

ALAIN HUDRY

**Quelques remarques sur la notion d'extension rationnelle maximale
d'un module et sur les anneaux maximaux de fractions au sens d'Utimi**

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1969, tome 6, fascicule 2
, p. 139-151

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1969__6_2_139_0

© Université de Lyon, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES REMARQUES SUR LA NOTION D'EXTENSION RATIONNELLE MAXIMALE
D'UN MODULE ET SUR LES ANNEAUX MAXIMAUX DE FRACTIONS AU SENS D'UTIMI

Alain HUDRY

INTRODUCTION.

On considère dans tout ce qui suit un anneau A unitaire mais non nécessairement commutatif. On désigne par Mod_A la catégorie des A -modules à droite (toutes les notions latérales sont considérées à droite). La terminologie adoptée concernant la notion d'extension rationnelle est celle de C. Faith (1). On montre que toute extension rationnelle maximale \bar{M} d'un A -module M est une enveloppe $\mathcal{L}(M)$ -injective de M (6), $\mathcal{L}(M)$ étant un ensemble topologisant et idempotent d'idéaux à droite de A (2), dépendant de M (c'est-à-dire \bar{M} est le localisé de Gabriel de M pour $\mathcal{L}(M)$). Cela nous permet d'aborder le problème de la fonctorisation de l'extension rationnelle maximale et en particulier on retrouve un résultat obtenu par C. Leclerc dans sa thèse concernant le problème de la fonctorisation de l'enveloppe injective. On donne une condition nécessaire et suffisante pour que l'anneau classique (total) des fractions à droite de A (lorsqu'il existe) coïncide avec l'anneau maximal des fractions à droite de A au sens d'Utumi.

§1. QUELQUES REMARQUES SUR LA NOTION D'EXTENSION RATIONNELLE MAXIMALE D'UN MODULE

X étant un sous-module quelconque d'un A -module à droite Y , on sait que pour tout A -module à droite Z les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(1) \text{Hom}_A(Y/X, \hat{Z}) = 0$$

$$(2) \text{ Pour tout } f \in \text{Hom}_A(X', Z) \text{ avec } X \subset X' \subset Y, f(X) = 0 \text{ implique } f = 0$$

$$(3) \text{ Pour tout } y \in Y \text{ et tout } z \in Z \text{ avec } z \neq 0, \text{ il existe } a \in A \text{ tel que } ya \in X \text{ et } za \neq 0.$$

Lemme 1 : Pour tout A -module à droite M , l'ensemble $\mathcal{L}(M)$ des idéaux à droite I de A tels que $\text{Hom}_A\left(\frac{A}{I}, \hat{M}\right) = 0$ est topologisant et idempotent.

Lemme 2 : X étant un sous-module d'un A -module à droite Y , on a pour tout A -module à droite Z les deux propriétés suivantes équivalentes :

$$(i) \text{Hom}_A\left(\frac{Y}{X}, \hat{Z}\right) = 0$$

$$(ii) (\forall y \in Y) (X \cdot y \in \mathcal{L}(Z))$$

(i) \implies (ii) est triviale

(ii) \implies (i) Soit X' un sous-module quelconque de Y tel que $X \subset X' \subset Y$ et soit f un homomorphisme de X' dans Z tel que $f(X) = 0$. Pour tout $y \in X'$ on a par hypothèse $X \cdot y \in \mathcal{L}(Z)$. On considère alors le A -homomorphisme à droite ϕ de A dans Z défini pour tout $a \in A$ par : $\phi(a) = f(ya)$. On a : $\phi(X \cdot y) = 0$; il en résulte alors $\phi = 0$ et par suite on obtient $\phi(1) = f(y) = 0$. f est donc nulle, d'où le résultat.

Proposition 1 : Pour tout A -module à droite M , si \hat{M} désigne une enveloppe injective donnée de M , il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

(i) \bar{M} est l'unique extension rationnelle maximale de M incluse dans \hat{M}

(ii) $\bar{M} = \{x \in \hat{M}/M, x \in \mathcal{L}(M)\}$

(iii) \bar{M} est l'unique enveloppe $\mathcal{L}(M)$ -injective de M incluse dans \hat{M} .

Il en résulte en particulier que \bar{M} est le localisé (au sens de Gabriel) du A -module M pour l'ensemble topologisant et idempotent $\mathcal{L}(M)$ dès que \bar{M} satisfait à l'une des propriétés précédentes (c.a.d $\bar{M} = M_{\mathcal{L}(M)}$).

