localement convexe commutative et unitaire A l'espace compactologique $G(A)$ de ses caractères. Le point nouveau ici est précisément atteint lorsqu'on structure le spectre de A en espace compactologique et non pas, comme d'habitude, en espace topologique. Dans cet esprit on caractérise les espaces compactologiques (réguliers) et les algèbres localement convexes (limites projectives de C^*-algèbres commutatives unitaires) qui sont des objets duaux.

Dans le chapitre 2 on examine les relations directes (sans l'intermédiaire de la dualité) qui existent entre espaces topologiques et espaces compactologiques.

On met en place, entre la catégorie $\underline{T}\ \underline{S}$ des espaces topologiques fonctionnellement séparés et la catégorie $\underline{C}\ \underline{R}$ des espaces compactologiques réguliers, deux foncteurs $c : \underline{C}\ \underline{R} \to \underline{T}\ \underline{S}$ et $\gamma : \underline{T}\ \underline{S} \to \underline{C}\ \underline{R}$ adjoints l'un de l'autre et tels que $c\gamma c = c$ et $\gamma c\gamma = \gamma$. Ce qui permet de retrouver la définition d'une classe particulière d'espaces topologiques : les espaces de Kelley ou k-espaces, largement étudiée dans la littérature.

L'introduction des structures vectorielles se fait au chapitre 3 de façon sommaire. On retrouve là aussi deux aspects complémentaires. D'une part l'étude des questions de dualité nous ramène évidemment au théorème de Banach – Grothendieck – Waelbroeck ; nous montrons donc essentiellement que ce résultat s'insère parfaitement dans la théorie générale esquissée ici. D'autre part une étude directe, sous-tendue par l'introduction des foncteurs $\tilde{c}$ et $\tilde{\gamma}$, nous permet d'introduire, parallèlement à la situation topologique, une classe nouvelle d'espaces localement convexes : les espaces de Kelley. La partie 3-4 du chapitre est intégralement consacrée aux propriétés de ces espaces de Kelley. On montre en particulier qu'ils sont stables par passage aux limites inductives séparées quelconques et par passage aux produits quelconques. Ils ont donc un comportement analogue à celui des espaces tonnelés ou infratonnelés et meilleur que celui des espaces bornologiques. D'ailleurs tout espace ultrabornologique est un espace de Kelley puisqu'il en est de même de tout espace de Banach. Il ne semble pas, à première vue, que tout espace normé soit un espace de Kelley.

Le chapitre 4 est véritablement le plus important. En dégageant la notion d'algèbre compactologique convexe (acc) A, dont le spectre $G(A)$ (espace des caractères compactologiques de A) est structuré en espace topologique complètement régulier complet pour une structure uniforme compatible avec sa dualité, on aborde effectivement le coeur du sujet. Car il est loisible de structurer l'algèbre $C(T)$ de toutes les fonctions continues sur un espace topologique T, non pas en algèbre localement convexe dont la topologie est plus ou moins bien adaptée à celle de T, mais en algèbre compactologique convexe par la considération de ses parties "compactes" qui sont les parties équicontinues simplement fermées et simplement bornées. Il est alors extrêmement tentant de chercher à comparer l'espace T et l'espace complètement régulier $GC(T)$ des caractères compactologiques de $C(T)$. Ce point de vue (dualité entre topologie et compactologie) justifie une présentation nouvelle des propriétés des espaces de fonctions continues sur les espaces complètement réguliers. On sait que jusqu'à maintenant le seul point de vue assez général est algébrique, et c'est celui choisi par Gillman-Jerison (G1) où l'espace $C(T)$ est étudié en tant qu'anneau ordonné, les fonctions étant réelles. Il conduit d'ailleurs très vite à la théorie de Hewitt des Q-espaces (où "real-compact spaces" selon la terminologie anglo-saxonne) que nous appelons ici, en suivant Bourbaki, espaces replets. L'introduction de la compactologie équicontinue sur $C(T)$ amène alors à la considération d'espaces complètement réguliers dits compactologiquement replets (ou c-replets) pour lesquels T est exactement, modulo la transformation de Dirac, l'espace des caractères compactologiques de $C(T)$. Les propriétés de ces espaces sont extrêmement voisines de celles des espaces replets. D'ailleurs tout espace replet est c-replet. Néanmoins une différence subsiste puisque la classe des espaces c-replets est plus stable que celle des espaces replets : toute limite projective d'espaces c-replets est c-replète de même que toute somme topologique de tels espaces. De plus on démontre explicitement qu'un espace paracompact quelconque est c-replet alors qu'il n'est replet que sous certaines conditions exprimées par C. Wenjen dans (W4).

La comparaison précise entre répletion et répletion compactologique se réalise au niveau d'une conjecture de la théorie des ensembles. Car en effet l'existence d'un espace c-replet qui ne soit pas replet équivaut exactement à l'existence d'un cardinal mesurable (ou 2-mesurable selon G. Choquet (C1)), et il paraît probable actuellement que l'axiome d'existence d'un tel cardinal, lié à l'axiome d'existence d'un cardinal fortement inaccessible, est indépendant des axiomes habituels (y compris l'axiome du choix) de la théorie des ensembles. Sur le plan pratique l'introduction des espaces c-replets et du foncteur Θ de répletion compactologique autorise bien souvent l'élimination des "conditions cardinales" qui grèvent habituellement tout résultat sur les espaces replets ou sur le foncteur υ de réplétion ; un exemple intéressant est proposé dans ce sens par R. Pupier (P3).

Un aspect inattendu de la théorie de la répletion compactologique a été, dans le même temps, mis en évidence par R. Pupier qui s'est aperçu que, sur un espace complètement régulier T, la structure uniforme de la convergence "compacte" sur $C(T)$ (ou pour être plus clair, de la convergence équicontinue) était exactement la structure uniforme universelle de T. Ce résultat est intéressant à plus d'un titre. Tout d'abord il réhabilite la structure uniforme universelle et fournit quelques moyens pour l'étudier grâce à la caractérisation concrète obtenue. De plus il montre que les espaces c-replets sont exactement les espaces (universellement) complets, ce qui illustre le phénomène général rencontré dans tout l'article, identifiant le "bidual" d'un objet topologique à un complété convenable de cet objet ; il n'est que de comparer les énoncés (4.5.4), (3.2.2) et (1.4.4). Enfin il permet des analogies (approximatives bien entendu mais fructueuses) entre espaces complètement réguliers et espaces localement convexes ; analogies que nous commençons de développer au chapitre 5.

En effet le chapitre 5 est consacré à la notion de parties bornées d'un espace topologique, notion non encore, à notre connaissance, systèmatiquement étudiée. Une partie P de T est dite bornée si toute fonction continue sur T reste bornée sur P. Les parties bornées sont donc exactement les parties de T qui sont précompactes dans l'espace υT, muni de sa structure uniforme. Et c'est sous cette forme qu'elles sont quelquefois (mais bien rarement) introduites. En particulier un théorème de Hager-Johnson, cité par W. Comfort (C2), peut s'énoncer simplement en disant que, dans un espace complètement régulier T, l'adhérence $\overline{\omega}$ de tout ouvert borné ω est un sous-espace pseudocompact de T. En analysant la démonstration de W.W. Comfort nous parvenons à mettre en place la notion de parties pseudo-fermées d'un espace topologique et nous obtenons des résultats qui généralisent le théorème de Hager-Johnson et permettent simultanément de prouver que les notions d'espaces localement bornés et d'espaces localement pseudo-compacts sont les mêmes.

Deux classes particulières d'espaces complètement réguliers se dégagent ensuite : les espaces quasi- (universellement)-complets T dans lesquels tout borné fermé est complet pour la structure uniforme universelle de T et les espaces de type (μ) dans lesquels toute partie bornée est relativement compacte. La terminologie est proposée par comparaison avec la théorie des elc. Et il est remarquable que les propriétés afférentes soient comparables. En effet, notons $C_\beta(T)$ l'espace $C(T)$ topologisé avec la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de T et notons T'' l'espace des caractères continus de $C_\beta(T)$; alors $C_\beta(T)$ joue le rôle du dual fort E'_β d'un elc E, θT celui du complété $\hat{E}$ de E et T'' celui du bidual E'' de E. Les résultats les plus probants, eu égard à cette analogie, nous paraissent être les suivants :

a) Pour que T soit quasi-complet il faut et il suffit que $T = \theta T \cap T''$; à comparer avec un théorème de A. Robert (R1, propo. 2.1.5) selon lequel un elc E est quasi-complet si et seulement si $E = \hat{E} \cap E''$.

b) Pour que T soit du type (μ) il faut et il suffit que $T = T''$; à comparer avec le théorème de Mackey-Arens.

Ainsi sur l'espace $C(T)$ des fonctions continues sur T peuvent s'étudier pratiquement trois structures : la structure compactologique et les deux topologies suivantes : celle de la convergence compacte sur T donnant l'espace $C_c(T)$ et celle de la convergence bornée sur T, donnant l'espace $C_\beta(T)$. De même le dual E' d'un elc E peut se considérer à partir de trois points de vue : dual compactologique E', dual topologique E'_c et dual fort E'_β. Dans cet esprit on sait que S. Warner dans (W3) a donné des résultats fins sur les propriétés comparées des espaces T et $C_c(T)$. On trouvera dans ce numéro une étude semblable portant sur les propriétés comparées des espaces T et $C_\beta(T)$; il suffit de se reporter à l'article de Jourlin - Mle Blanchard (J1) qui constitue le début d'un travail sur ce sujet.

Pour terminer cette longue introduction il nous faut préciser que les quatre premiers chapitres (mis à part le théorème de R. Pupier sur la complétion universelle) ont été utilisés pour constituer le second volet d'une thèse de doctorat (voir Buchwalter (B7)) rédigée en trois parties principales. La troisième partie de cette thèse (compactologies vectorielles et produits tensoriels compactologiques) nous paraît actuellement mériter un développement propre, nécessaire pour poursuivre l'étude compactologique des algèbres du type $C(T)$. Peut-être pourrons nous bientôt préparer un travail dans cette voie !

TABLE DES MATIERES.

CHAPITRE 5 : PARTIES BORNEES D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE T.

CHAPITRE 1 : ESPACES COMPACTOLOGIQUES ET ALGEBRES TOPOLOGIQUES.

1.1. Espaces compactologiques et espaces compactologiques réguliers.

(1.1.1) ***Définition*** . *On appelle espace compactologique la donnée d'un ensemble X et d'une famille K de parties de X telle que :*

a) K est un recouvrement filtrant croissant de X.

b) Tout $K \in K$ est muni d'une topologie compacte (séparée) τ_K de façon que, pour $K \subset L$ et $L \in K$, l'injection $K \longrightarrow L$ soit continue ce qui équivaut à l'égalité $\tau_L/K = \tau_K$.

c) Si $K \in K$ et si H est une partie quelconque de K alors l'adhérence $\overline{H}$ de H dans K, munie de la topologie induite par τ_K, est un élément de K.

Nous dirons que les parties de K sont les "compacts" de X. Toute partie réduite à un point est "compacte" et la réunion de deux parties "compactes" est aussi "compacte". En particulier les parties de X contenues dans un "compact" (variable) forment sur X une bornologie (B5).

On construit immédiatement une catégorie $\underline{C}$ dont les objets sont les espaces compactologiques en choisissant comme morphismes les applications $f : X \to Y$ qui envoient continûment les "compacts" de X dans des "compacts" de Y. Nous désignerons par $\underline{K}$ la catégorie des espaces compacts, qui apparaît donc comme une sous-catégorie pleine de $\underline{C}$.

Le corps C des nombres complexes est évidemment muni d'une structure compactologique, dite canonique, lorsqu'on choisit pour K la famille des compacts de C. Etant donné $X \in \underline{C}$, désignons par C(X) l'algèbre des fonctions complexes sur l'espace X, dont les restrictions aux "compacts" de X sont continues ; on reconnaît là l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(X,\mathrm{C})$.

(1.1.2) <u>*Définition*</u> *: On dit que l'espace compactologique* X *est régulier lorsqu'il est séparé par l'algèbre* $C(X)$*.*

Nous désignerons par $\underline{C}\ \underline{R}$ la catégorie des espaces compactologiques réguliers. Un bon critère de régularité est donné par :

(1.1.3) <u>*Théorème*</u> *: Relativement à un espace compactologique* X *les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) X *est régulier.*

b) Il existe sur X *une topologie complètement régulière induisant sur chaque "compact"* K *de* X *la topologie* τ_K*.*

c) Pour tout $K \in \mathcal{K}$ *l'application canonique de restriction* $C(X) \longrightarrow C(K)$ *est surjective.*

d) Pour tout couple de "compacts" disjoints H *et* K *de* X*, il existe une fonction* $f \in C(X)$ *telle que* $0 \leqslant f \leqslant 1$, $f = 0$ *sur* H *et* $f = 1$ *sur* K*.*

<u>Preuve</u> : $a \Longrightarrow b$: soit $\mathcal{T}$ la topologie sur X la moins fine rendant continues toutes les fonctions f de $C(X)$; elle est séparée d'après a) et uniformisable ; de plus elle rend continues les injections $K \rightarrow X$ puisque précisément chaque $f \in C(X)$ est continue sur chaque $K \in \mathcal{K}$ donc $\mathcal{T}|_K = \tau_K$ puisque $\mathcal{T}$ est séparée.

$b \Longrightarrow c$: Fixons $\phi \in C(K)$ et soit $\mathcal{T}'$ une topologie sur X vérifiant b) et donnant $\check{X}$ comme compactifié de Stone-Čech de X; alors K est un compact de $\check{X}$, donc par le théorème d'Urysohn, il existe un prolongement $\check{f}$ de ϕ qui est continu sur $\check{X}$; la fonction f, restriction de $\check{f}$ à X, est bien dans $C(X)$ et prolonge ϕ.

$c \Longrightarrow d$. Soit ϕ la fonction continue sur le "compact" $H \cup K$ définie par $\phi = 0$ sur H et $\phi = 1$ sur K ; d'après c) c'est la restriction d'une fonction $f \in C(X)$ qu'on peut supposer réelle d'abord puis, par une troncature évidente, telle que $0 \leqslant f \leqslant 1$.

Enfin d $\Longrightarrow$ a de façon évidente puisque les parties $\{x\}$ de X sont "compactes".

(1.1.4) *Corollaire : Tout espace compactologique admettant un système fondamental dénombrable de "compacts" est régulier.*

Preuve : Soit (K_n) une suite exhaustive croissante de "compacts" de X; tout "compact" K de X est donc contenu dans l'un des K_n. Fixons K et supposons, ce qui est loisible, $K \subset K_1$. Si $\phi \in C(K)$ on peut construire, de proche en proche, une suite $\phi_n \in C(K_n)$ telle que ϕ_1 prolonge ϕ et ϕ_{n+1} prolonge ϕ_n. La fonction f, bien définie par la condition de prolonger chaque ϕ_n , est alors un prolongement de ϕ, élément de $C(X)$.

1.2. L'algèbre $C(X)$ d'un espace compactologique X.

L'algèbre $C(X)$ peut être aisément topologisée. Il est en effet tout indiqué de placer sur $C(X)$ la topologie de la convergence uniforme sur les "compacts" de X, dite topologie de la convergence "compacte" sur X, qui fait de $C(X)$ une algèbre localement convexe. D'ailleurs $C(X)$ n'est autre que la limite projective des algèbres de Banach $C(K)$ lorsque K décrit $\mathcal{K}$. Elle est munie d'une involution $f \to \bar{f}$ et d'un système fondamental de semi-normes : $f \to ||f||_K = \sup_{x \in K} |f(x)|$ telles que $||fg||_K \leq ||f||_K ||g||_K$ et $||f\bar{f}||_K = ||f||_K^2$. Autrement dit, avec le langage de E. Michael (M1) et R.M. Brooks (B4), $C(X)$ est une $*$-algèbre multiplicativement localement convexe commutative et complète. En résumé :

(1.2.1) *Proposition : La topologie de la convergence "compacte" sur X fait de $C(X)$ une $*$-algèbre multiplicativement localement convexe commutative unitaire et complète, limite projective de C^*-algèbres commutatives unitaires.*

1.3 Le spectre d'une algèbre localement convexe.

Précisons immédiatement que les algèbres localement convexes utilisées ici sont supposées, une fois pour toutes, commutatives, unitaires, séparées et à produit séparément continu, le corps des scalaires étant celui des nombres complexes.

Pour une telle algèbre A, on appelle caractère de A toute forme linéaire multiplicative unitaire et continue, et l'on désigne par $G(A)$ l'espace des caractères de A. Evidemment $G(A) \subset A'$, où A' est le dual vectoriel topologique de A.

Lorsque A est une algèbre de Banach, on sait que $G(A)$ est structuré en espace compact. Lorsque A est quelconque il est beaucoup moins facile de placer sur $G(A)$ une topologie ayant de bonnes propriétés. Il semble plus raisonnable alors de doter $G(A)$ d'une structure compactologique bien attachée à la structure topologique de A. Ceci est possible car :

(1.3.1) Lemme : *Toute partie équicontinue et faiblement fermée de A' coupe $G(A)$ suivant une partie faiblement compacte.*

Preuve : Soit H une telle partie équicontinue ; elle est donc faiblement compacte. Il est immédiat que $K = H \cap G(A)$ est faiblement fermé dans H, donc faiblement compact, puisqu'une limite faible de caractères de H est une forme linéaire multiplicative unitaire qui est aussi continue.

(1.3.2) Proposition : *Les parties équicontinues faiblement fermées (ou faiblement compactes) de $G(A)$, munies de la topologie faible $\sigma(A',A)$, structurent $G(A)$ en espace compactologique régulier.*

Preuve : Il suffit de voir que $G(A)$ est régulier. Or ceci est conséquence de (1.1.3) puisque la topologie $\sigma(A',A)$ est complètement régulière.

1.4 Les théorèmes de Gelfand.

Ainsi à tout espace compactologique X on associe un objet dual $C(X)$ qui est une algèbre localement convexe, et à toute algèbre localement convexe A un objet dual $G(A)$ qui est un espace compactologique. Il importe donc de comparer les espaces compactologiques X et $GC(X)$ et les algèbres A et $CG(A)$.