. Pour montrer l'équivalence de (ii) et de (iii), considérons un ensemble topologisant et idempotent Φ quelconque d'idéaux à droite de A et montrons que si \hat{M} est une enveloppe injective donnée de M alors $N = \{x \in \hat{M} / M \cdot x \in \Phi\}$ est la seule enveloppe Φ -injective de M incluse dans \hat{M} . Comme on a : $M \subset N \subset \hat{M}$ il vient $M \Delta N$ et par suite $M \Delta_{\Phi} N$; il en résulte que N est la Φ -clôture de M dans \hat{M} (4) et par suite N est une extension Φ -essentielle maximale de M dans l'injectif \hat{M} . Par suite (5) N est Φ -injectif, c'est donc ici une enveloppe Φ -injective de M . Soit $E_{\Phi}(M)$ une enveloppe Φ -injective quelconque de M incluse dans \hat{M} ; on a alors $M \Delta_{\Phi} E_{\Phi}(M)$, donc pour tout $x \in E_{\Phi}(M)$ on a $M \cdot x \Delta_{\Phi} A$ et par suite $E_{\Phi}(M)$ est inclu dans N . $M \Delta_{\Phi} N$ implique alors $E_{\Phi}(M) \Delta_{\Phi} N$ donc aussi $E_{\Phi}(M) = N$.

. Pour montrer l'équivalence de (i) et de (ii) notons, \bar{M} l'unique extension rationnelle maximale de M incluse dans \hat{M} ($\bar{M} = \bigcap_{f \in \text{End}_A(M)} \text{Ker } f$) et $E_{\mathcal{L}(M)}(M)$ l'unique enveloppe $\mathcal{L}(M)$ -injective de M incluse dans \hat{M} . et $f(M) = 0$.

Il nous suffit alors de voir que $\bar{M} = E_{\mathcal{L}(M)}(M)$. Soit $x \in E_{\mathcal{L}(M)}(M)$. On a $M \cdot x \in \mathcal{L}(M)$. Soit $f \in \text{End}_A(\hat{M})$ avec $f(M) = 0$. Considérons le A -homomorphisme ϕ de A dans \hat{M} défini pour tout $a \in A$ par : $\phi(a) = f(xa)$. On a $\phi(M \cdot x) = 0$. Puisque $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(\hat{M})$ il vient : $\phi = 0$ et par suite $\phi(1) = f(x) = 0$. Il en résulte $x \in \text{Ker } f$ et finalement $x \in \bar{M}$. On a donc montré que $E_{\mathcal{L}(M)}(M) \subset \bar{M}$. Soit maintenant $x \in \bar{M}$. Puisque \bar{M} est une extension rationnelle de M il vient $\text{Hom}_A(\frac{\bar{M}}{M}, \hat{M}) = 0$. Donc d'après le lemme 2 il vient : $M \cdot x \in \mathcal{L}(M)$. Puisqu'on a $M \Delta \bar{M}$ il vient $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(\bar{M})$ et $M \Delta_{\mathcal{L}(M)} \bar{M}$. La convexité de la $\mathcal{L}(M)$ -essentialité permet alors de voir que $E_{\mathcal{L}(M)}(M) \subset \bar{M}$ et $M \Delta_{\mathcal{L}(M)} \bar{M}$ implique $E_{\mathcal{L}(M)}(M) \Delta_{\mathcal{L}(M)} \bar{M}$ et par suite $E_{\mathcal{L}(M)}(M) = \bar{M}$.

. En remarquant que $\{x \in M \mid 0 \cdot x \in \mathcal{L}(M)\} = 0$ et que pour tout ensemble topologisant et idempotent Φ d'idéaux à droite de A tel que $\Phi M = 0$ (avec $\Phi M = \{x \in M \mid \Omega \cdot x \in \Phi\}$) on a $M_{\Phi} = \lim_{\rightarrow} \text{Hom}_A(I, M) = E_{\Phi}(M)$, la dernière partie de la proposition 1 est démontrée.

Remarque : La proposition précédente nous permet de retrouver en particulier que \bar{A} l'anneau maximal des fractions au sens d'Utumi de A est le localisé de Gabriel de A pour l'ensemble topologisant et idempotent \mathcal{R} des idéaux à droite de A rationnels dans A .

Proposition 2. Pour tout A -module à droite M les propriétés suivantes sont

équivalentes :

- (1) M est $\mathcal{L}(M)$ -quasi-injectif ;
- (2) M est stable par l'ensemble des endomorphismes d'une extension rationnelle maximale \bar{M} de M ;
- (3) Pour tout sous-module X de M rationnel dans M on a la suite exacte :

$$\text{Hom}_A(M, M) \longrightarrow \text{Hom}_A(X, M) \longrightarrow 0.$$

(1) \iff (2) résulte immédiatement de la proposition 1.

(3) \iff (1) est clair si on remarque que "X rationnel dans M" équivaut à

"X est $\mathcal{L}(M)$ -essentiel dans M". (on peut pour cela utiliser le lemme 2).

Proposition 3 : Pour tout A -module à droite M les propriétés suivantes sont

équivalentes :

- (1) M est $\mathcal{L}(M)$ -quasi-injectif (5) et le treillis des sous-modules $\mathcal{L}(M)$ -clos dans M est complété ;
- (2) M est quasi injectif et tout sous-module X de M essentiel dans M et aussi rationnel dans M ;
- (3) Tout $\mathcal{L}(M)$ -clos dans M (4) est facteur direct de M et M est $\mathcal{L}(M)$ -quasi-injectif.

Si X est un sous-module de M , $\mathcal{L}(M)_M(X)$ désigne la $\mathcal{L}(M)$ -clôture de X dans

M (4).

Montrons (1) \Rightarrow (3) : soit X un sous module $\mathcal{L}(M)$ -clos dans M . Puisque le treillis des sous-modules $\mathcal{L}(M)$ -clos dans M est complémenté il existe un sous-module X' de M tel que : $X \oplus X' \overset{\mathcal{L}(M)}{\Delta} M$. Soit j l'injection canonique $0 \longrightarrow X \longrightarrow M$. Si p désigne le projecteur de $X \oplus X'$ sur X , $j \circ p$ prolonge j . La $\mathcal{L}(M)$ -quasi-injectivité de M implique l'existence d'un endomorphisme e de M prolongeant $j \circ p$. On a :

$$e(M) = e(\mathcal{L}(M)_M(X \oplus X')) \overset{\mathcal{L}(M)}{C} \mathcal{L}(M)_M(e(X \oplus X')) = \mathcal{L}(M)_M(X) = X$$

(en effet pour tout sous-module Y de M on a $e(\mathcal{L}(M)_M(Y)) \overset{\mathcal{L}(M)}{C} \mathcal{L}(M)_M(e(Y))$ car si $y \in \mathcal{L}(M)_M(Y)$ on a $Y \overset{\mathcal{L}(M)}{\Delta} A$ et puisque $Y \overset{\mathcal{L}(M)}{\Delta} e(Y) \overset{\mathcal{L}(M)}{\Delta} e(y)$ il vient $e(y) \in \mathcal{L}(M)_M(e(Y))$). Pour tout $m \in M$ on a $e^2(m) = e(e(m)) = e(m)$. Il en résulte que $e^2 = e$ et par suite puisque $X = e(M)$, X est facteur direct de M .

. Montrons (3) \Rightarrow (2) : puisque $\mathcal{L}(M)M = \{x \in M \mid 0 \overset{\mathcal{L}(M)}{\Delta} x \in \mathcal{L}(M)\} = 0$, la $\mathcal{L}(M)$ quasi-injectivité de M et le fait que tout $\mathcal{L}(M)$ -clos dans M est facteur direct impliquent que M est quasi-injectif (d'après (4)). Soit alors X un sous-module essentiel dans M ; sa $\mathcal{L}(M)$ -clôture dans M est un facteur direct de M ; il en résulte que M est la $\mathcal{L}(M)$ -clôture de X dans M et par suite on a : $X \overset{\mathcal{L}(M)}{\Delta} M$ ce qui signifie que X est rationnel dans M .

. Montrons que (2) \Rightarrow (1). M est évidemment $\mathcal{L}(M)$ -quasi-injectif. D'autre part si X est un sous-module de M essentiel, X est rationnel dans M par hypothèse. On a donc $X \overset{\mathcal{L}(M)}{\Delta} M$. De ceci il résulte que le treillis des sous-modules $\mathcal{L}(M)$ -clos dans M est complémenté.

Corollaire : Si M est un A -module à droite $\mathcal{L}(M)$ -complémenté alors toute extension rationnelle maximale \bar{M} de M est quasi-injective.

En effet \bar{M} est aussi $\mathcal{L}(M)$ -complémenté (et on a $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(\bar{M})$) ; il suffit alors d'appliquer la proposition 1 et la proposition 3.