La transformation de Dirac. A tout élément $x \in X$ associons la fonction $\hat{x} : C(X) \longrightarrow \mathbb{C}$, définie par $\hat{x}(f) = f(x)$. L'application $x \longrightarrow \hat{x}$ de X dans $GC(X)$ est évidemment la transformation de Dirac. Alors :

(1.4.1) *Proposition : La transformation de Dirac est un morphisme $X \longrightarrow G\,C(X)$ de la catégorie $\underline{C}$ des espaces compactologiques.*

Preuve : Déjà $\hat{x}$ est évidemment une forme linéaire multiplicative unitaire sur $C(X)$, et si $f_i \longrightarrow f$ dans $C(X)$ alors, $\{x\}$ étant "compact", on a bien $f_i(x) \longrightarrow f(x)$; donc $\hat{x} \in GC(X)$. Supposons maintenant $x_i \longrightarrow x$ dans un "compact" K de X ; alors $\hat{x}_i$ reste dans le polaire V_K° du voisinage $V_K = \{f, \|f\|_K \leq 1\}$ et K reste contenu dans le "compact" $V_K^\circ \cap GC(X)$ de $GC(X)$; de plus $f(x_i) \longrightarrow f(x)$ pour chaque $f \in C(X)$ ce qui signifie bien $\hat{x}_i \longrightarrow \hat{x}$ dans le "compact" $V_K^\circ \cap GC(X)$.

(1.4.2) *Théorème : Soit X un espace compactologique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) X est régulier,

b) La transformation de Dirac est injective,

c) La transformation de Dirac est un isomorphisme de la catégorie $\underline{C}$.

Preuve : Il est clair que $a \Longleftrightarrow b$ et que $c \Longrightarrow b$. Il reste à voir $a \Longrightarrow c$. Pour cela supposons X régulier et montrons qu'alors tout "compact" de $GC(X)$ est image d'un "compact" de X. Un "compact" de $GC(X)$ est fixé par la donnée d'un "compact" K de X et d'un scalaire $M>0$ et est formé des caractères u tels que $|u(f)| \leq M$ si $\|f\|_K \leq 1$. Or, X étant régulier, le morphisme canonique d'algèbres j_K : $C(X) \longrightarrow C(K)$ est injectif et $u \in \operatorname{Ker} j_K$ pour tout caractère précédent u. Il suit de là qu'un tel caractère u est en réalité défini par un caractère u_K de l'algèbre $C(K)$ et, comme K est compact, u_K est en fait l'image $\hat{x}$ d'un point $x \in K$, ce qui suffit pour voir qu'on peur supposer $M = 1$ et démontrer l'égalité $K = V_K^\circ \cap GC(X)$. Ainsi la transformation de Dirac est une bijection qui échange continûment (donc bicontinûment) les "compacts de X et ceux de $GC(X)$. C'est donc bien un isomorphisme

<u>La transformation de Gelfand</u>. Soit A une algèbre localement convexe. La transformation de Gelfand associe à tout $a \in A$ la fonction $\hat{a}$ définie sur $G(A)$ par $\hat{a}(u) = u(a)$. Alors :

(1.4.3) *<u>Proposition</u> : La transformation de Gelfand est un morphisme $A \longrightarrow CG(A)$ d'algèbres localement convexes.*

<u>Preuve</u> : Pour voir que $\hat{a} \in CG(A)$ fixons un "compact" H de $G(A)$; si u_i u dans H alors $u_i \rightarrow u$ | A'_σ , donc en particulier $u_i(a) \longrightarrow u(a)$, ce qui suffit. Il est clair que la transformation de Gelfand est un morphisme (unitaire) d'algèbres, et il reste à vérifier sa continuité. Or $a_i \longrightarrow a$ dans A signifie encore $a_i \longrightarrow a$ uniformément sur toute partie équicontinue de A', donc implique $\hat{a}_i \longrightarrow \hat{a}$ uniformément sur tout "compact" de $G(A)$, c'est-à-dire $\hat{a}_i \longrightarrow \hat{a}$ dans $CG(A)$.

On a vu en (1.2.1) que l'algèbre $CG(A)$ est assez particulière, de sorte qu'on ne peut espérer l'existence d'un isomorphisme entre A et $CG(A)$ qu'en imposant à A d'être une $*$-algèbre multiplicativement localement convexe complète, limite projective de C^*-algèbres-commutatives. On va voir que ces conditions sont exactement suffisantes, ce qui donne une généralisation du théorème classique de Gelfand sur les C^*-algèbres commutatives.

(1.4.4) *<u>Théorème</u> : Soit A une algèbre localement convexe (commutative, unitaire, séparée, ...) munie d'une involution $*$ et admettant un système fondamental filtrant P de semi-normes p, vérifiant pour tous $x,y \in A$, les conditions :*

$$p(xy) \leq p(x)p(y) \qquad et \qquad p(xx^*) = (p(x))^2$$

Alors la transformation de Gelfand réalise un isomorphisme de A sur une sous-algèbre topologique partout dense de l'algèbre complète $CG(A)$. Pour que ce soit un isomorphisme de A sur $CG(A)$ il faut et il suffit qu'en plus A soit complète.

Preuve : Désignons par $\mathcal{V}$ la base de filtre formée des boules $B = B_p(1)$ associées aux semi-normes $p \in \mathcal{P}$. Alors $V.V \subset V$ pour tout $V \in \mathcal{V}$, de sorte que l'espace semi-normé A_V est en fait une algèbre semi-normée, ce qui permet facilement de voir que l'espace de Banach $\widehat{A_V}$ (séparé complété de A_V) est une algèbre de Banach commutative unitaire, l'application canonique $\Pi_V : A \longrightarrow \widehat{A_V}$ étant un morphisme d'algèbres. La condition $p(xx^*) = (p(x))^2$ implique la condition $p(x) = p(x^*)$, donc l'égalité $V = V^*$, de sorte que l'involution $*$ se transporte à l'algèbre A_V, et par continuité, à l'algèbre $\widehat{A_V}$ dont la norme vérifie d'ailleurs la condition $||xx^*|| = ||x||^2$. Ainsi $\widehat{A_V}$ est une C^*-algèbre commutative unitaire et l'application $\Pi_V : A \longrightarrow \widehat{A_V}$ un $*$-morphisme. Il suit de là que $\widehat{A_V}$ s'identifie, d'après le théorème classique de Gelfand, à l'algèbre $C(\mathcal{G}_V)$ où $\mathcal{G}_V$ est le spectre (compact) de $\widehat{A_V}$.

Fixons V et déterminons $\mathcal{G}_V$. Le morphisme $\Pi_V : A \longrightarrow \widehat{A_V}$ donne par transposition évidente une application $j_V : \mathcal{G}_V \longrightarrow \mathcal{G}(A)$, d'ailleurs injective puisque $\Pi_V(A)$ est dense dans $\widehat{A_V}$. Or les ensembles $V° \cap \mathcal{G}(A)$ forment un système fondamental de "compacts" de $\mathcal{G}(A)$. Cela étant prouvons l'égalité $V° \cap \mathcal{G}(A) = j_V(\mathcal{G}_V)$: si $u \in \mathcal{G}_V$ alors, u étant de norme 1, on a $u(\widehat{V}) \subset \Delta$ où $\widehat{V}$ est la boule unité de $\widehat{A_V}$ et Δ le disque unité du corps des complexes, donc $j_V(u) \in V°$; réciproquement tout caractère u de A tel que $u \in V°$ envoie V dans Δ, donc par prolongement continu, $\widehat{V}$ dans Δ, ce qui prouve $u \in j_V(\mathcal{G}_V)$. Ainsi les ensembles $j_V(\mathcal{G}_V)$ forment un système fondamental de "compacts" de $\mathcal{G}(A)$. Si l'on remarque maintenant que sur chaque $\mathcal{G}_V$ la topologie (compacte) est celle de la convergence simple sur $\widehat{A_V}$, on voit que c'est aussi celle de la convergence simple sur $\Pi_V(A)$ (car $\mathcal{G}_V$ est équicontinu dans le dual $(\widehat{A_V})'$ et $\Pi_V(A)$ est dense dans $\widehat{A_V}$). Il s'ensuit que j_V est un isomorphisme entre l'espace compact $\mathcal{G}_V$ et le "compact" $V° \cap \mathcal{G}(A)$ de l'espace compactologique $\mathcal{G}(A)$. Identifiant alors j_V à une injection canonique, on voit que les compacts $\mathcal{G}_V$ forment un système fondamental de "compacts" de $\mathcal{G}(A)$. Il en résulte que l'algèbre $CG(A)$ n'est autre que la limite projective des algèbres $C(G_V)$. Autrement dit $CG(A)$ est isomorphe à la limite projective des algèbres $\hat{A}_V$ et l'on reconnait dans ce dernier espace le complété $\hat{A}$ de l'elc A, ce qui termine la démonstration.

CHAPITRE 2 : ESPACES COMPACTOLOGIQUES ET ESPACES TOPOLOGIQUES.

2.1 Séparation normale dans un espace topologique T.

Etant donné un espace topologique T désignons par $C(T)$ l'algèbre des fonctions complexes continues sur T et par $C^{\infty}(T)$ l'algèbre de Banach des fonctions complexes continues et bornées sur T.

(2.1.1) *Définition : On dit que deux parties fermées A et B de T sont normalement séparées dans T s'il existe une fonction continue f sur T telle que $0 \leqslant f \leqslant 1$, $f = 0$ sur A et $f = 1$ sur B.*

(2.1.2) *Proposition : Soit A une partie fermée d'un espace topologique séparé T. Si A et tout point $x \notin A$ sont normalement séparés, alors A et tout compact K disjoint de A sont aussi normalement séparés.*

Preuve : Pour tout $x \in K$ soit f_x une fonction continue sur T telle que $0 \leqslant f_x \leqslant 1$, $f_x(x) = 0$ et $f_x = 1$ sur A. Posons $W_x = \{y, y \in T, f_x(y) < \frac{1}{2}\}$. Le compact K peut être recouvert par une réunion finie $\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} W_{x_i}$. Il est clair que la fonction $f = \operatorname{Sup}(\frac{1}{2}, \operatorname{Inf}_{1 \leqslant i \leqslant n} f_{x_i})$ est continue et telle que $\frac{1}{2} \leqslant f \leqslant 1$, $f = \frac{1}{2}$ sur K , $f = 1$ sur A, ce qui suffit.

Espaces topologiques $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ normaux. Dans un espace topologique séparé T nous dirons qu'une famille $\mathcal{A}$ de fermés est stable lorsque :

a) $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

b) Si $A \in \mathcal{A}$ alors tout fermé B de T contenu dans A est encore élément de $\mathcal{A}$.

Par exemple la famille $\mathcal{P}$ des parties finies de T, la famille $\mathcal{K}$ des compacts de T et la famille $\mathcal{F}$ de tous les fermés de T sont évidemment stables. On peut alors introduire la notion suivante :

(2.1.3) <u>*Définition*</u> *: Etant donné deux familles stables $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de fermés de T, on dit que T (supposé séparé) est $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-normal si deux fermés disjoints quelconques $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$ sont normalement séparés.*

La proposition (2.1.2) donne donc les résultats suivants :

(2.1.4) <u>*Proposition*</u> *: Les assertions suivantes, concernant l'espace topologique séparé T, sont équivalentes :*

a) $C(T)$ sépare T (on dit encore que T est fonctionnellement séparé).

b) T est $\mathcal{P}$-$\mathcal{P}$-normal.

c) T est $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$-normal.

(2.1.5) <u>*Proposition*</u> *: Les assertions suivantes, concernant l'espace topologique séparé T, sont équivalentes :*

a) T est complètement régulier.

b) T est $\mathcal{P}$-$\mathcal{F}$-normal.

c) T est $\mathcal{K}$-$\mathcal{F}$-normal.

Enfin remarquons, ce qui est à l'origine de la terminologie, qu'un espace normal T est exactement un espace $\mathcal{F}$-$\mathcal{F}$-normal. Le théorème classique d'Urysohn, concernant le prolongement des fonctions continues dans un espace normal, admet alors les généralisations suivantes, qui, dans la suite, nous seront indispensables.

(2.1.6) <u>*Théorème*</u> *: Soit $\mathcal{A}$ une famille stable de fermés d'un espace topologique séparé T. Pour que T soit $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$-normal il faut et il suffit que, pour tout fermé $A \in \mathcal{A}$, toute fonction continue ϕ sur A telle que $0 \leq \phi \leq 1$ se prolonge en une fonction continue f sur T telle que $0 \leq f \leq 1$.*

Preuve : Supposons la condition vérifiée. Alors si A et B sont deux fermés disjoints éléments de $\mathcal{A}$, leur réunion $A \cup B$ est élément de $\mathcal{A}$; la fonction ϕ, égale à 0 sur A et à 1 sur B, est continue sur $A \cup B$, de sorte qu'un prolongement continu f de ϕ à l'espace T permet de séparer normalement A et B.

Réciproquement si T est $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$-normal, il suffit de reprendre pas à pas la démonstration classique du théorème d'Urysohn. On se ramène à supposer $-1 \leqslant \phi \leqslant 1$ et l'on cherche un prolongement $f \in C(T)$ de ϕ tel que $-1 \leqslant f \leqslant 1$. Pour cela, on remarque que les parties $H = \{x,\ -1 \leqslant \phi(x) \leqslant -\frac{1}{3}\}$ et $K = \{x,\ \frac{1}{3} \leqslant \phi(x) \leqslant 1\}$ sont disjointes et fermées dans A, donc éléments de $\mathcal{A}$; elles sont donc normalement séparées dans T, de sorte qu'il existe $f_o \in C(T)$ vérifiant $|f_o| \leqslant \frac{1}{3}$, $f_o = -\frac{1}{3}$ sur H, $f_o = \frac{1}{3}$ sur K. Alors $||f_o||_T \leqslant \frac{1}{3}$ et $||\phi - f_o||_A \leqslant \frac{2}{3}$. Recommençant avec la fonction $\phi_1 = \frac{3}{2}(\phi - f_o)$, on obtient $f_1 \in C(T)$ telle que $||f_1||_T \leqslant \frac{1}{3}$ et $||\phi - f_o - \frac{2}{3} f_1||_A \leqslant (\frac{2}{3})^2$. De proche en proche, on construit une suite $f_n \in C(T)$ telle que $||f_n||_T \leqslant \frac{1}{3}$ et $||\phi - \sum_0^n (\frac{2}{3})^k f_k||_A \leqslant (\frac{2}{3})^{n+1}$. Alors la fonction $f = \sum_0^\infty (\frac{2}{3})^k f_k$ est continue sur T, telle que $||f||_T \leqslant 1$ et prolonge bien ϕ puisque $||\phi - f||_A = 0$.

(2.1.7) *Théorème : Soit* $\mathcal{A}$ *une famille stable de fermés d'un espace topologique séparé T. On suppose que T est* $\mathcal{A}$-$\mathcal{F}$-*normal. Alors pour tout* $A \in \mathcal{A}$, *toute fonction continue* ϕ *sur A se prolonge en une fonction continue f sur T.*

Preuve : On se ramène à supposer $\phi \geqslant 0$. La fonction $\psi = \frac{\phi}{1+\phi}$ est continue sur A et telle que $0 \leqslant \psi < 1$. Puisque T est évidemment $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$ normal, il existe un prolongement $g \in C(T)$ de ψ tel que $0 \leqslant g \leqslant 1$. La partie $G = \overset{-1}{g}(1)$ est donc fermée et disjointe de A ; ainsi A et G sont normalement séparés et il existe $h \in C(T)$ vérifiant $0 \leqslant h \leqslant 1$, $h = 1$ sur A, $h = 0$ sur G. La fonction $g' = hg$ prolonge ψ, vérifie $0 \leqslant g' \leqslant 1$ et ne prend pas la valeur 1. La fonction $f = \frac{g'}{1-g'}$ réalise donc le prolongement cherché de ϕ.

Remarque : Lorsque $\mathcal{A} = \mathcal{F}$ le théorème (2.1.7) redonne le théorème de prolongement dans les espaces normaux. Lorsque $\mathcal{A} = \mathcal{K}$ le même théorème (2.1.7) redonne un résultat classique sur les espaces complètement réguliers mais le théorème (2.1.6) prouve que dans un espace topologique fonctionnellement séparé T, toute fonction ϕ continue sur un compact K se prolonge en une fonction f continue et bornée sur T. Ce résultat peut d'ailleurs se retrouver autrement : en effet il est facile de voir qu'un espace topologique T est fonctionnellement séparé si et seulement si sa topologie est plus fine qu'une topologie complètement régulière ; mais sur tout compact K de T ces deux topologies coïncident, ce qui ramène aisément au cas où T lui-même est complètement régulier. Néanmoins les théorèmes (2.1.6) et (2.1.7) nous donneront d'importants résultats plus tard, lorsque nous aurons défini une famille stable $\mathcal{B}$ de fermés (dits fermés bornés) intermédiaire entre les familles $\mathcal{K}$ et $\mathcal{F}$.

2.2 Les foncteurs c et γ.

Pour fixer les notations désignons par $\underset{=}{S}$ la catégorie des espaces topologiques séparés, par $\underset{=}{TS}$ celle des espaces fonctionnellement séparés, et par $\underset{=}{R}$ celle des espaces complètement réguliers.

Foncteur γ. En associant à tout espace topologique séparé T la famille $\mathcal{K}$ de ses parties compactes, on obtient un espace compactologique, noté γT. Evidemment $C(T) \subset C(\gamma T)$ de sorte que, si T est fonctionnellement séparé, γT est régulier. De façon plus précise :

(2.2.1) *Proposition : Pour que T soit fonctionnellement séparé il faut et il suffit que γT soit régulier et que l'algèbre $C(T)$ soit dense dans l'algèbre $C(\gamma T)$.*

Preuve : Supposons $T \in \underset{=}{TS}$ et soit $g \in C(\gamma T)$. Pour tout compact K de T la fonction $g|_K \in C(K)$. D'après (2.1.6) c'est aussi la restriction à K d'une fonction $f \in C(T)$. Ainsi $||g-f||_K = 0$, ce qui implique bien la densité de $C(T)$ dans $C(\gamma T)$.

Réciproquement supposons la condition vérifiée ; si x, $y \in T$ sont deux points distincts , il existe $g \in C(\gamma T)$ telle que $g(x) = 0$ et $g(y) = 1$; par densité on peut trouver $f \in C(T)$ telle que $f(x) < \frac{1}{2}$ et $f(y) > \frac{1}{2}$, ce qui prouve que T est fonctionnellement séparé.

D'ailleurs pour toute application continue $h : T_1 \longrightarrow T_2$ entre deux espaces séparés, l'application $h : \gamma T_1 \longrightarrow \gamma T_2$ est un morphisme. Ceci montre le caractère fonctoriel de γ et, compte tenu de (2.2.1), nous considérerons dans la suite, sauf mention expresse du contraire, γ comme un foncteur covariant de la catégorie $\underline{\underline{TS}}$ dans la catégorie $\underline{\underline{CR}}$

Foncteur c. En plaçant sur un espace compactologique X la topologie finale associée à toutes les injections $K \longrightarrow X$, où K décrit $\mathcal{K}$, on obtient un espace topologique, noté cX , qui n'est pas séparé en général. Mais l'égalité $C(cX) = C(X)$ fournit immédiatement :

(2.2.2) *Proposition : Pour que X soit régulier il faut et il suffit que cX soit fonctionnellement séparé.*

Aussi c apparaît comme un foncteur covariant de la catégorie $\underline{\underline{CR}}$ dans la catégorie $\underline{\underline{TS}}$.