Remarque : Lorsque $M^\Delta = \{x \in M \mid 0 \cdot x \Delta A\} = 0$ on a M rationnel dans \hat{M} (\hat{M} désignant une enveloppe injective de M) et par suite \hat{M} est une extension rationnelle maximale de M ; il en résulte que lorsque $M^\Delta = 0$, pour que M soit injectif il faut et il suffit que M soit $\mathcal{L}(M)$ -injectif.

FONCTORISATION DE L'EXTENSION RATIONNELLE MAXIMALE

On rappelle (5) que deux ensembles topologisants et idempotents ϕ et ϕ' d'idéaux à droite de A sont dits équivalents (et on note $\phi \equiv \phi'$) si la ϕ -essentialité coïncide avec la ϕ' -essentialité ; pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que l'ensemble des idéaux essentiels de ϕ coïncide avec l'ensemble des idéaux essentiels de ϕ' . On note (ϕ) la classe de ϕ pour cette équivalence. On définit alors une relation d'équivalence dans Mod_A en posant $M \equiv M'$ si et seulement si $\mathcal{L}(M) \equiv \mathcal{L}(M')$; on désigne alors par (M) la classe du A -module M pour cette relation d'équivalence. On pose alors la définition suivante : on dit qu'une sous catégorie L de Mod_A est rationnelle si c'est une sous catégorie pleine de Mod_A dont les objets sont tous ceux d'une même classe de l'équivalence définie précédemment dans Mod_A . Cette terminologie sera justifiée dans ce qui suit. On peut alors faire les remarques suivantes :

1. Les sous catégories rationnelles de Mod_A forment un ensemble ; en effet il y a bijection entre les sous catégories rationnelles de Mod_A et les classes de l'équivalence définie précédemment entre les ensembles topologisants et idempotents d'idéaux à droite de A . (Si L est une sous catégorie rationnelle de Mod_A la classe $\text{ob}(L)$ de ses objets est telle que $\text{ob}(L) = [M]$; $[\mathcal{L}(M)] = L$ ne dépend pas du choix de M dans $\text{ob}(L)$; à L on fait alors correspondre $L = [\mathcal{L}(M)]$. Réciproquement si $L = [\phi]$ est une classe de l'équivalence définie entre ensembles topologisants et idempotents de A on peut considérer la sous catégorie localisante C_ϕ associée à un élément ϕ de L . C_ϕ permet alors de définir une théorie de la torsion dans Mod_A "avec sous objets" [7] ;

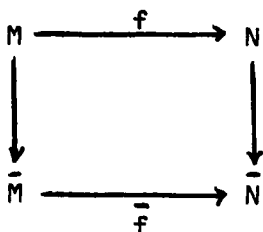
on peut alors trouver d'après Jans un A-module injectif M tel que $C_\phi = C_\phi = \{X \in \text{Mod}_A \mid \text{Hom}_A(X, M) = 0\}$. Comme on a : $I \in \phi \iff \frac{A}{I} \in C_\phi \iff \text{Hom}_A\left(\frac{A}{I}, M\right) = 0 \iff I \in \mathcal{L}(M)$, il en résulte que $\phi = \mathcal{L}(M)$ et par suite on peut considérer $[M]$; à L on fait alors correspondre la sous catégorie pleine L de Mod_A telle que $\text{Ob}(L) = [M]$).

2. Les sous catégories rationnelles de Mod_A sont stables pour les extensions essentielles, les sommes et produits directs.

3. On peut remarquer que la sous catégorie pleine de Mod_A dont les objets sont les A-modules M tels que $M^\Delta = \{x \in M \mid 0 \cdot x \lambda \lambda = 0\} = 0$ est une sous catégorie rationnelle de Mod_A . On note E l'ensemble topologisant (en général non idempotent) des idéaux à droite essentiels dans A. En utilisant le théorème 1 de [4] il en résulte que E^2 est le plus petit ensemble topologisant et idempotent de A contenant E. En utilisant les notations de [2] on a $M^\Delta = EM$ pour tout A-module M. Considérons la classe des modules M tels que $\mathcal{L}(M) \equiv E^2$

. Soit L_0 la sous catégorie rationnelle de Mod_A associée. Si M est un objet de L_0 on a : $\mathcal{L}(M) \cap E = E^2 \cap E = E$; Il en résulte que l'on a : $E \subset \mathcal{L}(M)$ et par suite on a : $M^\Delta = EM \subset \mathcal{L}(M)M = \{x \in M \mid 0 \cdot x \in \mathcal{L}(M)\}$. Il vient alors $M^\Delta = 0$. Réciproquement si on a $EM = M^\Delta = 0$ il en résulte que $E \subset \mathcal{L}(M)$ (Car $\mathcal{L}(M)$ est le plus grand des ensembles topologisants tels que $\mathcal{L}(M)M = 0$). On a alors $E^2 \cap E = E = E \cap \mathcal{L}(M)$ donc $\mathcal{L}(M) \equiv E^2$.