On peut donc introduire les deux foncteurs $c\gamma : \underline{\underline{TS}} \longrightarrow \underline{\underline{TS}}$ et $\gamma c : \underline{\underline{CR}} \longrightarrow \underline{\underline{CR}}$ et obtenir des morphismes évidents :

$$c\gamma T \longrightarrow T \qquad \text{et} \qquad X \longrightarrow \gamma c X$$

La conséquence en est :

(2.2.3) *Proposition :* $c\gamma c = c$ *et* $\gamma c \gamma = \gamma$.

Preuve : Car on a les successions de morphismes :

$$cX \longrightarrow c(\gamma c X) = c\gamma(cX) \longrightarrow cX$$

$$\gamma T \longrightarrow \gamma c(\gamma T) = \gamma(c\gamma T) \longrightarrow \gamma T$$

Enfin, en comparant les ensembles $\mathrm{Hom}_{\underline{\underline{TS}}}$ (cX,T) et $\mathrm{Hom}_{\underline{\underline{CR}}}(X,\gamma T)$, on obtient :

(2.2.4) <u>*Proposition*</u> *: Le foncteur c : $\underline{\underline{CR}} \longrightarrow \underline{\underline{TS}}$ est adjoint à gauche au foncteur γ : $\underline{\underline{TS}} \longrightarrow \underline{\underline{CR}}$.*

2.3 <u>Espaces de Kelley et k_R-espaces</u>.

Si T est un espace topologique séparé quelconque l'espace $kT = c\gamma T$ est aussi séparé et l'application $1_T : c\gamma T \longrightarrow T$ est continue. On dit que T est un <u>espace de Kelley</u>, ou bien encore un <u>k-espace</u>, (A1,K1,P2) lorsque $T = kT$, c'est-à-dire lorsque T possède la topologie la plus fine compatible avec ses compacts. Dans le cas général où T est seulement séparé, l'espace kT est un k-espace dit le <u>kelleyifié de T</u>, et ses compacts sont les mêmes que ceux de T.

Puisque le foncteur $k = c\gamma$ opère de la catégorie $\underline{\underline{TS}}$ dans elle-même on a :

(2.3.1) <u>*Proposition*</u> *: Pour tout espace fonctionnellement séparé T, l'espace kT est fonctionnellement séparé.*

<u>Remarque</u> : On sait cependant que si T est complètement régulier l'espace kT ne l'est pas en général.

Le critère suivant est évident :

(2.3.2) <u>*Proposition*</u> *: Pour qu'un espace topologique séparé T soit un espace de Kelley il faut et il suffit que, pour tout espace séparé S et toute application $f : T \longrightarrow S$, f soit en réalité continue dès que ses restrictions aux compacts de T sont continues.*

(2.3.3) <u>*Corollaire*</u> *: Les espaces localement compacts et les espaces métrisables sont des espaces de Kelley. Tout espace séparé muni d'une topologie finale d'espaces de Kelley est un espace de Kelley.*

<u>Les k_R-espaces</u>. Si T est fonctionnellement séparé, on sait que γT est régulier. Désignons par $k_R T$ l'espace T muni de la topologie initiale associée à toutes les fonctions $f \in C(\gamma T)$; c'est un espace séparé et uniformisable, donc complètement régulier, dont la topologie est moins fine que celle de kT mais peut être incomparable à celle de T. De plus $C(k_R T) = C(kT) = C(\gamma T)$. Et :

(2.3.4) <u>*Proposition*</u> : *Soit T un espace fonctionnellement séparé. La topologie de $k_R T$ est la plus fine des topologies complètement régulières sur T qui sont moins fines que celle de kT.*

<u>Preuve</u> : Car si $\mathcal{T}$ est une telle topologie sur T alors $C(T_{\mathcal{T}}) \subset C(\gamma T)$ ce qui suffit pour voir que $\mathcal{T}$ est moins fine que la topologie de $k_R T$.

(2.3.5) <u>*Corollaire*</u> : *Si T est complètement régulier, la topologie de $k_R T$ est intermédiaire entre celle de T et celle de kT. En particulier les espaces T, $k_R T$ et kT ont les mêmes compacts.*

On dit donc qu'un espace complètement régulier T est un k_R-espace lorsque $T = k_R T$. La liaison avec la notion d'espace de Kelley se fait avec les deux énoncés suivants, conséquences de (2.3.4) et (2.3.5).

(2.3.6) <u>*Proposition*</u> : *Pour qu'un k_R-espace T soit un espace de Kelley il faut et il suffit que l'espace kT soit complètement régulier.*

(2.3.7) <u>*Proposition*</u> : *Pour qu'un espace complètement régulier T soit un k_R-espace il faut et il suffit que, pour tout espace complètement régulier S et toute application $f : T \longrightarrow S$, f soit en réalité continue dès que ses restrictions aux compacts de T sont continues.*

Remarque : Il est clair qu'un espace de Kelley complètement régulier est un k_R-espace. Mail il existe des k_R-espaces qui ne sont pas des espaces de Kelley. (P1,N2).

CHAPITRE 3 : TOPOLOGIES ET COMPACTOLOGIES VECTORIELLES.

3.1 Espaces vectoriels compactologiques convexes.

On introduit maintenant une structure vectorielle sur les espaces compactologiques. La convexité s'avérant nécessaire pour toutes les questions de dualité, on choisit comme définition :

(3.1.1) *Définition : On appelle espace vectoriel compactologique convexe (en abrégé ; ecc) la donnée d'un espace vectoriel réel ou complexe X muni d'une compactologie K telle que :*

a) K admet un système fondamental de disques K dont la topologie τ_K est localement convexe, c'est-à-dire que l'origine admet dans K un système fondamental de voisinages disqués.

b) Pour tout disque $K \in K$ l'application $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ de $\Delta \times K$ dans K est continue (Δ est le disque unité du corps des scalaires).

c) Pour tous disques H et K de K il existe un disque $L \in K$ tel que $H+K \subset L$, l'application $(x,y) \longrightarrow x+y$ de $H \times K$ dans L étant de plus continue.

En choisissant comme morphismes entre deux ecc les applications linéaires qui sont des morphismes compactologiques, on obtient une catégorie notée ECC. On peut manifestement définir le dual X^* d'un ecc X comme étant l'espace vectoriel des formes linéaires compactologiques sur X, c'est-à-dire des formes linéaires dont les restrictions à chaque "compact" de X sont continues. Muni de la topologie de la convergence "compacte" sur X, X^* apparaît comme un elc complet, sous-espace fermé de l'algèbre localement convexe C(X). Ainsi :

(3.1.2) <u>*Proposition*</u> *: Le dual X^* d'un ecc X est un elc séparé et complet.*

Ce qui amène immédiatement à la définition :

(3.1.3) <u>*Définition*</u> *: On dit qu'un ecc X est régulier (dans la catégorie <u>ECC</u>) lorsqu'il est séparé par son dual X^*.*

<u>Remarque</u> : Les ecc ont été introduits pour la première fois par L. Waelbroeck dans (W1). La question a été reprise dernièrement par le même auteur dans (W2) où les ecc sont étudiés sous le nom de "cb-espaces". Les résultats que nous rappelons en (3.1) et (3.2) ne sont donc pas nouveaux, mais nous les redonnons principalement pour montrer leur analogie profonde d'une part avec les résultats de dualité entre espaces compactologiques et algèbres topologiques exprimés par les théorèmes de Gelfand de (1.4), d'autre part avec les résultats sur la complétion topologique que nous obtiendrons plus loin au chapitre 4. Enfin la théorie des ecc nous permet d'introduire et d'étudier une classe nouvelle (à notre connaissance) d'espaces localement convexes : les espaces de Kelley.

(3.2) <u>Les ecc réguliers et la dualité.</u>

Désignons par <u>ECCR</u> la catégorie des ecc réguliers. Un critère simple de régularité est le suivant :

(3.2.1) <u>*Proposition*</u> *: Pour qu'un ecc X soit régulier il faut et il suffit qu'il existe sur X une topologie localement convexe séparée induisant sur chaque "compact" K de X la topologie τ_K.*

<u>Preuve</u> : Si X est régulier la topologie faible $\sigma(X,X^*)$ convient. Réciproquement si T est une telle topologie, alors le dual $(X_T)'$ est contenu dans X^* et sépare X, ce qui suffit.

On a vu que le dual X^* d'un ecc X est un elc complet. Dualement le dual E' d'un elc E, muni de la compactologie, dite équicontinue, où les "compacts" sont les disques équicontinus faiblement fermés avec la topologie faible $\sigma(E',E)$, est en fait un ecc régulier. On sait que le théorème de complétion de Grothendieck prouve que l'espace $(E')^*$ n'est autre que le complété $\hat{E}$ de E. Mais ce résultat va se retrouver ici de façon particulièrement simple et se compare aux théorèmes de Gelfand (1.4.2) et (1.4.4).

(3.2.2) *Théorème (Banach- Grothendieck - Waelbroeck).*

a) Pour tout ecc régulier X on a $X = (X^*)'$

b) Pour tout elc séparé E on a $\hat{E} = (E')^*$.

Preuve : Posons $\mathcal{Y} = (X^*)'$. Les "compacts" de $\mathcal{Y}$ sont les bipolaires $K^{\circ\circ}$ dans $\mathcal{Y}$ des "compacts" K de X, que l'on peut choisir disqués (la régularité de X impliquant d'ailleurs l'inclusion $X \subset \mathcal{Y}$). Il suit de là que $K^{\circ\circ}$ est l'adhérence de K pour la topologie $\sigma(\mathcal{Y},X^*)$. Mais K étant disqué et compact pour τ_K, est aussi compact pour la topologie faible $\sigma(\mathcal{Y},X^*)$, d'où l'égalité $K = K^{\circ\circ}$, ce qui prouve suffisamment l'égalité compactologique de a). Soit maintenant E un elc séparé ; c'est un sous-elc de l'elc séparé et complet $(E')^*$. Mais le dual de $(E')^*$ coïncide avec E' d'après a), ce qui prouve, avec le théorème de Hahn-Banach, la densité de E dans $(E')^*$ et termine la démonstration.

Ces résultats peuvent, bien entendu, être exprimés en termes de catégories. En désignant par $\underline{\underline{\mathrm{ELCC}}}$ la catégorie des elc séparés et complets, on peut introduire les deux foncteurs de dualité :

$$\mathcal{D} : \underline{\underline{\mathrm{ELCC}}} \longrightarrow \underline{\underline{\mathrm{ECCR}}} \qquad \mathcal{D}(E) = E'$$

$$D : \underline{\underline{\mathrm{ECCR}}} \longrightarrow \underline{\underline{\mathrm{ELCC}}} \qquad D(X) = X^*$$

et récrire le théorème (3.2.2) sous la forme :

$$D\mathcal{D} = 1_{\underline{\underline{\mathrm{ELCC}}}} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}D = 1_{\underline{\underline{\mathrm{ECCR}}}}$$

où ces égalités sont, comme il est facile de le vérifier, des isomorphismes fonctoriels. On en tire en particulier que les catégories ELCC et ECCR sont duales l'une de l'autre.

3.3 Les foncteurs $\bar{c}$ et $\bar{\gamma}$.

Si E est un elc séparé (dont la catégorie est notée ELCS), la donnée des disques compacts de E, qui forment bien une famille filtrante car l'enveloppe disquée de deux disques compacts est encore compacte, définit un ecc que nous noterons $\bar{\gamma}E$. Cette notation permet de différencier, lorsque E n'est pas quasi-complet, l'ecc $\bar{\gamma}E$ et l'espace compactologique γE dont les "compacts" sont tous les compacts (disqués ou non) de E. On peut d'ailleurs préciser que d'après le théorème de Krein-Grothendieck (G2 : p. 283) il suffit seulement, pour que $\gamma E = \bar{\gamma}E$, que E soit quasi-complet pour la topologie $\tau(E,E')$.

Réciproquement, si X est un ecc régulier, la topologie $\bar{c}$ X localement convexe la plus fine sur X rendant continues les injections $K \to X$, où K décrit $\mathcal{K}$, définit un elc séparé $\bar{c}X$. Bien entendu la topologie $\bar{c}(X)$ est en général strictement moins fine que la topologie $c(X)$ définie en (2.2). Toutefois un résultat de L. Waelbroeck, (W2, proposition 6.1), lié de très près au théorème de Banach-Dieudonné, affirme que ces deux topologies coïncident lorsque X possède un système fondamental dénombrable de disques "compacts".

De toute façon, on a défini dans le cas général deux foncteurs.
$\bar{\gamma}$: ELCS $\longrightarrow$ ECCR et $\bar{c}$: ECCR $\longrightarrow$ ELCS et par suite, en les composant, deux autres foncteurs :

$$\bar{c}\bar{\gamma} : \text{ELCS} \longrightarrow \text{ELCS} \qquad \text{et} \qquad \bar{\gamma}\bar{c} : \text{ECCR} \longrightarrow \text{ECCR}$$

De plus il est évident que l'on a des morphismes :

$$\bar{c}\bar{\gamma}E \longrightarrow E \qquad \text{et} \qquad X \longrightarrow \bar{\gamma}\bar{c}X$$

d'où l'on tire, comme en (2.2.3) :

(3.3.1) *Proposition :* $\bar{c}\bar{\gamma}\bar{c} = \bar{c}$ *et* $\bar{\gamma}\bar{c}\bar{\gamma} = \bar{\gamma}$

Enfin en comparant les ensembles $\mathrm{Hom}_{\underline{ECCR}}(X, \bar{\gamma}E)$ et $\mathrm{Hom}_{\underline{ELCS}}(\bar{c}X, E)$, on voit qu'ils coïncident avec l'ensemble des applications linéaires de X dans E, qui sont continues sur chaque "compact" de X. Ainsi :

(3.3.2) *Proposition : Le foncteur $\bar{c} : \underline{ECCR} \longrightarrow \underline{ELCS}$ est adjoint à gauche au foncteur $\bar{\gamma} : \underline{ELCS} \longrightarrow \underline{ECCR}$.*

Une dernière propriété importante des foncteurs $\bar{c}$ et $\bar{\gamma}$ est exprimée en termes de dualité. Elle est conséquence du lemme simple suivant :

(3.3.3) *Lemme : Soit X un ecc régulier. Pour qu'un ensemble H de formes linéaires sur X soit équicontinu dans le dual $(\bar{c}X)'$ il faut et il suffit que, pour tout disque "compact" K de X, l'ensemble H_K des restrictions à K des fonctions de H soit équicontinu dans l'espace $C(K)$.*

Preuve : La condition est évidemment nécessaire puisque la topologie séparée $\bar{c}(X)$ induit sur chaque K sa topologie propre. Réciproquement si H vérifie cette condition, soit V l'ensemble des $x \in X$ tels que $|f(x)| \leq 1$ pour toute $f \in H$. Alors $V \cap K$ contient, pour tout K, un voisinage de l'origine dans K. Puisque V est disqué, c'est donc un voisinage de 0 pour la topologie $\bar{c}(X')$, ce qui prouve le lemme.

(3.3.4) *Proposition : Pour tout ecc régulier X on a l'égalité compactologique*

$$(\bar{c}X)' = \bar{\gamma}X^*.$$

Preuve : La définition de la topologie $\bar{c}(X)$ montre déjà que les espaces vectoriels $(\bar{c}X)'$ et X^* coïncident. D'après le lemme précédent les parties équicontinues H de $(\bar{c}X)'$ sont exactement celles qui, pour tout disque "compact" K de X, donnent un ensemble H_K de restrictions à K, équicontinu dans $C(K)$. D'après le théorème d'Ascoli H_K est équicontinu dans $C(K)$ si et seulement si c'est une partie relativement compacte de $C(K)$. De sorte que H est équicontinue dans $\bar{c}(X)'$ si et seulement si c'est une partie relativement compacte de l'espace $C(X) = \varprojlim C(K)$. Et puisque X^* est un sous-elc fermé de $C(X)$, on voit bien que les "compacts" de $(\bar{c}X)'$ sont exactement les mêmes que ceux de $\bar{\gamma}X^*$. De plus il est clair que sur chacun d'eux, la topologie est, par raison de compacité, celle de la convergence simple sur X, d'où l'égalité compactologique $(\bar{c}X)' = \bar{\gamma}X^*$.

En appliquant ce résultat au cas où X est le dual E' d'un elc séparé E on obtient $(\bar{c}E')' = \bar{\gamma}(E')^* = \bar{\gamma}\hat{E}$ d'où :

(3.3.5) <u>*Corollaire 1*</u> *: Soit E un elc complet. La topologie de $\bar{c}E'$ est celle de la convergence compacte sur E.*

(3.3.6) <u>*Corollaire 2*</u> *: Soit E un elc séparé. La topologie de $\bar{c}E'$ est celle de la convergence compacte sur $\hat{E}$. Elle est en général plus fine que celle de la convergence précompacte sur E.*

<u>Preuve</u> : Elle provient de l'égalité compactologique bien connue : $E' = (\hat{E})'$.

3.4 <u>Les espaces localement convexes de Kelley.</u>

Par analogie avec la situation purement topologique décrite en (2.3) on est tout naturellement conduit à appeler espace de Kelley (en tant qu'elc bien entendu et non pas en tant qu'espace topologique) tout elc séparé E tel que $\bar{c}\,\bar{\gamma}E = E$.
Un elc $E = \bar{c}X$ est donc toujours un espace de Kelley d'après (3.3.1). En particulier, pour E elc séparé, l'espace $\bar{c}\bar{\gamma}E$ est espace de Kelley : on dit que c'est le kelleyifié de E et on le notera dans la suite $\bar{k}E$, en introduisant ainsi une différence avec le kelleifié topologique kE de l'espace topologique E.

(3.4.1) *<u>Théorème</u> : Les assertions suivantes, concernant un elc séparé E, sont équivalentes :*

a) E est espace de Kelley

b) la topologie de E coïncide avec la topologie localement convexe la plus fine induisant sur chaque disque compact sa topologie propre.

c) pour tout elc séparé F, toute application linéaire $f : E \to F$, continue sur les disques compacts de E, est continue.

c') même énoncé que c) en supposant F complet.

c") même énoncé que c) en supposant F espace de Banach.

d) pour qu'une partie $H \subset E'$ soit équicontinue il faut et il suffit que, pour tout disque compact K de E, l'ensemble H_K des restrictions à K des formes linéaires de H soit équicontinu dans C(K).

<u>Preuve</u> : a $\Longleftrightarrow$ b par définition de la topologie de $\overleftarrow{c}\overleftarrow{\gamma}E$. Il est clair que b $\Longrightarrow$ c". Comme tout elc complet est limite projective d'espaces de Banach on a c" $\Longrightarrow$ c' ; et l'on a c' $\Longrightarrow$ c car tout elc séparé est sous-espace de son complété. Enfin c $\Longrightarrow$ a comme on voit en prenant $F = \overleftarrow{c}\overleftarrow{\gamma}E$. Il reste à prouver a $\Longleftrightarrow$ d. Mais l'implication a $\Longrightarrow$ d n'est autre que le lemme (3.3.3) appliqué à $X = \overleftarrow{\gamma}E$ puisque $\overleftarrow{c}X = E$. Terminons en prouvant d $\Longrightarrow$ c" : soit $f : E \to F$, où F est espace de Banach, une application linéaire continue sur les disques compacts de E ; l'ensemble H des formes linéaires $y' \circ f$ lorsque y' décrit la boule unité B' de F', est équicontinu sur chaque disque compact K de E (car B' est équicontinue dans F') ; il est donc équicontinu dans E', ce qui prouve l'existence d'un voisinage de 0 V dans E tel que $||f(x)|| \leq 1$ pour tout $x \in V$, ce qui termine la démonstration.

(3.4.2) *<u>Corollaire 1</u> : Soit E un elc séparé dont la topologie est la topologie finale associée à un système d'applications linéaires $f_i : E_i \to E$, où les E_i sont des espaces de Kelley séparés. Alors E est un espace de Kelley.*

(3.4.3) <u>*Corollaire 2*</u>*. : Toute somme directe d'espaces de Kelley est un espace de Kelley. Tout quotient séparé d'un espace de Kelley est un espace de Kelley. Toute limite inductive (dans la catégorie* <u>*ELCS*</u>*) d'espaces de Kelley est un espace de Kelley.*

(3.4.4) <u>*Corollaire 3*</u> *: Tout elc séparé et quasi-complet, qui est un espace topologique de Kelley est un elc de Kelley. En particulier tout espace de Fréchet est un espace de Kelley.*

(3.4.5) <u>*Corollaire 3*</u> *: Tout elc séparé et ultrabornologique (c'est-à-dire limite inductive d'espaces de Banach), en particulier tout elc séparé, bornologique et semi-complet, est un espace de Kelley.*

<u>Remarque 1</u> : Si l'on admet l'existence de cardinaux mesurables (quelques réflexions concernant ces cardinaux seront développées au chap. 4), il existe des espaces de Kelley complets qui ne sont pas bornologiques. En effet, si I est un cardinal mesurable, on sait par le théorème d'Ulam-Mackey, que l'espace R^I n'est pas bornologique. Nous verrons en (3.4.11) qu'il est cependant complet et espace de Kelley.

<u>Remarque 2</u> : Nous ignorons si un espace bornologique est toujours un espace de Kelley. La question se ramène évidemment à savoir si tout espace normé est nécessairement espace de Kelley. La difficulté provient du fait qu'une suite convergente vers 0 dans un espace normé peut ne pas être contenue dans un <u>disque</u> compact.

<u>L'espace E'_c</u> . L. Schwartz a introduit dans (S1, p. 16 et 17) l'espace E'_c associé à tout elc séparé E. Il s'agit de l'espace vectoriel E' muni de la topologie de la convergence uniforme sur les <u>disques compacts</u> de E. Si E n'est pas quasi-complet, cette topologie peut être différente de la topologie de la convergence compacte ; c'est exactement le cas si E est un elc métrisable et non complet, car en vertu

du théorème de Banach-Dieudonné appliqué à la fois aux espaces E et $\hat{E}$ (qui ont le même dual avec la même compactologie) la topologie de la convergence compacte sur E est identique à celle de la convergence uniforme sur les (disques) compacts de $\hat{E}$, et donne donc comme dual l'espace $\hat{E}$, tandis que E'_c a pour dual E comme on verra immédiatement. Mais l'avantage est que, tout disque compact de E étant déjà faiblement compact, cette topologie est, par le théorème de Mackey, compatible avec la dualité (E',E). Plus précisément on a l'égalité compactologique $(E'_c)' = \bar{\gamma}E$. De plus E'_c est évidemment un sous-elc de l'espace complet $(\bar{\gamma}E)^*$ dont le dual est, par (3.2.2.a), compactologiquement égal à E, ce qui suffit pour prouver la densité de E'_c dans $(\bar{\gamma}E)^*$ et l'égalité $\widehat{E'_c} = (\bar{\gamma}E)^*$. Par ailleurs tout disque équicontinu faiblement fermé H de E' est compact dans E' (car il est faiblement compact et l'on sait que sur H la topologie de E'_c coïncide avec la topologie faible $\sigma(E',E)$) ; de cela il résulte que l'espace $(E'_c)'_c$, algèbriquement égal à E, a une topologie intermédiaire entre celle de E et la topologie de Mackey $\tau(E,E')$. En particulier chaque fois que E est un espace de Mackey (c'est-à-dire qu'il a la topologie $\tau(E,E')$) on a $E = (E'_c)'_c$ topologiquement. Mais dans le cas général, E et $(E'_c)'_c$, qui ont les mêmes disques fermés (car leurs topologies sont compatibles avec la même dualité) ont aussi les mêmes disques compacts, avec bien entendu les mêmes topologies induites : il suffit pour le voir de prouver que tout disque compact K de E est compact dans $(E'_c)'_c$; or K est faiblement fermé et il est équicontinu dans le dual $(E'_c)'$ donc compact dans $(E'_c)'_c$. Ainsi $\bar{\gamma}E = \bar{\gamma}(E'_c)'_c = (E'_c)'$ où ces égalités sont à lire compactologiquement, ce qui implique a fortiori l'égalité topologique $((E'_c)'_c)'_c = E'_c$. En résumé :

(3.4.6) *<u>Proposition</u> : Pour tout elc séparé E soit E'_c l'espace E' muni de la topologie de la convergence uniforme sur les <u>disques compacts</u> de E. On a alors :*

a) $\widehat{E'_c} = (\bar{\gamma}E)^*$ *topologiquement.*

b) $(E'_c)' = \bar{\gamma}E = \bar{\gamma}(E'_c)'_c$ *compactologiquement.*

c) $((E'_c)'_c)'_c = E'_c$ *topologiquement. Pour que* $E = (E'_c)'_c$ *il faut et il suffit qu'il existe un elc séparé F tel que* $E = F'_c$*. Et il suffit pour cela que E soit un espace de Mackey, c'est-à-dire qu'il ait la topologie* $\tau(E,E')$*.*

Mises à part l'égalité a) et les interprétations compactologiques, ces considérations sont développées dans l'article cité de L. Schwaetz. Mais nous allons voir qu'elles intéressent très directement la notion d'espace de Kelley en permettant une nouvelle caractérisation de ces espaces. Pour cela nous aurons besoin à la fois des résultats de la proposition (3.4.6) et des suivants :

(3.4.7) *<u>Proposition</u> : Soit E un elc séparé :*

a) Si E est espace de Kelley alors E'_c *est complet et* $E = (E'_c)'_c$*.*

b) Si E est complet alors E'_c *est espace de Kelley.*

<u>Preuve</u> : Si E est complet la topologie de E'_c est celle de la convergence compacte sur E, de sorte que, d'après (3.3.5), on a $E'_c = \bar{c}E'$ et E'_c est espace de Kelley. Si E est espace de Kelley, alors E'_c est évidemment complet, donc, avec b), $(E'_c)'_c$ est espace de Kelley. Alors E et $(E'_c)'_c$ étant tous deux espaces de Kelley, et ayant les mêmes disques compacts d'après (3.4.6.b), sont identiques.

(3.4.8) *<u>Corollaire 1</u> :*

a) Si E est un espace de Kelley complet alors E'_c *est aussi un espace de Kelley complet.*

b) Si E'_c est un espace de Kelley complet alors $(E'_c)'_c$ est un espace de Kelley complet et c'est exactement le kelleyifié $\overline{k}E$ de E.

<u>Preuve</u> : Il suffit de prouver b). Or $(E'_c)'_c$ est alors espace de Kelley complet et a les mêmes disques compacts que E, d'où l'égalité $(E'_c)'_c = \overline{k}E$.

(3.4.9) <u>*Corollaire 2*</u> *: On suppose que E est tel que $E = (E'_c)'_c$, ce qui est le cas, par exemple, si E est espace de Mackey. Alors :*

a) Pour que E soit espace de Kelley il faut et il suffit que E'_c soit complet.

b) Pour que E soit complet il faut et il suffit que E'_c soit espace de Kelley.

Enfin on a la caractérisation importante :

(3.4.10) <u>*Théorème*</u> *: Pour qu'un elc séparé E soit un espace de Kelley il faut et il suffit que E'_c soit complet et que ses parties compactes soient équicontinues.*

<u>Preuve</u> : Il suffit de voir que, sous l'hypothèse que E'_c est complet, la condition que ses parties compactes soient équicontinues est exactement la condition compactologique $\overline{\gamma}E'_c = E'$ c'est-à-dire aussi la condition topologique $E = (E'_c)'_c$. On est donc ramené à (3.4.7.a) et (3.4.9.a).

Comme conséquence de cette caractérisation, on obtient un théorème de stabilité de la notion d'espace de Kelley par passage au produit vectoriel topologique.

(3.4.11) <u>*Théorème*</u> *: Tout produit d'espaces de Kelley est un espace de Kelley.*

Preuve : Soit $E = \Pi E_i$ un produit d'une famille (non vide) d'espaces de Kelley E_i. On sait que E' s'identifie algébriquement à la somme directe $\Sigma E'_i$ et même que E'_c s'identifie exactement à la somme directe topologique $\Sigma(E_i)'_c$. Il suffit pour cela de vérifier, d'après (G2, prop 7, p. 194), qu'un système fondamental de disques compacts dans E est formé des produits quelconques ΠK_i de disques compacts K_i des espaces E_i, ce qui est bien le cas. Il en résulte, d'après (G2, prop. 5, p. 192) que E'_c est complet, comme somme directe d'espaces complets. De plus toute partie compacte de E'_c est une somme finie de parties compactes des $(E_i)'_c$, c'est-à-dire une somme finie de parties équicontinues des E'_i, autrement dit une partie équicontinue de E'. On est donc complètement ramené à la caractérisation du théorème (3.4.10).

Comme application on peut tirer de là un exemple assez spécial de commutation du foncteur $\bar{k}$ de kelleyification au produit vectoriel topologique. Nous ignorons s'il est susceptible de généralisation.

(3.4.12) <u>*Corollaire*</u> *: Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille (non vide) d'elc séparés tels que les $(E_i)'_c$ soient des espaces de Kelley complets. Alors le kelleyifié $\bar{k}E$ du produit $E = \Pi E_i$ s'identifie au produit $\Pi\bar{k}E_i$ des kelleyifiés des espaces facteurs : $\bar{k}(\Pi E_i) = \Pi\bar{k}E_i$.*

Preuve : On a toujours $E'_c = \Sigma(E_i)'_c$, de sorte que E'_c est complet et c'est un espace de Kelley d'après (3.4.3). On a donc $\bar{k}E = (E'_c)'_c$ et aussi $\bar{k}E_i = ((E_i)'_c)'_c$ d'après (3.4.8.b). Posons $F = \Pi\bar{k}E_i$; c'est un espace de Kelley d'après (3.4.11), tel que $F'_c = \Sigma(\bar{k}E_i)'_c$. Or $(\bar{k}E_i)'_c = (E_i)'_c$ d'après (3.4.6.c), de sorte que $F'_c = E'_c = (\bar{k}E)'_c$. Aussi les espaces $\bar{k}E$ et F, étant deux espaces de Kelley, sont identiques d'après (3.4.7.a).

Remarque : Puisque la condition du corollaire est en particulier satisfaite lorsque les E_i sont espaces de Kelley, on voit que le corollaire contient à son tour le théorème comme cas particulier.

CHAPITRE 4 : ESPACES TOPOLOGIQUES ET ALGEBRES COMPACTOLOGIQUES.

4.1 Algèbres compactologiques convexes.

(4.1.1) Définition : *On appelle algèbre compactologique convexe (acc pour simplifier) une algèbre commutative unitaire A munie d'une compactologie vectorielle convexe telle que le produit de A soit un morphisme relativement à chaque variable.*

Le spectre de A est l'espace G(A) des caractères de A, c'est-à-dire des formes multiplicatives unitaires qui sont des morphismes compactologiques. On considère G(A) comme une partie fermée du dual topologique A^* de l'ecc A, ce qui revient à placer sur G(A) la structure uniforme et la topologie de la convergence "compacte" sur A. Donc :

(4;1.2) Proposition : *Le spectre G(A) d'une acc A est un espace topologique complètement régulier, complet pour une structure uniforme compatible avec sa topologie.*

Nous dirons que A est une acc régulière lorsque G(A) sépare A. Dans ce cas A est évidemment un ecc régulier. D'ailleurs le théorème de dualité (3.2.2.a), conjointement avec le théorème de Hahn-Banach, fournit la caractérisation suivante :

(4.1.3) Proposition : *Pour qu'une acc A soit régulière il faut et il suffit que A soit un ecc régulier et que le spectre G(A) soit une partie totale de l'elc complet A^*.*

4.2. <u>L'acc $C(T)$ des fonctions continues sur un espace topologique T.</u>

Désignons par $C(T)$ l'algèbre de toutes les fonctions numériques continues sur l'espace topologique T. Lorsque T n'est pas supposé compact il est difficile de placer sur $C(T)$ une topologie qui soit bien attachée à la topologie de T. Généralement on choisit sur $C(T)$ la topologie de la convergence compacte sur T, obtenant ainsi une algèbre localement convexe que nous désignerons ici par $C_c(T)$. c'est, par exemple, le point de vue de S. Warner dans (W3) où l'auteur obtient de riches résultats de comparaison entre les propriétés topologiques de T et celles de $C_c(T)$. Mais de même que sur le dual E' d'un elc E la bonne structure est la donnée de la compactologie équicontinue, et non pas la donnée de telle ou telle topologie allant de la topologie faible à la topologie forte, nous allons structurer l'algèbre $C(T)$ en acc régulière et constater très vite que ce point de vue nouveau est riche de conséquences. Cela est possible en vertu du :

(4.2.1) <u>*Lemme*</u> *: Soit H une partie équicontinue et simplement bornée de $C(T)$. Alors l'enveloppe disquée simplement fermée $\overline{\Gamma}(H)$ de H dans l'espace produit C^T est simplement compacte et contenue dans $C(T)$.*

<u>Preuve</u> : C'est une conséquence facile du théorème de Tychonov et des propriétés des parties équicontinues.

On est donc en droit de poser :

(4.2.2) <u>*Définition*</u> *: Les disques équicontinus simplement bornés et simplement fermés (c'est-à-dire simplement compacts), munis de la topologie de la convergence simple sur T, structurent $C(T)$ en acc régulière.*

Dans le cas où T est un espace compact, il résulte du théorème d'Ascoli que l'acc $C(T)$ n'est autre que l'espace $\overline{\gamma}C(T)$. Cette situation est d'ailleurs beaucoup plus générale puisque :

(4.2.3) <u>Proposition</u> : *On suppose que T est un espace de Kelley ou bien seulement s'il est complètement régulier, que c'est un k_R-espace. Alors on a les égalités compactologiques $C(T) = \overline{\gamma}C(\gamma T) = \overline{\gamma}C_c(T)$.*

<u>Preuve</u> : Dans les deux cas on a déjà $C_c(T) = C(\gamma T)$ topologiquement. Par ailleurs tout "compact" H de $C(T)$, étant équicontinu et simplement compact, est compact dans l'elc $C_c(T)$ car sur H la topologie de la convergence simple coïncide avec celle de la convergence compacte sur T. Réciproquement soit H un disque compact de $C_c(T)$. Puisque $C_c(T) = C(\gamma T) = \varprojlim C(K)$ où K décrit l'ensemble des compacts de T, on voit que l'ensemble H_K formé des restrictions à K des fonctions de H est un disque compact de C(K), autrement dit, avec le théorème d'Ascoli, une partie équicontinue de C(K). Désignons alors par $\mathcal{T}$ la topologie sur T la moins fine parmi celles qui sont plus fines que la topologie propre de T et qui rendent équicontinue l'ensemble H. D'après ce qui vient d'être dit on voit que $\mathcal{T}$ coïncide sur chaque compact K de T avec la topologie de T. De sorte que si T est espace de Kelley, alors $\mathcal{T}$ est sa propre topologie. De même si T est un k_R-espace, il suffit, ce qui est facile, de voir que $\mathcal{T}$ est complètement régulière pour aboutir à la même conclusion, ce qui termine la démonstration.

<u>Remarque</u> : Ce résultat est à rapprocher du théorème (3.4.10) où l'on prouve l'égalité compactologique $E' = \overline{\gamma}E'_c$ lorsque E est un elc de Kelley.

4.3. <u>Caractères et caractères compactologiques de $C(T)$.</u>

Il convient immédiatement de distinguer les éléments $u \in GC(T)$, que nous appellerons <u>caractères compactologiques</u> de $C(T)$, et les caractères algèbriques de $C(T)$, qui sont les formes linéaires multiplicatives unitaires et dont l'ensemble sera désigné provisoirement par $gC(T)$. Dans cet ordre d'idées on a le résultat bien connu :

(4.3.1) <u>*Proposition*</u> : *Soit $u \in gC(T)$ un caractère algébrique de $C(T)$.*

Alors :

a) Pour toute fonction continue $f \in C(T)$ on a : $u(f) \in f(T)$; $u(\bar{f}) = \overline{u(f)}$ et $u(|f|) = |u(f)|$. En particulier $u(f) \geq o$ si $f \geq o$.

b) Pour toute suite f_n de fonctions continues sur T, il existe un point $t \in T$ tel que $u(f_n) = f_n(t)$ pour tout n.