Lemme 3 : Si M et N sont deux objets d'une sous catégorie rationnelle L de Mod_A et si \bar{M} (resp. \bar{N}) est une extension rationnelle maximale de M (resp. de N), alors tout homomorphisme f de M dans N se prolonge de manière unique en un homomorphisme \bar{f} de \bar{M} dans \bar{N} .



On a $M \in \text{Ob}(L)$ et $N \in \text{Ob}(L)$; il vient donc $\mathcal{L}(M) \equiv \mathcal{L}(N)$. D'après la proposition 1, M est $\mathcal{L}(M)$ -essentiel dans \bar{M} ; ceci implique alors que M est $\mathcal{L}(N)$ -essentiel dans \bar{M} ; l'existence et l'unicité d'un homomorphisme \bar{f} de \bar{M} dans \bar{N}

prolongeant f , résulte alors du lemme 2 et de la $\mathcal{L}(N)$ -injectivité de \bar{N} .

Proposition 4 : Si L est une sous-catégorie rationnelle de Mod_A on peut définir un foncteur additif covariant et exact à gauche de L dans L noté $\bar{\cdot}$ de la façon suivante :

- . A tout objet M de L on fait correspondre l'une de ses extensions rationnelle maximale \bar{M} (elles sont toutes isomorphes et elles sont dans L),
- . A tout homomorphisme $f : M \longrightarrow N$ où M et N sont deux objets de L on fait correspondre l'unique homomorphisme \bar{f} de \bar{M} dans \bar{N} prolongeant f .

Ceci résulte immédiatement du lemme 3.

Application de cette proposition :

Si on prend pour L la sous-catégorie de Mod_A dont les objets vérifient $M^\Delta = 0$ on retrouve un résultat obtenu par C. Leclerc concernant la fonctorisation de l'enveloppe injective ; en effet lorsque $M^\Delta = 0$ toute extension rationnelle maximale de M est aussi une enveloppe injective de M ;

§2. ANNEAUX DE FRACTIONS AU SENS D'UTUMI ET AU SENS CLASSIQUE.

On désigne dans ce qui suit, par R l'ensemble des idéaux à droite rationnels dans A (c.a.d. $R = \mathcal{L}(A)$) et par ϕ un ensemble topologisant et idempotent quelconque d'idéaux à droite de A .

Proposition 5 :

Si on a $\phi \subset \mathcal{R}$, les deux groupes additifs suivant $E_\phi(A)$ et $\text{End}_A(E_\phi(A))$ sont isomorphes. ($E_\phi(A)$ désigne une enveloppe ϕ -injective de A_ϕ).

Pour tout $x \in E_\phi(A)$ il existe un unique A -endomorphisme x' de $E_\phi(A)$ tel que pour tout $a \in A$ on ait $x'(a) = xa$. Considérons l'application $x \rightarrow x'$ de $E_\phi(A)$ dans $\text{End}_A(E_\phi(A))$. On peut remarquer que cette application est un homomorphisme de groupe additif c.a.d. que l'on a $(x+y)' = x'+y'$. Si $x' = 0$ alors $x'(1) = x = 0$. Si $\phi \in \text{End}_A(E_\phi(A))$ on a pour tout $a \in A$ $\phi(a) = \phi(1)a$; il en résulte que $\phi = (\phi(1))'$. Finalement $x \rightarrow x'$ est un isomorphisme de groupe additif.

Application à la construction du localisé de Gabriel pour ϕ .

Si on a $\phi \in R$ l'isomorphisme défini dans la proposition précédente induit sur $E_\phi(A)$ une structure d'anneau. La loi d'anneau ainsi définie sur $E_\phi(A)$ est la seule qui prolonge la loi de A -module à droite car on a A rationnel dans $E_\phi(A)$. On note alors A^ϕ , $E_\phi(A)$ muni de cette structure d'anneau. Si on a $\phi \notin R$ on note encore A^ϕ le A -module à droite $E_{\phi \cap R}(A)$ muni de la loi d'anneau induite par celle de $\text{End}_A(E_{\phi \cap R}(A))$ comme précédemment.