On va voi. maintenant que la partie b) de la proposition peut être considérablement améliorée lorsqu'on se limite à un caractère compactologique u. Déjà :

(4.3.2) <u>*Lemme*</u> : *Soit u un caractère compactologique de $C(T)$. Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille équicontinue et simplement bornée de fonctions $f_i \in C(T)$ telles que $f_i \geq 0$ et $u(f_i) = 0$, pour tout i. Alors la fonction $f = \operatorname{Sup}_{i \in I} f_i$ est continue et $u(f) = 0$.*

<u>Preuve</u> : Remarquons que, pour deux fonctions continues f et g telles que $f \geq o$, $g \geq o$ et $u(f) = u(g) = o$, la fonction $h = \operatorname{Sup}(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ est telle que $u(h) = o$ d'après (4.3.1.a) ; de plus il est facile de voir que, pour deux points t et t_o de T, on a :

$$|h(t)-h(t_o)| \leq \operatorname{Max}\left[|f(t)-f(t_o)|, |g(t)-g(t_o)|\right]$$

Ceci implique que, pour toute partie finie J de I, la fonction $f_J = \operatorname{Sup}_{i \in J} f_i$ vérifie $u(f_J) = o$ et admet en chaque point t_o de T un module de continuité majoré par le module de continuité $d_I(t_o,t = \operatorname{Sup}_{i \in I} |f_i(t)-f_i(t_o)|$ de la famille équicontinue $(f_i)_{i \in I}$. Il sort de là que la fonction $f = \operatorname{Sup}_{i \in I} f_i$, qui n'est autre que la limite simple des fonctions f_J lorsque J décrit l'ordonné filtrant des parties finies de I, a aussi un module de continuité majoré par $d_I(t_0,.)$. En particulier f est continue et la famille formée de la fonction f et des fonctions f_J est équicontinue et simplement bornée. Comme u est un caractère compactologique les conditions $u(f_J) = 0$ impliquent la condition $u(f) = 0$.

(4.3.3) *Théorème : Soit u un caractère compactologique de C(T). Pour toute suite H_n de parties équicontinues de C(T) il existe un point $t \in T$ tel que $u(f) = f(t)$ pour toute fonction f appartenant à la réunion $\bigcup H_n$.*

Preuve : En remplaçant chaque fonction $f \in H_n$ par la fonction $g = \mathrm{Inf}(1, |f-u(f)|)$, on remplace H_n par une partie équicontinue G_n, uniformément bornée, et vérifiant le conditions du lemme. Pour chaque n, la fonction $g_n = \sup_{g \in G_n} g$ est continue, positive et telle que $u(g_n) = 0$. D'après (4.3.1.b) il existe $t \in T$ tel que $g_n(t) = u(g_n) = 0$ pour tout n, d'où il suit $g(t) = 0$ pour toute $g \in \bigcup G_n$ et par conséquent $u(f) = f(t)$ pour toute $f \in \bigcup H_n$.

4.4 Réplétion compactologique.

Ayant donc associé à tout espace topologique T un objet dual compactologique, qui est l'acc C(T), et à toute acc A un objet dual topologique G(A), nous sommes maintenant tout naturellement amenés à comparer les espaces topologiques T et GC(T). Bien entendu cette comparaison se fait par l'intermédiaire de la transformation de Dirac, que nous noterons provisoirement par j. A tout point $t \in T$ on associe le caractère compactologique $\hat{t} = jt$ défini par $\hat{t}(f) = f(t)$. Alors :

(4.4.1) *Théorème :*

a) La transformation de Dirac j est une application continue de T dans GC(T) dont l'image jT est partout dense.

b) Pour que j soit injective il faut et il suffit que T soit fonctionnellement séparé.

c) Pour que j soit un homéomorphisme de T sur le sous-espace jT de GC(T'), il faut et il suffit que T soit complètement régulier.

Preuve : Si $t_i \longrightarrow t$ dans T alors, pour tout disque "compact" H de C(T) on a $\hat{t}_i \longrightarrow \hat{t}$ uniformément sur H, d'après l'équicontinuité de H ; donc j est bien continue. La densité de jT dans GC(T) est une conséquence immédiate du théorème (4.3.3) écrit pour une seule partie équicontinue. L'assertion b) est évidente, de même que la condition nécessaire de c) puisque GC(T) est complètement régulier. Supposons T complètement régulier, donc fonctionnellement séparé, ce qui permet de l'identifier algébriquement au sous-espace jT de GC(T). La topologie propre de T est a priori plus fine que celle induite par GC(T), puisque j est continue ; mais elle est aussi moins fine car ce n'est autre que la topologie de la convergence simple sur C(T), évidemment moins fine que celle de la convergence "compacte".

Remarque : L'assertion a) exige quelques commentaires. En effet pour prouver la densité de jT dans GC(T), nous n'avons utilisé qu'une petite partie de (4.3.3). En fait on a :

(4.4.2) *Proposition : Pour tout espace topologique T, l'image jT est G_δ-dense dans GC(T), c'est-à-dire que tout G_δ non vide de GC(T) coupe l'image jT.*

Preuve : Si u est un point d'un G_δ U de GC(T), alors il existe une suite (Hn) de parties équicontinues de C(T) et une suite (εn) de constantes positives telles que tout caractère $v \in GC(T)$ vérifiant $|(v-u)(f)| < \varepsilon_n$ pour toute $f \in H_n$, et cela pour tout n, soit dans U. D'après (4.3.3) il est donc clair que $U \cap jT$ est non vide.

Réplétion et réplétion compactologique.

La théorie exposée ici est, sur beaucoup de points, analogue à la théorie des espaces "realcompact" (ou Q-espaces) de E. Hewitt (H2), telle qu'on peut la trouver dans Gillman-Jerison (G1), à cela près qu'on passe ici des fonctions réelles aux fonctions complexes, mais c'est sans véritable importance. Rappelons sommairement qu'à tout espace topologique T on associe l'espace topologique complètement régulier υT (lire upsilon) , qui est l'espace $gC(T)$ de tous les caractères algébriques de $C(T)$ muni de la topologie de la convergence simple sur $C(T)$, tandis que le compactifié de Stone-Čech de T, noté βT comme d'habitude, peut s'interpréter comme l'espace des caractères de l'algèbre de Banach $C^{\infty}(T)$ des fonctions continues et bornées sur T, muni de la topologie de la convergence simple sur $C^{\infty}(T)$. Dans la terminologie anglo-saxonne υT est dit "realcompactification" de T ; on trouve dans G. Choquet (C1) la dénomination suivante : υT est dit stabilisé de Hewitt de T. La terminologie de Bourbaki (B2, § 4 ex. 17 p. 85) nous paraît préférable : on dit que υT est la réplétion de T et un espace topologique (complètement régulier) est dit replet lorsque T s'identifie (topologiquement) à sa réplétion υT. Les principaux résultats de la théorie de Hewitt sont condensés dans l'énoncé suivant :

(4.4.3) *Théorème : Soit T un espace topologique.*

a) υT est un sous-espace topologique partout dense du compactifié de Stone-Cech βT, complet pour la structure uniforme de la convergence simple sur $C(T)$.

b) La transformation de Dirac $j : T \to \upsilon T$ est continue et son image jT est partout dense (et même G_δ-dense) dans υT. Pour que j soit injective (resp. un homéomorphisme de T sur jT) il faut et il suffit que T soit fonctionnellement séparé (resp : que T soit complètement régulier).

c) Les algèbres $C(T)$ et $C(\upsilon T)$ sont algébriquement isomorphes et les *algèbres de Banach $C^{\infty}(T)$ et $C^{\infty}(\upsilon T)$ sont isométriques ce qui implique les égalités (ou isomorphismes) topologiques :*

$\upsilon(\upsilon T) = \upsilon T$ et $\beta(\upsilon T) = \beta T$. En particulier υT est un espace replet.

d) L'espace υT et la transformation de Dirac j constituent la solution du problème universel des applications continues de T dans des espaces replets quelconques.

Désignons, maintenant et dans toute la suite, par ΘT l'espace topologique $GC(T)$; nous dirons que ΘT est la <u>réplétion compactologique</u> de T et qu'un espace topologique (complètement régulier) T est <u>compactologiquement replet</u> (en abrégé : c-replet) lorsque T s'identifie topologiquement à sa réplétion compactologique ΘT. Les notations ainsi posées sont analogues à celles de la théorie de Hewitt. On va voir que les résultats le sont aussi.

(4.4.4) <u>*Théorème*</u> *: Soit T un espace topologique.*

a) ΘT est un sous-espace topologique de υT, complet pour la structure uniforme de la convergence "compacte" sur $C(T)$.

b) La transformation de Dirac $j : T \longrightarrow \Theta T$ est continue et son image jT est partout dense (et même G_{δ}-dense) dans ΘT. Pour que j soit injective (resp : un homéomorphisme de T sur jT) il faut et il suffit que T soit fonctionnellement séparé (resp : que T soit complètement régulier).

c) Les algèbres $C(T)$ et $C(\Theta T)$ sont <u>compactologiquement</u> isomorphes et les algèbres de Banach $C^{\infty}(T)$ et $C^{\infty}(\Theta T)$ sont isométriques, ce qui implique les égalités (ou isomorphismes) topologiques $\Theta(\Theta T) = \Theta T$; $\upsilon(\Theta T) = \upsilon(\upsilon T) = \upsilon T$ et $\beta(\Theta T) = \beta(\upsilon T) = \beta(\beta T) = \beta T$. En particulier ΘT est un espace c-replet.

d) L'espace ΘT et la transformation de Dirac j constituent la solution du problème universel des applications continues de T dans des espaces c-replets quelconques.

Preuve : L'assertion b) vient d'être obtenue en (4.4.1) et (4.4.2). Démontrons l'assertion c). La transformation de Dirac j . $T \longrightarrow \Theta T$ donne immédiatement, par transposition, un morphisme compactologique $U : C(\Theta T) \longrightarrow C(T)$. On définit l'application $V : C(T) \longrightarrow C(\Theta T)$ par $(Vf)(u) = u(f)$; pour tout disque "compact" H de $C(T)$, on a, pour $f \in H$ et $u, v \in \Theta T$:

$$|(Vf)(u) - (Vf)(v)| = |(u-v)(f)| \leq d_H(u,v)$$

où d_H est précisément un écart de la structure uniforme de ΘT, de sorte que $V(H)$ est équicontinue dans $C(\Theta T)$; de plus si $f_i \longrightarrow f$ dans H alors, pour tout $u \in \Theta T$ on a $u(f_i) \longrightarrow u(f)$ (car u est justement un caractère compactologique) d'où $Vf_i \longrightarrow Vf$ simplement dans $C(\Theta T)$. Il en résulte que $V(H)$ est simplement compact, et aussi équicontinu, donc un disque "compact" de $C(\Theta T)$ et que V est aussi un morphisme compactologique. Enfin $UV = 1$ car $(UVf)(t) = (Vf)(t) = \hat{t}(f) = f(t)$, et $VU = 1$ puisque pour toute $g \in C(\Theta T)$, les fonctions VUg et g coïncident sur la partie dense jT de ΘT ; en effet :

$$(VUg)(\hat{t}) = \hat{t}(Ug) = (Ug)(t) = g(\hat{t})$$

On a déjà ainsi l'isomorphisme compactologique de $C(T)$ et $C(\Theta T)$; et si l'on remarque que le "prolongement" $f^{\Theta} = Vf$ d'une fonction $f \in C(T)$ est tel que $f^{\Theta}(\Theta T) = f(T)$, d'après (4.3.1-a), on a bien l'isométrie des algèbres de Banach $C^{\infty}(T)$ et $C^{\infty}(\Theta T)$. L'assertion a) n'est alors qu'une conséquence de l'assertion c) : en effet ΘT est complètement régulier et sa topologie est celle de la convergence simple sur $C(\Theta T)$; c'est donc bien un sous-espace topologique de υT. Quant à l'assertion d), c'est un cas particulier de la fonctiorialité de $\Theta = GC$ qui s'exprime par le fait que toute application continue $q : T \rightarrow S$ entre deux espaces topologiques définit de façon unique (par exemple par bitransposition) une application continue $q^{\theta} : \theta T \longrightarrow \theta S$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "q"] \arrow[d, "j_T"'] & S \arrow[d, "j_S"] \\ \theta T \arrow[r, "q^{\theta}"] & \theta S \end{tikzcd}$$

Remarque : Il peut paraître à première vue paradoxal que θT soit un sous-espace topologique de υT. En fait υT et θT sont munis respectivement de structures uniformes différentes qui induisent sur θT la même topologie. Mais θT est complet pour la structure uniforme "compacte" sur $C(T)$ alors qu'il n'est pas complet en général, pour la structure uniforme de la convergence simple sur $C(T)$.

Les premières conséquences de (4.4.4) sont les suivantes :

(4.4.5) *Théorème : Pour que deux espaces c-replets soient homéomorphes il faut et il suffit que leurs algèbres de fonctions continues soient compactologiquement isomorphes.*

Avant d'examiner les propriétés des espaces c-replets, il convient d'obtenir une seconde interprétation de la réplétion compactologique. Les résultats qui précèdent et ceux qui vont suivre ont été annoncés sommairement dans une note conjointe H. Buchwalter - R. Pupier (B8). La partie 4.5 qui suit, et qui apporte des lumières nouvelles sur la notion de structure uniforme universelle, est essentiellement due à R. Pupier.

4.5 Structure uniforme universelle.

On sait que parmi toutes les structures uniformes compatibles avec la topologie d'un espace complètement régulier T, il en existe une plus fine que toutes les autres, qu'on appelle structure uniforme universelle. On dira que T est <u>universellement complet</u> (ou <u>complet</u> pour simplifier) s'il est complet pour sa structure uniforme universelle. Il suffit (et il faut) pour cela qu'il soit complet pour <u>une</u> structure uniforme compatible avec sa topologie.

On rappelle que la structure uniforme universelle de T est définie par la famille de tous les écarts finis et continus sur T, écarts que l'on peut d'ailleurs supposer bornés.

Puisque la structure uniforme de la convergence "compacte" sur C(T) est compatible avec la topologie de T (T, étant complètement régulier, est un sous-espace <u>topologique</u> de ΘT), elle est évidemment moins fine que la structure uniforme universelle de T. Le résultat important obtenu par R. Pupier et qu'en réalité ces deux structures uniformes coïncident.

(4.5.1) <u>*Théorème (Pupier)*</u> :

Sur un espace topologique complètement régulier T la structure uniforme universelle est exactement celle de la convergence "compacte" sur C(T).

<u>Preuve</u> : Il suffit de prouver que tout écart d, continu et borné sur T, est uniformément continu pour la structure uniforme de la convergence "compacte" sur C(T)), laquelle est définie par les écarts d_H associés aux parties équicontinues et simplement bornées H de C(T) selon la formule $d_H(t,t') = \sup_{f\in H}|f(t)-f(t')|$.
Or cela résulte immédiatement du lemme :

(4.5.2) <u>*Lemme*</u> : *Soit d un écart continu et borné sur T et soit H l'ensemble des fonctions $d(a,.)$: $t \longrightarrow d(a,t)$, lorsque a décrit T. Alors H est une partie équicontinue et uniformément bornée de C(T) et de plus $d = d_H$.*

<u>Preuve</u> : L'équicontinuité de H résulte de l'inégalité

$$|d(a,t)-d(a,t')| \leqslant d(t,t')$$

et de la continuité de d. Et de plus :

$$d_H(t,t') = \sup_{a\in T}|d(a,t)-d(a,t')| \leqslant d(t,t')$$

Mais puisque, pour $a = t$ on a $|d(a,t)-d(a,t')| = d(t,t')$, on voit bien que $d = d_H$.

(4.5.3) <u>*Corollaire 1*</u> *: La structure uniforme universelle d'un espace complètement régulier T est exactement la structure uniforme la moins fine rendant uniformément équicontinus les ensembles équicontinus de fonctions continues.*

(4.5.4) <u>*Corollaire 2*</u> *: Les espaces complètement réguliers complets sont exactement les espaces c-replets. Plus généralement le complété universel d'un espace complètement régulier T s'identifie à sa réplétion compactologique θT, espace des caractères compactologiques de l'algèbre C(T) muni de la structure uniforme de la convergence "compacte" sur C(T).*

<u>Remarque</u> : Lorsque T n'est pas complètement régulier, on dira qu'une structure uniforme sur T est <u>sous-compatible</u> lorsqu'elle définit sur T une topologie moins fine que la topologie propre de T. On dira alors que la structure uniforme universelle de T est la plus fine des structures uniformes sous-compatibles ; elle est évidemment définie par la famille de tous les écarts finis et continus sur T. Avec ces notations le théorème (4.5.1) reste valable dans le cas général. Mais de toute façon, on peut se ramener immédiatement au cas où T est complètement régulier chaque fois que T est supposé fonctionnellement séparé. Il suffit d'introduire sur T la topologie $\rho(T)$ de la convergence simple sur C(T), donnant un espace complètement régulier ρT, pour constater que la structure uniforme universelle de T (au sens ici élargi) coïncide avec la structure uniforme universelle de ρT.

4.6 Les espaces compactologiquement replets.

Il convient maintenant d'étudier les propriétés des espaces c-replets. On va voir qu'elles sont au moins aussi bonnes que celles des espaces replets. Elles sont parfois meilleures, ce qui nous amènera assez vite à faire une comparaison précise entre les notions de réplétion et de réplétion compactologique.

Comme exemples d'espaces c-replets citons déjà :

(4.6.1) Théorème :

a) Tout espace replet est c-replet.

b) Tout espace paracompact est c-replet.

c) Soit T un k_R-espace. On suppose que l'elc $C(\gamma T) = C_c(T)$ est un elc de Kelley. Alors T est un espace c-replet.

d) Les espaces c-replets sont exactement les spectres $G(A)$ des algèbres compactologiques convexes A.

Preuve : L'assertion a) est évidente car $T \subset \theta T \subset \upsilon T = T$ lorsque T est replet. Démontrons c) : on sait déjà, avec (4.2.3), que $C(T) = \bar{\gamma} C(\gamma T)$ et l'hypothèse sur $C(\gamma T)$ montre que $\theta T = G\bar{\gamma}C(\gamma T)$ est un ensemble égal à $GC(\gamma T)$; or γT étant un espace compactologique régulier, on a $GC(\gamma T) = \gamma T$, d'après (1.4.2), de sorte que T et θT coïncident algèbriquement, ce qui suffit puisque T est complètement régulier. Démontrons d) : il suffit pour cela de prouver que tout espace $T = G(A)$ est c-replet ; or T est évidemment complètement régulier, et universellement complet d'après (4.1.2), donc c-replet. Enfin démontrons b) : soit T un espace paracompact et soit $u \in \theta T$; pour prouver que $u \in T$ il suffit, comme on l'a vu au début de la démonstration de (4.3.3) de montrer qu'il existe un point $t \in T$ tel que la condition "$f \in C(T)$, $f \geq 0$ et $u(f) = 0$" implique la condition "$f(t) = 0$". Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe pour tout $t \in T$, une fonction $f_t \in C(T)$ telle que $f_t \geq 0$, $u(f_t) = 0$ et $f_t(t) > 0$. Il existe alors, pour tout $t \in T$, un voisinage ouvert U_t de t tel que $f_t(s) > 0$ pour tout $s \in U_t$. Puisque T est paracompact il existe un recouvrement ouvert localement fini $(\omega_i)_{i\in I}$ plus fin que le recouvrement ouvert $(U_t)_{t\in T}$. Soit $i \longrightarrow t(i)$ une fonction de I dans T telle que $\omega_i \subset U_{t(i)}$ pour tout i ; posons $g_i = f_{t(i)}$, de sorte que $g_i \geq 0$, $u(g_i) = 0$ et $g_i(s)>0$ pour tout $s \in \omega_i$. Soit maintenant $(\phi_i)_{i\in I}$ une partition continue de l'unité surbodonnée au recouvrement $(\omega_i)_{i\in I}$. Posons $h_i = g_i\phi_i$ d'où $h_i \geq 0$ et $u(h_i) = 0$. Le recouvrement ouvert (ω_i) étant localement fini, il est facile de voir que la famille $(h_i)_{i\in I}$ est équicontinue et simplement bornée dans $C(T)$. Posons $h = \operatorname{Sup}_{i\in I} h_i$; alors, d'après (4.3.2), on a $h \in C(T)$ et $u(h) = 0$. Montrons enfin la contradiction avec (4.3.1.a) en prouvant que l'on a $h(t)>0$ pour tout $t \in T$; en effet, pour t fixé dans T, il existe un indice $i \in I$ tel que $\phi_i(t)>0$ (car $\Sigma\phi_i = 1$ et $\phi_i \geq 0$), d'où nécessairement $t \in \omega_i$. (car le support de ϕ_i est contenu dans ω_i) et $h(t) \geq g_i(t)\phi_i(t)>0$.

(4.6.2) <u>*Corollaire*</u> *: Tout espace discret est c-replet. Tout espace métrisable est c-replet.*

<u>Remarques</u> :

<u>Remarque 1</u> : Pour le cas des espaces paracompacts, le théorème précise un résultat cité par Bourbaki (B1, § 4 ex. 19 p. 102) selon lequel tout espace paracompact est universellement complet. Mais la démonstration donnée ici paraît plus simple.

<u>Remarque 2</u> : Le corollaire peut se démontrer directement sans difficulté lorsque T est supposé discret. Lorsque T est métrisable on peut aussi se référer à Gillman-Jerison (G1 ; 15-24) pour retrouver que T est universellement complet sans avoir à utiliser la paracompacité d'un espace métrisable. D'ailleurs, on peut aussi adapter à l'emploi des caractères compactologiques une démonstration de Bourbaki (B1, § 2 ex. 23 p. 54) qui donne un résultat plus général. Cela fournit l'énoncé :

(4.6.3) *Proposition : Tout espace complètement régulier T, sur lequel existe une distance continue d, est c-replet.*

Preuve : Il est facile de voir, grâce à l'inégalité triangulaire, que la distance d se prolonge, par continuité séparée, en une application $\bar{d} : \theta T\times\theta T \longrightarrow R_+$, vérifiant encore l'inégalité triangulaire. Il suit de là que $\bar{d}$ est continue sur $\theta T\times\theta T$ de sorte que $\bar{d}(u,u) = 0$, puisque $\bar{d}(u,u)$ est la limite de $d(t,t)$ lorsque $t\in T$ tend vers u. Ainsi $\bar{d}$ est un écart continu sur θT. Pour tout $u\in\theta T$, les images $\bar{d}(u,\theta T)$ et $\bar{d}(u,T)$ coïncident d'après (4.3.1.a), de sorte qu'il existe un point $t\in T$ tel que $\bar{d}(u,t) = 0$ Et si $t'\in T$ possède la même propriété alors $d(t,t')\leqslant\bar{d}(u,t)+\bar{d}(u,t') = 0$; d'où $t = t'$. Ainsi il existe une fonction $p : \theta T\longrightarrow T$, bien définie par la condition $\bar{d}(u,p(u)) = 0$. Il suit de là que :

$$d(p(u),p(v))\leqslant\bar{d}(u,p(u))+\bar{d}(u,v)+\bar{d}(v,p(v)) = \bar{d}(u,v)$$

d'où l'on tire la continuité de la fonction p. Enfin si $t\in T$, on a évidemment $p(t) = t$. En résumé, tout cela signifie que T est exactement un rétracte de θT ; il est donc fermé dans θT et par suite $T = \theta T$ pour raison de densité.

Nous dirons qu'un tel espace T est submétrisable. Un espace submétrisable est donc un espace complètement régulier dont la topologie est plus fine qu'une topologie métrisable. Et puisque tout sous-espace de T est submétrisable de façon évidente, on voit que tout sous-espace d'un espace submétrisable est c-replet.

Remarque 3 : Il existe des espaces complètement réguliers T qui ne sont pas c-replets. Pour en obtenir des exemples simples, rappelons qu'un espace topologique T est dit weierstrassien dans la terminologie de Bourbaki (B1, § 1 ex. 22 p. 27) lorsque toute fonction continue sur T est bornée. Dans la suite on dira que T est pseudo-compact, en suivant la terminologie de Gillman-Jerison (G1, 1.4), s'il est complètement régulier et weierstrassien. L'espace W des ordinaux strictement inférieurs au premier ordinal non dénombrable, muni de la topologie d'ordre, est, par exemple un espace localement compact, normal, pseudocompact et non compact.

(4.6.4) <u>*Proposition*</u> *: Soit T un espace pseudocompact. Alors $\Theta T = \upsilon T = \beta T$, de sorte que T est c-replet si et seulement si il est compact.*

<u>Preuve</u> : Puisque $C(T) = C(\Theta T)$, il est clair que ΘT est aussi pseudocompact. Mais ΘT, étant complet, est alors compact car un espace pseudocompact est précompact pour toute structure uniforme compatible avec sa topologie. Ainsi ΘT est compact et partout dense dans βT, d'où l'égalité $\Theta T = \beta T$, ce qui suffit.

Les questions de stabilité des espaces c-replets sont résolues par :

(4.6.5) <u>*Proposition*</u> *:*

a) Tout sous-espace fermé d'un espace c-replet est c-replet.

b) Tout produit d'espaces c-replets est c-replet.

c) Toute limite projective topologique d'espaces c-replets est un espace c-replet.

<u>Preuve</u> : Elle est évidente avec le critère de complétion universelle.

(4.6.6) <u>*Corollaire*</u> *: Soit X un espace topologique séparé et soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille non vide de sous-espaces c-replets de X. Alors l'espace $T = \bigcap_{i \in I} T_i$ est c-replet.*

(4.6.7) <u>*Proposition*</u> *: Soit T un espace c-replet et soit $f : T \longrightarrow X$ une application continue de T dans un espace topologique quelconque X. Alors, pour tout sous-espace c-replet A de X, le sous-espace $f^{-1}(A)$ de T est c-replet.*

<u>Preuve</u> : Posons $X = f^{-1}(A)$; l'injection canonique $i : S \longrightarrow T$ se prolonge en une application continue $i^{\Theta} : \Theta S \longrightarrow T$, qui est évidemment un homéomorphisme de la partie partout dense S de ΘS sur son image. Il en résulte, par un lemme topologique utile (G1, 6-11 par exemple), l'inclusion $i^{\Theta}(\Theta S - S) \subset T - S$ d'où $(f \circ i^{\Theta})(\Theta S - S) \subset f(T - S) \subset f(T) - A$. Par ailleurs la restriction $f_S : S \longrightarrow X$ se prolonge

en $f_S^\theta : \theta S \longrightarrow X$ et, puisque $f_S(S) \subset A$ et que A est c-replet on a aussi $f_S^\theta(\theta S) \subset A$. Or $f \circ i^\theta$ et f_S^θ, qui coïncident sur X, sont égales, de sorte que $(f \circ i^\theta)(\theta S - S) \subset A \cap (f(T) - A) = \emptyset$ et par suite $\theta S - S = \emptyset$.

(4.6.8) <u>*Corollaire 1*</u> *: Soient T un espace c-replet et M un espace submétrisable. Soient f et g : $T \longrightarrow M$ deux fonctions continues. Alors le sous-espace fermé $S = \{t, f(t) = g(t)\}$ et le sous-espace ouvert $\complement S = \{t, f(t) \neq g(t)\}$ sont c-replets.*

<u>Preuve</u> : Soient Δ_T et Δ_M les diagonales des espaces respectifs $T \times T$ et $M \times M$. L'application $h : T \times T \longrightarrow M \times M$ définie par $h(s,t) = (f(s), g(t))$ est continue et il est clair que S et $\complement S$ sont respectivement homéomorphes aux espaces $\Delta_T \cap h^{-1}(\Delta_M)$ et $\Delta_T \cap h^{-1}(\complement \Delta_M)$. Le résultat provient donc du fait que $T \times T$ et Δ_T sont c-replets et que Δ_M et $\complement \Delta_M$ sont aussi c-replets, d'après la fin de la remarque 2, puisque $M \times M$ est submétrisable.

(4.6.9) <u>*Corollaire 2*</u> *: Soit T un espace c-replet et soit $f \in C(T)$. Désignons par $Z(f)$ le noyau de f : $Z(f) = \{t, f(t) = 0\}$. Alors le complémentaire de $Z(f)$ est un sous-espace c-replet de T.*

(4.6.10) <u>*Corollaire 3*</u> *: Soit T un espace c-replet dont tout point est un G_δ (par exemple si T est submétrisable). Alors tout sous-espace de T est c-replet.*

<u>Preuve</u> : L'hypothèse sur T (sans omettre la régularité complète !) implique que tout point de t est un noyau $Z(f)$. Alors un sous-espace quelconque de T, étant intersection de complémentaires de noyaux, est bien c-replet.

On tire encore du corollaire 2 :

(4.6.11) <u>*Corollaire 4*</u> *: Soit T un espace c-replet. Alors tout F_σ de T est un sous-espace c-replet.*

Preuve : Soit $F = \bigcup F_n$ une réunion dénombrable de fermés F_n de T. Il suffit de prouver que F est l'intersection des complémentaires de noyaux qui le contiennent. Et pour cela il suffit de prouver que, pour tout $x \notin F$, il existe une fonction $f \in C(T)$ telle que $f(x) = 0$ et $f(t) \neq 0$ pour tout $t \in F$. Or $x \notin F_n$, pour chaque n, d'où (par complète régularité de T) l'existence de $f_n \in C(T)$ vérifiant $0 \leqslant f_n \leqslant 1$, $f_n(x) = 0$ et $f_n = 1$ sur F_n. La fonction $f = \Sigma 2^{-n} f_n$ répond donc aux exigences énoncées.

On peut finalement rassembler (4.6.5-a) et (4.6.11) pour obtenir le résultat suivant :

(4.6.12) Théorème : *Dans un espace c-replet toute intersection de F_σ est c-replète.*

La proposition (4.6.5) donne un énoncé valable pour les limites projectives quelconques. Du côté des limites inductives il n'y a pas de résultat général. En fait les difficultés proviennent uniquement, comme il est bien connu dans d'autres situations analogues, du passage au quotient. En effet :

(4.6.13) Proposition : *Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille non vide d'espaces complètement réguliers. Alors leur somme topologique $T = \Sigma T_i$ est un espace complètement régulier dont la réplétion compactologique ΘT s'identifie à la somme topologique $\Sigma \Theta T_i$ des réplétions compactologiques des espaces T_i. En particulier une somme topologique d'espaces c-replets est c-replète.*

Preuve : Laissons de côté le fait élémentaire que T est complètement régulier et désignons par q_i l'injection canonique $T_i \longrightarrow T$; elle se prolonge en une application continue $q_i^\Theta : \Theta T_i \longrightarrow \Theta T$, ce qui permet la construction d'une application continue $q^\Theta : \Sigma \Theta T_i \longrightarrow \Theta T$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
T_i \arrow[r, "q_i"] \arrow[d, "j_i"'] & T = \Sigma T_i \arrow[d, dash, "j"] \\
\theta T_i \arrow[r, "q_i^\theta"] \arrow[d] & \theta T \\
\Sigma\theta T_i \arrow[ur, "q^\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

On va prouver que q^θ est un homéomorphisme, ce qui démontrera la proposition. L'application q_i^θ est définie par l'égalité $q_i^\theta(u_i)(f) = u_i(f|_{T_i})$ pour tout $u_i \in \theta T_i$ et toute $f \in \mathcal{C}(T)$, ce qui prouve que chaque q_i^θ est <u>injective</u> car l'application $f \longrightarrow f|_{T_i}$ de $\mathcal{C}(T)$ dans $\mathcal{C}(T_i)$ est surjective. De plus l'égalité $q_i^\theta(u_i) = q_k^\theta(u_k)$ pour $u_i \in \theta T_i$ et $u_k \in \theta T_k$ implique nécessairement l'égalité $i = k$ (et par conséquent $u_i = u_k$) car, en désignant par 1_i la fonction caractéristique de T_i (qui est bien continue sur T) on a $u_i(1_i|_{T_i}) = 1 = u_k(1_i|_{T_k})$, donc $1_i|_{T_k} \neq 0$ et $i = k$. Ainsi <u>q^θ est injective</u>.

Montrons maintenant que q^θ est surjective. Pour cela fixons $u \in \theta T$. Pour toute $f \in \mathcal{C}(T)$ la famille des fonctions $f_J = \sum_{i \in J} f1_i$ est manifestement équicontinue et simplement bornée lorsque J décrit l'ensemble des parties finies de I. De plus $f = \sum_{i \in I} f1_i$ est la limite simple des fonctions f_J, de sorte que $u(f) = \sum u(f1_i)$. En particulier, pour $f = 1$, $1 = \sum u(1_i)$, ce qui implique l'existence d'un indice i tel que $u(1_i) \neq 0$ d'où nécessairement $u(1_i) = 1$ et $u(1_k) = 0$ pour tout $k \neq i$. Autrement dit il existe un indice i unique tel que $u(f) = u(f.1_i)$ pour toute $f \in \mathcal{C}(T)$. Désignons maintenant pour toute $f_i \in \mathcal{C}(T_i)$ par $\tilde{f}_i$ la fonction continue sur T obtenue en prolongeant f_i par 1 en dehors de T_i ; il est clair que lorsque f_i décrit un "compact" de $\mathcal{C}(T_i)$ la fonction $\tilde{f}_i$ décrit un "compact" de $\mathcal{C}(T)$, ce qui permet de montrer que l'application $f_i \longrightarrow u(\tilde{f}_i) = u(\tilde{f}_i 1_i)$ est en réalité un caractère compactologique $u_i \in \theta T_i$. Comme on a donc $u(f) = u_i(f|_{T_i})$ pour toute $f \in \mathcal{C}(T)$ on voit que précisément $u = q_i^\theta(u_i)$ ce qui prouve que q^θ est surjective. Il reste à voir que q^θ est un homéomorphisme. Dire que $u^\alpha \longrightarrow u$ dans θT lorsque α décrit un ensemble ordonné A, c'est exactement dire, d'après (4.4.a) que $u^\alpha(f) \to u(f)$ pour toute $f \in \mathcal{C}(T)$;

on peut supposer $u = q_i^{\Theta}(u_i)$ pour un indice i fixé et $u_i \in \Theta T_i$, de sorte que $u^{\alpha}(1_i) \to 1$, ce qui implique nécessairement $u^{\alpha}(1_i) = 1$ pour $\alpha \geq \alpha_0$ et prouve en même temps que u^{α} est l'image $q_i^{\Theta}(u_i^{\alpha})$ d'un caractère $u_i^{\alpha} \in \Theta T_i$. Comme $u_i^{\alpha}(f|_{T_i}) \to u_i(f|T_i)$ pour toute $f \in C(T)$, on a aussi $u_i^{\alpha}(f_i) \longrightarrow u_i(f_i)$ pour toute $f_i \in C(T_i)$, autrement dit $u_i^{\alpha} \longrightarrow u_i$ dans ΘT_i, donc aussi $u_i^{\alpha} \longrightarrow u_i$ dans la somme topologique $\Sigma \Theta T_i$, ce qui termine la démonstration.

4.7 <u>Comparaison entre réplétion et réplétion compactologique</u>.

Pour les besoins de cette comparaison, rappelons qu'un cardinal M est dit <u>mesurable</u> (voir par exemple G1, ch. 12) ou encore <u>2-mesurable</u> selon la terminologie de G. Choquet (C1), lorsqu'il existe un espace discret T, de cardinal M, et une mesure positive dénombrablement additive μ sur la tribu $\mathcal{P}(T)$ de toutes les parties de T, ne prenant que les valeurs 0 et 1, et telle que $\mu(T) = 1$ et $\mu(\{t\}) = 0$ pour tout $t \in T$. On ignore s'il existe ou non des cardinaux mesurables et il semble probable que l'axiome d'existence d'un tel cardinal puisse être rajouté à la théorie des ensembles sans contradiction. D'ailleurs un tel cardinal, s'il existe, est extrêmement grand ; il est déjà fortement inaccessible mais il est strictement plus grand que le premier cardinal fortement inaccessible. En suivant G. Choquet, appelons <u>modéré</u> tout cardinal non mesurable (et aussi tout ensemble dont le cardinal est non mesurable) ; les cardinaux modérés constituent une section commençante de la classe de tous les cardinaux.

La liaison avec la théorie de la réplétion se fait par l'intermédiaire des résultats suivants, que nous rappelons simplement :

(4.7.1) <u>*Proposition (Gillman-Jerison, G1 12-2)*</u>.

Pour qu'un espace discret T soit replet il faut et il suffit qu'il soit modéré.

(4.7.2) <u>*Théorème*</u> *(Shirota, S2, voir aussi G1, 15-20)*

Soit T un espace complètement régulier dont les parties discrètes fermées sont modérées. Il est replet si et seulement si il est complet pour une structure uniforme compatible (c'est-à-dire si et seulement si il est universellement complet).

En conséquence :

(4.7.3) <u>*Théorème*</u> *: Soit T un espace complètement régulier tel que toute partie discrète de T soit modérée. Alors $\upsilon T = \theta T$.*

<u>Preuve</u> : On va prouver qu'une partie discrète et fermée D de θT est nécessairement modérée, ce qui impliquera, avec le théorème de Shirota, que θT est replet donc que $\upsilon T = \upsilon(\theta T) = \theta T$. Il existe, pour tout point $u \in D$, un voisinage ouvert V_u de u dans θT tel que $V_u \cap V_v = \emptyset$ pour $u \neq v$. Pour tout $u \in D$, il existe, par densité de T dans θT, un point $t_u \in T \cap V_u$. Soit D' l'ensemble des points t_u ; il est clair que $\operatorname{card} D = \operatorname{card} D'$. Par ailleurs $W_u = T \cap V_u$ est un voisinage ouvert de t_u dans T tel que $W_u \cap W_v = \emptyset$ pour $u \neq v$. Ainsi la partie D' de T est discrète, donc modérée et D est aussi modérée. On pourra remarquer qu'on n'utilise pas l'hypothèse que D est fermée dans θT.

(4.7.4) <u>*Corollaire*</u> *: Pour qu'il existe un espace complètement régulier T tel que $\upsilon T \neq \theta T$ il faut et il suffit qu'il existe un cardinal mesurable.*

<u>Preuve</u> : Si $\upsilon T \neq \theta T$, alors $\operatorname{card} T$ est nécessairement mesurable d'après le théorème. Réciproquement si T est discret et si $\operatorname{card} T$ est mesurable alors T est c-replet d'après (4.6.2) et n'est pas replet d'après (4.7.1).

On voit maintenant mieux en quoi la notion d'espace c-replet, quoique moins simple a priori que celle d'espace replet, peut apparaître comme plus naturelle. Elle permet la plupart du temps de se débarraser de la condition de cardinalité modérée qui encombre presque tous les énoncés relatifs aux espaces replets. Pour s en convaincre il suffit par exemple de comparer les énoncés (4.6.2) et (4.7.1) relatifs aux espaces discrets, ou bien encore de comparer la caractérisation donnée par C. Wenjen (W4, th.5) des espaces paracompacts replets (un espace paracompact est replet si et seulement si chacun de ses recouvrements ouverts possède un sous-recouvrement modéré) au théorème (4.6.1.b), ou bien enfin de remarquer qu'une somme topologique quelconque d'espaces c-replets est c-replète, d'après (4.6.13), alors qu'une somme topologique d'espaces replets n'est replète que si l'ensemble des indices correspondant est modéré.

On trouve encore dans C-Wenjen (W4, th.1) une caractérisation topologique des espaces replets : un espace complètement régulier est replet si et seulement si c'est une intersection quelconque de F_σ dans un espace compact. Ce résultat est à rapprocher du théorème (4.6.12) et soulève en réalité le problème, non résolu ici d'une caractérisation purement topologique des espaces c-replets.

<u>Remarque</u> : Notons pour en terminer avec cette question qu'il existe des relations de dualité assez frappantes entre les notions d'espaces replets ou c-replets et les notions d'elc bornologiques ou d'elc de Kelley. En effet un espace discret I est toujours c-replet et n'est replet que si I est modéré ; et l'elc produit R^I est toujours espace de Kelley, d'après (3.4.11), mais il n'est bornologique que si I est modéré (théorème d'Ulam-Mackey ; voir par exemple : Kelley-Namioka K2, 19-9). Le mystère s'éclaircit en faisant appel à un résultat de Nachbin (N1) et Shirota (S3) (voir aussi Warner (W3)) selon lequel, si T est un espace complètement régulier, l'elc $C_c(T)$, espace des fonctions continues sur T muni de la topologie de la convergence compacte, n'est bornologique que si T est replet.

Et nous avons vu, en (4.6.1.c), que (tout au moins si T est un k_R-espace) T est effectivement c-replet chaque fois que l'elc $C_c(T)$ est un espace de Kelley. On peut donc raisonnablement poser le problème de savoir si, relativement à un espace complètement régulier T, les conditions "T est c-replet" et "$C_c(T)$ est un elc de Kelley" sont exactement équivalentes. Par ailleurs l'analogie se poursuit au-delà des espaces discrets I et des produits de droites $R^I = C_c(I)$. Si l'on considère un produit $X = \prod_{i \in I} X_i$ d'elc séparés, on sait que X est bornologique chaque fois que les X_i le sont pourvu que I soit modéré (K2, 19-9) et que X est espace de Kelley chaque fois que les X_i le sont, et ceci sans condition cardinale. Considérant alors une somme topologique $T = \sum_{i \in I} T_i$ d'espaces complètement réguliers, et remarquant, ce qui est immédiat, que $C_c(T) = \prod_{i \in I} C_c(T_i)$, on aperçoit clairement les liaisons énoncées entre les théorèmes sur les sommes topologiques d'espaces replets ou c-replets et ceux sur les produits d'elc bornologiques ou d'elc de Kelley.

4.8 <u>L'espace M(T)</u>.

On peut associer à chaque espace topologique T un elc complet M(T) en choisissant pour M(T) le dual de l'ecc $\mathcal{C}(T)$, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires μ sur $\mathcal{C}(T)$ qui sont simplement continues sur chaque partie équicontinue et simplement bornée. L'espace M(T) est évidemment muni de la topologie de la convergence "compacte" sur $\mathcal{C}(T)$ et l'on sait alors que son dual M(T)' s'identifie compactologiquement à l'ecc $\mathcal{C}(T)$. De façon évidente M(T) contient l'espace θT qui est formé des éléments $\mu \in M(T)$ qui sont multiplicatifs et unitaires, et même θT est un sous-espace topologique de M(T). D'ailleurs, puisque $\mathcal{C}(T) = \mathcal{C}(\theta T)$, on a $M(T) = M(\theta T)$. Il suit de là que la transformation de Dirac $j : T \longrightarrow \theta T$ peut être considérée comme opérant de T dans M(T). On obtient comme propriétés essentielles de M(T) celles décrites par le théorème suivant que l'on pourra rapprocher du théorème (4.4.4) :

(4.8.1) <u>*Théorème*</u> :

a) M(T) est un elc complet contenant ΘT comme sous-espace topologique (et aussi sous-espace uniforme) fermé.

b) La transformation de Dirac $j : T \rightarrow M(T)$ est continue et son image jT est totale dans M(T). Pour que j soit un homéomorphisme de T sur jT il faut et il suffit que T soit complètement régulier.

c) L'espace M(T) et la transformation de Dirac j constituent la solution du problème universel des applications continues de T dans des elc complets quelconques.

<u>Preuve</u> : L'assertion a) est déjà acquise. Pour voir que jT est totale dans M(T) il suffit de voir que si une forme linéaire continue sur M(T), c'est-à-dire une fonction $f \in C(T)$, s'annule sur jT alors elle est nulle, ce qui est immédiat et donne l'assertion b). Enfin si $g : T \rightarrow E$ est une fonction continue de T dans un elc complet T, on construit par transposition une application $g' : E' \rightarrow C(T)$ qui est un morphisme compactologique défini par $(g'x')(t) = \langle f(t),x' \rangle$, puis,par transposition encore,une application linéaire continue $G : M(T) \longrightarrow (E')^{*}$. Or $(E')^{*} = E$ comme on sait, puisque E est complet, de sorte que G est un morphisme d'elc complets rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j"'] & E \\ M(T) \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd}$$

L'unicité de G provient du fait que jT est une partie totale de M(T), ce qui démontre enfin l'assertion c).

<u>Remarque</u> : L'espace M(T) peut probablement jouer un rôle en théorie de l'intégration sur un espace complètement régulier. En effet si T est compact, on sait que $C(T) = \overline{\gamma}C(T)$ donc $M(T) = (C(T))'_c$; on retrouve ainsi l'espace des mesures de Radon

sur T muni de la topologie de la convergence compacte sur $C(T)$ (qui peut aisément remplacer la topologie vague). On peut d'ailleurs employer sans incohérence les notations et la terminologie de la théorie de l'intégration. En effet, si T est par exemple complètement régulier, l'injection compactologique $C(\beta T) = \bar{\gamma}C^{\infty}(T) \longrightarrow C(T)$ donne un morphisme $M(T) \longrightarrow M(\beta T)$ qui associe à tout élément $\mu \in M(T)$ une mesure de Radon μ_β sur βT. Evidemment μ_β est définie par restriction de μ à l'espace $C^{\infty}(T)$. Mais l'important est que l'application $\mu \longrightarrow \mu_\beta$ est injective ; en effet :

(4.8.2) <u>*Proposition*</u> *: Pour que $\mu \in M(T)$ soit nulle il faut et il suffit que $\mu(f) = 0$ pour toute $f \in C^{\infty}(T)$.*

<u>Preuve</u> : Si $f \in C(T)$ désignons par f_n la fonction continue (et bornée) obtenue en tronquant f par $\pm n$. On sait que la suite (f_n) est équicontinue, simplement bornée et converge simplement vers f. Il s'ensuit que $\mu(f_n) = 0$ et que $\mu(f) = \lim \mu(f_n) = 0$, ce qui suffit.

Mais il n'entre pas dans notre propos de faire une étude plus détaillée de l'espace $M(T)$. Nous espérons quelque jour reprendre cette question en liaison avec des produits tensoriels compactologiques.

<u>CHAPITRE 5</u> : <u>PARTIES BORNEES D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE</u>.

5.1 <u>Parties bornées d'un espace topologique</u>.

En s'inspirant de la théorie des parties bornées d'un elc on est amené à introduire la définition :

(5.1.1) <u>*Définition*</u> *: Une partie P d'un espace topologique T est dite bornée lorsque toute fonction continue $f \in C(T)$ reste bornée sur P.*

Si T est complètement régulier cela revient à dire que P est bornée dans l'elc M(T).

Dans le cas général on a, par des vérifications évidentes :

(5.1.2) *Proposition :*

a) La famille des parties bornées de T est un recouvrement héréditaire, stable par réunion finie et par passage à l'adhérence.

b) Pour que $P \subset T$ soit bornée il suffit que toute suite de P soit bornée.

c) Une fonction continue $f : T \longrightarrow S$ transforme toute partie bornée de T en une partie bornée de S.

d) Toute partie bornée P de T est précompacte pour la structure uniforme de la convergence simple sur $C(T)$, c'est-à-dire que les parties bornées P de T sont exactement celles dont l'image jP par la transformation de Dirac est relativement compacte dans l'espace υT.

e) Tout sous-espace pseudocompact de T (en particulier tout compact de T) est borné.

f) Enfin dire que T est lui-même borné c'est dire que T est pseudocompact.

Remarque : A notre connaissance la notion de partie bornée d'un espace topologique n'a pas jusque là été systématiquement étudiée. On verra cependant qu'on peut bâtir une théorie relativement voisine de celle des parties bornées d'un elc et aboutir à l'introduction de classes nouvelles d'espaces topologiques.

La stabilité des parties bornées relativement à la catégorie des espaces topologiques n'est pas excellente. Cependant :

(5.1.3) *Proposition : Soit $T = \Sigma T_i$ une somme topologique. Pour qu'une partie $P \subset T$ soit bornée il faut et il suffit que les parties $P_i = P \cap T_i$ soient vides sauf un nombre fini d'entre elles, les autres étant bornées dans chaque espace T_i.*

Preuve : Si P vérifie la propriété elle est évidemment bornée. Si P est bornée alors, en supposant qu'il existe une suite d'indices i_k telle que $P_{i_k} \neq \emptyset$ on obtient une contradiction en remarquant que la fonction $f = \Sigma k 1_{T_{i_k}}$ est non bornée sur P et cependant continue sur P. Enfin il est immédiat que chaque P_i est de toute façon bornée dans T_i.

Par contre si T est un espace produit (et même seulement un produit fini) il n'est pas vrai en général qu'un produit de parties bornées dans chaque facteur soit borné dans T. Par exemple en suivant Frolik (F1) on peut mettre en évidence des espaces pseudocompacts T_1 et T_2 tels que le produit $T_1 \times T_2$ ne soit pas pseudocompact. Néanmoins une propriété positive reste la suivante :

(5.1.4) *Proposition : Soit S×T un produit topologique. Si K est compact dans S et si P est borné dans T alors K×P est borné dans S×T.*

Preuve : Soit f une fonction continue et positive sur S×T. A partir de f on définit la fonction F sur T par :

$$F(y) = \operatorname*{Sup}_{x \in K} f(x,y)$$

et l'on vérifie aisément par un argument de compacité que F est continue sur T. En ce cas elle est bornée sur P ce qui prouve bien que f est bornée sur K×P.

5.2 Parties pseudofermées d'un espace topologique.

On trouve dans l'article (C2) de Comfort un théorème dit de Hager-Johnson (th. 4.1) selon lequel l'adhérence $\overline{\omega}$ de tout ouvert borné ω dans un espace complètement régulier T est un espace pseudocompact. Nous voulons ici généraliser ce résultat à des parties de T qui ne soient pas nécessairement de cette forme. La notion nouvelle de parties pseudofermées va régler la question. Rappelons, pour bien préciser les choses, qu'une suite (U_n) de parties d'un espace topologique T est dite localement finie dans T si et seulement si tout point t de T possède un voisinage V ne coupant qu'un nombre fini des U_n (et non pas si et seulement si l'ensemble des entiers n tels que $V \cap U_n \neq \emptyset$ est fini). Ainsi une suite (U_n) n'ayant qu'un nombre fini de termes distincts est évidemment localement finie. Cela étant :

(5.2.1) <u>*Définition*</u> *: Une partie P d'un espace topologique T est dite pseudofermée (dans T) si et seulement si pour toute suite (U_n) localement finie dans P d'ouverts non vides de P il existe une suite (V_n) localement finie dans T d'ouverts de T tels que $\emptyset \neq V_n \cap P \subset \overline{U_n}$, où $\overline{U_n}$ est l'adhérence de U_n dans T.*

<u>Remarque</u> : La condition dernière de la définition peut paraître curieuse. Ce qu'on veut pratiquement, c'est pouvoir relever une suite localement finie d'ouverts de P en une suite localement finie d'ouverts de T et l'on voit aisément que la condition plus simple $V_n \cap P = U_n$ convient. Mais il se trouve que la condition plus large de la définition suffit pour obtenir tous les bons résultats et donne même quelques propriétés supplémentaires ; c'est pourquoi elle a été préférée.

Les propriétés des parties pseudofermées se rassemblent en :

(5.2.2) <u>*Proposition*</u> *:*

a) Tout fermé régulier F de T (c'est-à-dire tel que $F = \overline{\mathring{F}}$) est pseudofermé.

b) Tout rétracte P de T est pseudofermé.

c) Si P est pseudofermé dans T alors son adhérence $\overline{P}$ est aussi pseudofermée.

<u>Preuve</u> : Démontrons a) : soit $\omega = \mathring{F}$. Partons de la suite (U_n) de la définition (5.2.1) et posons $V_n = U_n \cap \omega$. Alors V_n est ouvert dans ω donc dans T et V_n est non vide puisque $\overline{\omega} = F$. La suite (V_n) est localement finie dans $F = \overline{\omega}$, car $V_n \subset U_n$;

elle est donc aussi localement finie dans T, car F est fermé. De plus $V_n \cap F = V_n \subset U_n$ et $V_n \cap F \neq \emptyset$ puisque $V_n \neq \emptyset$.

Démontrons b) : soit $p : T \longrightarrow P$ une application continue telle que $p|_P = 1_P$. A partir de la suite (U_n) construisons la suite $V_n = \overset{-1}{p}(U_n)$ d'ouverts de T. Alors $V_n \cap P = U_n$. Enfin la suite (V_n) est localement finie car si $t \in T$ alors $pt \in P$ et il existe un voisinage U de pt dans P ne coupant qu'un nombre fini des U_n ; donc le voisinage $V = \overset{-1}{p}(U)$ de t dans T ne coupe qu'un nombre fini des V_n.

Démontrons c) : soit (U_n) une suite localement finie dans $\overline{P}$ d'ouverts non vides de $\overline{P}$. La suite $U'_n = U_n \cap P$ est localement finie dans P et formée d'ouverts non vides de P. Il existe donc une suite (V_n) localement finie dans T d'ouverts de T telle que $\emptyset \neq V_n \cap P \subset \overline{U_n \cap P}$; en particulier $V_n \cap P \subset \overline{U_n}$. Il suffit donc pour terminer de vérifier que $V_n \cap \overline{P} \subset \overline{U_n}$; or cela résulte de l'inclusion $V_n \cap \overline{P} \subset \overline{V_n \cap P}$, valable puisque V_n est ouvert dans T, qui implique $V_n \cap \overline{P} \subset \overline{V_n \cap P} \subset \overline{U_n}$.

La liaison avec la notion de parties bornées se fait dans le cas des espaces complètement réguliers avec le théorème suivant :

(5.2.3) <u>*Théorème*</u> *: Soit T un espace complètement régulier.*

a) Toute partie pseudocompacte P de T est pseudofermée.

b) Réciproquement toute partie P bornée et pseudofermée de T est pseudo-compacte.

<u>Preuve</u> : L'assertion a) est évidente car toute suite localement finie d'ouverts de P est nécessairement finie. Pour démontrer l'assertion b), qui constitue la généralisation cherchée du théorème de Hager-Johnson, suivons le raisonnement de Comfort (C2 ; th. 4.1) en supposant P pseudofermée et non pseudocompacte. Il existe alors une fonction positive continue f sur P, non bornée sur P, donc une suite $x_n \in P$ telle que $f(x_{n+1}) \geqslant f(x_n) + 1$, ce qui implique déjà $f(x_n) \geq n$. Posons :

$$U_n = \{t \; ; \; t \in P \; , \; |f(t) - f(x_n)| < \tfrac{1}{3}\}$$

Alors U_n est un ouvert non vide de P et $\overline{U_n}\cap\overline{U_m}\cap P$ est vide si $n \neq m$. De plus la suite (U_n) est localement finie dans P car $f(t) \geqslant n-\frac{1}{3}$ pour $t \in U_n$ de sorte que, pour tout $x \in P$, le voisinage $V = \{t \;;\; |f(t)-f(x)|<1\}$ de x ne peut couper qu'un nombre fini des U_n. Or P étant pseudofermée il existe une suite (V_n) localement finie dans T d'ouverts de T tels que $\emptyset \neq V_n \cap P \subset \overline{U_n}$. Il en résulte que l'application $n \longrightarrow V_n$ est injective car $V_n = V_m \Rightarrow \overline{U_n} \cap \overline{U_m} \cap P \neq \emptyset \Longrightarrow n = m$. Choisissons maintenant un point $y_n \in V_n \cap P$ et, T étant complètement régulier, une fonction $g_n \in C(T)$, positive et telle que $g_n(y_n) = 1$ et $g_n = 0$ en dehors de V_n. La fonction $g = \Sigma n g_n$ est positive et continue sur T, car la suite (V_n) est localement finie et l'application $n \longrightarrow V_n$ est injective. Or $g(y_n) \geqslant n$ ce qui démontre que g n'est pas bornée sur P, donc que P n'est pas une partie bornée de T.

(5.2.4) *Corollaire 1 (Hager-Johnson).*

Dans un espace complètement régulier T l'adhérence $\overline{\omega}$ de tout ouvert borné ω est pseudocompacte.

Preuve : Car $\overline{\omega}$ est borné et est pseudofermé d'après (5.2.2.a).

(5.2.5) *Corollaire 2 : Dans un espace complètement régulier il y a identité entre parties pseudocompactes et parties bornées et pseudofermées.*

(5.2.6) *Corollaire 3 : Dans un espace pseudocompact T (donc complètement régulier d'après la remarque 3 de (4.6)) toute partie pseudofermée est pseudo-compacte.*

Remarque : On retrouve en particulier le fait bien connu que dans un espace pseudo-compact tout fermé régulier est pseudocompact. Par ailleurs la confrontation des énoncés (5.2.6) et (5.2.3.a) explique le choix de la terminologie : relativement aux espaces pseudocompacts les parties pseudofermées ont les mêmes propriétés que les parties fermées relativement aux espaces compacts.

Les espaces localement bornés.

(5.2.7) Proposition : *Soit x_0 un point d'un espace complètement régulier T. assertions suivantes sont équivalentes :*

a) x_0 possède un voisinage pseudocompact,

b) x_0 possède une base de voisinages pseudocompacts,

c) x_0 possède un voisinage borné,

d) x_0 possède une base de voisinage bornés.

Preuve : L'équivalence $a \Longleftrightarrow b$ est bien connue mais nous la retrouvons dans le courant de la démonstration. En effet, $b \Longrightarrow a \Longrightarrow c \Longleftrightarrow d$ de façon évidente. Montrons $d \Longrightarrow b$: x_0 possède une base de voisinages fermés, donc aussi une base de voisinages fermés et bornés. Pour tout tel voisinage V l'ensemble $W = \overline{\mathring{V}}$ est un voisinage de x_0 qui est borné et fermé régulier donc pseudocompact.

Ceci amène immédiatement à :

(5.2.8) Définition : *Un espace complètement régulier dont tout point x_0 vérifie les conditions équivalentes de (5.2.7) est dit localement borné, ou encore localement pseudocompact selon la terminologie suggérée par Comfort (C2).*

Tout espace localement compact est évidemment localement borné ; nous verrons plus loin (en 5.4) une réciproque dans un cas particulier.

5.3 L'algèbre $C_\beta(T)$ et le "bidual" T".

Sur l'algèbre C(T) des fonctions continues sur un espace topologique T, on peut placer diverses topologies. La plus usitée est sans doute la topologie de la convergence compacte sur T donnant l'algèbre localement convexe habituellement désignée par $C_c(T)$. On peut trouver dans l'article de Warner (W3) une étude assez complète des propriétés comparées de T et de $C_c(T)$, étude qui prolonge de beaux résultats simultanés de Nachbin (N1) et Shirota (S3).

Mais puisque nous disposons de la notion de parties bornées d'un espace topologique, nous pouvons aussi nous préoccuper de la topologie sur $C(T)$ de la convergence uniforme sur ces parties bornées de T ; désignons par $C_\beta(T)$ l'algèbre localement convexe obtenue (la terminologie est proposée par analogie avec la notation E'_β pour le dual fort d'un elc E).

Nous n'entreprendrons pas ici d'étudier sérieusement cette algèbre $C_\beta(T)$. On trouvera en effet dans ce numéro une première étude des propriétés comparées de T et de $C_\beta(T)$, étude menée par Jourlin - Mle Blanchard (J1) dans le même esprit que l'article de Warner cité plus haut. Donnons cependant un minimum. Il est clair que $C_\beta(T)$ est une $*$-algèbre localement convexe (commutative, unitaire, séparée) possèdant un système fondamental de semi-normes $f \longrightarrow ||f||_P = \operatorname{Sup}_{x \in P} |f(x)|$ associées aux bornés P de T et vérifiant les conditions du théorème (1.4.4). Par exemple si T est pseudocompact, on reconnait dans $C_\beta(T)$ l'algèbre de Banach $C^\infty(T)$ (pour une réciproque voir J1). Dans le cas général il existe évidemment une injection continue canonique $C^\infty(T) \longrightarrow C_\beta(T)$. Alors :

(5.3.1) <u>*Proposition*</u> : *$C^\infty(T)$ est dense dans $C_\beta(T)$.*

<u>Preuve</u> : Soit $f \in C_\beta(T)$ une fonction supposée réelle. Désignons par f_n la fonction f tronquée à $\pm n$. Pour tout borné P de T il est bien clair que $n \geqslant ||f||_P$ implique $||f-f_n||_P = 0$, ce qui démontre la proposition.

<u>Le "bidual" T"</u>. On peut maintenant associer à $C_\beta(T)$ l'espace de ses caractères continus $GC_\beta(T)$, espace que nous noterons T". Conformément à nos conventions précédentes, établies en 1.3, T" est un espace compactologique régulier dont les "compacts" sont les parties équicontinues et faiblement fermées (dans $C_\beta(T)'$) de T". La transformation de Dirac envoie évidemment T dans T" ; c'est un morphisme compactologique de γT dans T" et ce n'est une injection que si T est fonctionnellement séparé. Dans ce cas :

(5.3.2) <u>*Proposition*</u> : *Si T est fonctionnellement séparé on a les injections*

$T \subset T'' \subset \upsilon T$.

Mais on peut dire beaucoup plus.

(5.3.3) <u>*Proposition*</u> : *Soit T un espace fonctionnellement séparé et soit P une partie quelconque de T.*

a) L'adhérence $\bar{P}^{\upsilon}$ de P dans υT est exactement l'ensemble des caractères u de $C(T)$ tels que $u(f) = 0$ pour toute fonction continue f s'annulant sur P.

b) Pour que $u \in \bar{P}^{\upsilon}$ il faut et il suffit que $|u(f)| \leq ||f||_P$ pour toute $f \in C(T)$.

<u>Preuve</u> : Démontrons a) en posant $Q = \{u \; ; \; u \in \upsilon T \; , \; ||f||_P = 0 \Rightarrow u(f) = 0\}$. Alors Q est fermé dans υT et P est contenu dans Q, d'où $\bar{P}^{\upsilon} \subset Q$. Si il existait $u \in Q$ tel que $u \notin \bar{P}^{\upsilon}$, alors, par la complète régularité de υT, il existerait $f^{\upsilon} \in C(\upsilon T)$ telle que $f^{\upsilon} = 0$ sur P et $f^{\upsilon}(u) = 1$. Or f^{υ} est le prolongement continu canonique de sa restriction f à T et $f^{\upsilon}(u) = u(f) = 1$ ce qui est absurde puisque $f = 0$ sur P. La condition suffisante de b) est vérifiée grâce à a) ; la condition nécessaire provient de l'appartenance $u(f) \in \overline{f(P)}$ chaque fois que $u \in \bar{P}^{\upsilon}$.

On tire de là :

(5.3.4) <u>*Théorème*</u> :

a) T'' est, dans υT, la réunion des ensembles $\bar{P}^{\upsilon}$ lorsque P décrit la famille des parties bornées de T.

b) Les ensembles $\bar{P}^{\upsilon}$ forment, lorsque P est borné quelconque dans T, un système fondamental de "compacts" de l'espace compactologique T''.

Preuve : Il suffit de prouver b). Or, déjà chaque $\bar{P}^{\upsilon}$ est compact dans υT (car P, étant borné, est relativement compact dans υT), et (5.3.3) exprime bien qu'il est équicontinu dans T". Réciproquement un "compact" K de T" est formé des caractères u tels que $|u(f)| \leq ||f||_P$ pour une partie bornée convenable P de T et toute $f \in C(T)$ donc est contenu dans $\bar{F}^{\upsilon}$.

(5.3.5) *Proposition : Le complété $C_\beta(T)^\wedge$ de l'algèbre $C_\beta(T)$ s'identifie à l'algèbre $C(T'')$.*

Preuve : Compte tenu de ce qui a été dit sur l'algèbre $C_\beta(T)$, ceci n'est qu'un cas particulier du théorème (1.4.4).

Remarque : On trouvera dans l'article déjà cité (J1) une interprétation de $C_\beta(T)^\wedge$ qui tient compte explicitement de la caractérisation de T" donnée par (5.3.4).

5.4 Espaces topologiques spéciaux.

Conformément à ce qui a été rapidement décrit dans l'introduction on obtient des classes particulières d'espaces topologiques en reliant à la notion de parties bornées les notions bien connues de compacité et de complétion universelle.

Espaces quasi-complets. Un espace complètement régulier T est dit quasi-(universellement)-complet (on pourrait aussi proposer : quasi-c-replet) lorsque toute partie P bornée et fermée de T est complète pour la structure uniforme universelle de T. Par exemple, et ceci rejoint la remarque qui suit (5.2.8), tout espace localement borné et quasi-complet est localement compact, car chaque point d'un tel espace possède un voisinage qui est pseudocompact et universellement complet donc compact. La liaison avec le complété universel ΘT et le "bidual" T" est extrêmement directe.

(5.4.1) *Théorème : Pour qu'un espace complètement régulier T soit quasi-complet il faut et il suffit que $T = \Theta T \cap T''$.*

Preuve : Si T est quasi-complet alors $\theta T \cap T''$ n'est autre que la réunion des parties $\bar{P}^{\upsilon} \cap \theta T$ lorsque P décrit l'ensemble des parties bornées et fermées de T. Or, pour une telle partie P, on reconnaît en $\bar{P}^{\upsilon} \cap \theta T$ l'adhérence $\bar{P}^{\theta}$ de P dans θT, qui est donc égale à P puisque P est complet dans θT ; ainsi $T = \theta T \cap T''$. Réciproquement si T est complètement régulier et si $T = \theta T \cap T''$ alors l'adhérence $\bar{P}^{\theta} = \bar{P}^{\upsilon} \cap \theta T$ de toute partie bornée P dans θT est contenue et fermée dans T; donc égale à l'adhérence $\bar{P}$ de P dans T, ce qui suffit pour prouver que $\bar{P}$ est complète dans θT.

Remarque : On pourra comparer ce résultat à la proposition (2.1.5) de A. Robert (R1) selon lequel un elc E séparé n'est quasi-complet que si $E = \hat{E} \cap E''$.

Espaces de type (μ). Un espace fonctionnellement séparé T est dit de type (μ) lorsque toute partie bornée de T est relativement compacte.

(5.4.2) *Proposition : Tout espace replet est de type (μ).*

Preuve : En effet une partie bornée de T est, de toute façon, relativement compacte dans υT, donc dans T si T est replet.

Les espaces de type (μ) se caractérisent par l'analogue du théorème de Mackey-Arens en théorie des elc.

(5.4.3) *Théorème : Pour que l'espace complètement régulier T soit de type (μ) il faut et il suffit que $T = T''$.*

Preuve : Si T est de type (μ) alors $C_{\beta}(T) = C_c(T)$ donc $T'' = \mathcal{G}C_c(T)$ et l'on sait bien que $\mathcal{G}C_c(T)$ est algèbriquement égal à T et compactologiquement égal à γT. Réciproquement si l'on a l'égalité algèbrique $T = T''$, alors toute partie bornée P de T est contenue dans la partie $\bar{P}^{\upsilon}$ qui est, d'une part compacte dans υT, d'autre part contenue dans T, donc en résumé compacte dans T puisque T est complètement régulier.

<u>Espaces hyponormaux</u> : Désignons une fois pour toutes par $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}(T)$ la famille des parties <u>bornées et fermées</u> d'un espace topologique T ; c'est évidemment un système fondamental de parties bornées. En revenant aux notations de 2-1 on voit immédiatement que $\mathcal{B}$ est une famille <u>stable</u> de fermés, intermédiaire entre la famille $\mathcal{K}$ des compacts de T et la famille $\mathcal{F}$ de tous les fermés de T. Alors :

(5.4.4) *<u>Définition</u> : Un espace topologique T est dit <u>hyponormal</u> lorsqu'il est $\mathcal{B}$-$\mathcal{F}$-normal c'est-à-dire lorsque deux fermés disjoints de T, dont l'un est supposé borné, sont normalement séparés.*

Tout espace normal est évidemment hyponormal et tout espace hyponormal est complètement régulier, d'après (2.1.5).

En écrivant (2.1.7) dans ce cas particulier on obtient le résultat, essentiel pour ce qui va suivre :

(5.4.5) *<u>Théorème</u> : Soit T un espace hyponormal. Toute fonction définie et continue sur une partie P bornée et fermée de T se prolonge en une fonction continue sur T tout entier.*

On en tire :

(5.4.6) *<u>Théorème</u> : Pour qu'un espace complètement régulier soit de type (μ) il faut et il suffit qu'il soit hyponormal et quasi-complet.*

<u>Preuve</u> : Si T est de type (μ) alors $\mathcal{B} = \mathcal{K}$ et dire que T est complètement régulier c'est exactement, avec (2.1.5), dire que T est hyponormal ; par ailleurs T est évidemment quasi-complet. Réciproquement si T est hyponormal alors, d'après (5.4.5), toute partie bornée et fermée P de T est un sous-espace pseudocompact de T ; mais P est aussi complet pour une structure uniforme compatible avec sa topologie (puisque T est quasi-complet) donc

est compact comme on sait. On a donc en passant démontré le :

(5.4.7) <u>Lemme</u> : *Dans un espace hyponormal T toute partie fermée et bornée est pseudocompacte.*

(5.4.8) <u>Corollaire</u> : *Tout espace paracompact est de type (μ).*

<u>Preuve</u> : Car un tel espace est normal et c-replet.

Pour en terminer, on voit maintenant que les espaces topologiques complètement réguliers de type (μ), pour lesquels on connaît exceptionnellement bien les parties bornées, jouent un rôle non négligeable en topologie générale. On peut rassembler les différents énoncés que nous avons obtenus les caractérisant, et y adjoindre l'énoncé du théorème de Nachbin-Shirota (N1 et S3) selon lequel, et avec nos notations, T est de type (μ) si et seulement si l'elc $C_c(T)$ est tonnelé. Ainsi :

(5.4.9) <u>Théorème</u> : *Relativement à un espace complètement régulier T les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) T est de type (μ),

b) $T = T''$,

c) T est hyponormal et quasi-complet,

d) $C_c(T)$ est un elc tonnelé.

BIBLIOGRAPHIE

(A1) R. ARENS : A topology for spaces of transformations.
Ann. of Math. 47-1946 - p. 480-495.

(B1) N. BOURBAKI : Topologie générale. Chap. 9 - 2ème ed. 1958

(B2) N. BOURBAKI : Topologie générale. Chap. 10 - 2ème ed. 1961

(B3) N. BOURBAKI : Intégration - Chap. 6 . 1959.

(B4) R.M. BROOKS : On locally m-convex *-algebras.
Pacific J. Math. 23-1 - 1965, p. 5-23.

(B5) H. BUCHWALTER : Espaces vectoriels bornologiques.
Publ. Dép. Math. Lyon 2-1 - 1965 - p. 2-53.

(B6) H. BUCHWALTER : Espaces de Banach et dualité.
Publ. Dép. Math. Lyon 3-2 1966 - p. 2-61.

(B7) H. BUCHWALTER : Topologies, bornologies et compactologies.
Thèse Doct. Sc. Math. Fac. Sc. Lyon 1968 p. 1-144.

(B8) H. BUCHWALTER, R. PUPIER : Caractérisation topologique de la complétion universelle d'un espace topologique complètement régulier.
A paraître aux Comptes-rendus.

(C1) G. CHOQUET : Cardinaux 2-mesurables et cônes faiblement complets.
Ann. Inst. Fourier Grenoble 17-1 - 1967 p. 383-393.

(C2) W.W. COMFORT : On the Hewitt real-compactification of a product space.
Trans. Amer. Math. Soc. 131-1 - 1968 - p. 107-118.

(C3) W.W. COMFORT, S. NEGREPONTIS : The ring C(X) determines the category of X.
Proc. Amer. Math. Soc. 16- 1965. p. 1041-1045.

(F1) Z. FROLIK : The topological product of two pseudocompact spaces.
Čzech. Math. J. 10-85 - 1960 - p. 339-349.

(G1) L. GILLMAN, M. JERISON : Ring of contenuous functions.
Van Nostrand - Princeton - 1960.

(G2) A. GROTHENDIECK : Espaces vectoriels topologiques.
Publ. Soc. Mat. Sao-Paulo - 1964.

(H1) A.W. HAGER : On the tensor product of functions ring.
Doct. dissertation - Pennsylvania State Univ. 1965.

(H2) E. HEWITT : Rings of real-valued continuous functions I.
Trans Amer. Math. Soc. 64 - 1948 p. 45-99.

(H3) E. HEWITT : Linear functionals on spaces of continuous functions. Fund. Math. 37- 1950 - p. 161-189.

(J1) M. JOURLIN N. BLANCHARD. : La topologie de la convergence bornée sur les algèbres de fonctions continues. Publ. Dép. Math. Lyon 6-2 1969 p. 85-96.

(K1) J.L. KELLEY : General topology.Van Nostrand - Princeton - 1965.

(K2) J.L. KELLEY I. NAMIOKA-and co : Linear topological spaces. Van Nostrand - 1963.

(M1) E. MICHAEL : Locally multiplicatively - convex topological algebras. Mem. Amer. Math. Soc. - 11 - 1952.

(N1) L. NACHBIN : Topological vector spaces of continuous functions. Proc. Nat. Ac. Sc. USA - 40 - 1954 - p. 471-474.

(N2) N. NOBLE : Doct. dissertation. Univ. of Rochester - N.Y. 1967.

(P1) V. PTAK : On complete topological linear spaces. Čzech. Math. J. - 78 - 1953 - p. 301-364.

(P2 R. PUPIER A. ROUX : Séminaire de topologie générale. Dep. Math. Lyon - 1967-1968.

(P3) R. PUPIER : Quelques propriétés de la complétion universelle d'un espace complètement régulier. Publ. Dép. Math. Lyon 1969 t 6-2 p. 75-84.

(R1) A. ROBERT : Quelques questions d'espaces vectoriels topologiques. Comment. Math. Helvet. 42-4 - 1967 - p. 314-342.

(S1) L. SCHWARTZ : Théorie des distributions vectorielles. Ann. Inst. Fourier Grenoble. 7 - 1959 - p. 1-141.

(S2) D. SCOTT : Mesurable cardinals and constructible sets. Bull. Acad. Pol 9 - 1961 - p. 521-524.

(S3) J. SHIROTA : On locally convex vector spaces of continuous functions. Proc. Jap. Ac. 30 - 1954 - p. 294-298.

(S4) A.H. STONE : Paracompactness and product spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 54 - 1948 p. 977-982.

(W1) L. WAELBROECK : Compacité et dualité en analyse linéaire. Publ. Dép. Math. Lyon 2-1 1965 p. 72-92.

(W2) L. WAELBROECK : Some theorems about bounded structures. J. Funct. Anal. 1-4 - 1967 - P. 392-408.

(W3) S. WARNER : The topology of compact convergence on continuous functions spaces.
Duke Math. J. 25 - 1958 - p. 265-282.

(W4) C. WENJEN : Real-compact spaces.
Port. Math. 25-3 1966. p. 135-139.

Manuscrit remis en juin 1969.

H. BUCHWALTER
Maître de Conférences
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
43, bd du 11 novembre 1918.
VILLEURBANNE