Notons A_ϕ le localisé de Gabriel (2) pour ϕ de A . On a alors

$$\begin{cases} 1. A_\phi = A^\phi \text{ si } \phi \in R \\ 2. \text{ et } A_\phi = \left(\frac{A}{\phi A}\right)^{P(\phi)} \text{ (où } p \text{ est l'épimorphisme canonique } p : A \rightarrow \frac{A}{\phi A} \text{)} \end{cases}$$

dans le cas général.

Cela résulte du fait que si $\phi \in \mathcal{L}(M)$ alors l'enveloppe ϕ -injective de M $E_\phi(M)$ coïncide avec le localisé de Gabriel M_ϕ de M pour ϕ .

Quelques remarques sur l'anneau A^ϕ

Si ϕ est un ensemble topologisant et idempotent d'idéaux à droite de A et si B est un sur-anneau de A on dit que B possède la propriété (F_ϕ) si pour tout $b \in B$ on a $a, A \cdot b \in \phi$. On peut alors démontrer que pour tout anneau de fractions B de A au sens d'Utumi possédant la propriété (F_ϕ) il existe un unique monomorphisme d'anneau β de B dans A^ϕ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & B \\ & \searrow & \downarrow \beta \\ & & \end{array}$$

Si B est un anneau de fractions de A au sens d'Utumi maximal pour la propriété (F_ϕ) alors B est isomorphe à A^ϕ . On peut aussi remarquer qu'il existe un unique anneau maximal des fractions au sens d'Utumi possédant la propriété (F_ϕ) , et qui soit inclus dans une enveloppe injective donnée \hat{A} de A ; il y a équivalence entre :

(1) B est l'unique anneau de fractions de A au sens d'Utumi inclus dans A et maximal pour la propriété (F_ϕ)

$$(2) B = \{x \in \hat{A} \mid A \cdot x \in R \cap \phi\}$$

$$(3) B = \bigcap \text{Ker} f \quad (E_\phi(A) \text{ étant l'unique enveloppe } \phi\text{-injective de } A \text{ incluse dans } \hat{A})$$

$$f \in \text{End}(E_\phi(A))$$

$$\text{et } f(A) = 0$$

L'anneau maximal des fractions au sens d'Utumi de A est A^R et l'anneau classique des fractions à droite de A (lorsqu'il existe) est A^C où C désigne l'ensemble des idéaux à droite de A montrant la partie multiplicative des éléments réguliers de A .

On a pour les anneaux A^ϕ les propositions :

Proposition 6 :

Soit S une partie multiplicative de A . Pour que tous les éléments de S soient inversibles dans A^ϕ il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées :

(1) *S est inclus dans l'ensemble des éléments réguliers de A .*

(2) *Pour tout $s \in S$ l'idéal à droite sA est un idéal de ϕ qui est rationnel dans A .*

(La démonstration est laissée au lecteur).

Si M est un A -module à droite on note $C_\phi(M)$ le treillis des sous-modules ϕ -clos dans M [4]. Il résulte immédiatement de [4] qu'un tel treillis est complet et modulaire.

Proposition 7 : Le treillis des sous-modules ϕ -clos du A -module A^ϕ est constitué par les idéaux de A^ϕ qui sont ϕ -clos dans A^ϕ en tant que A -modules. L'application $X \in C_\phi(A^\phi) \longrightarrow X \cap A \in C_\phi(A)$ est un isomorphisme de treillis.

Soit I un sous A -module de A^ϕ , ϕ clos dans A^ϕ . Pour tout $x \in I$ on considère $I + xA^\phi$. Si $z = i + xy$ appartient à $I + xA^\phi$ on a $I \cdot z = I \cdot xy$. $A \cdot y \subset I \cdot z$ implique $I \cdot z \in \phi \cap R$ c.a.d. $z \in I$ et par suite $I + xA^\phi = I$, on a donc : $xA^\phi \subset I$. I est donc un idéal à droite de A^ϕ . L'isomorphisme de treillis résulte de l'étude des ϕ -clos [4].

Condition nécessaire et suffisante pour que l'anneau classique des fractions à droite de A coïncide avec l'anneau maximal des fractions de A au sens d'Utumi :

Sanderson a montré [6] que si A satisfait à la condition de Ore à droite et que si tout idéal à droite essentiel dans A contient un élément régulier, alors l'anneau classique des fractions à droite de A coïncide avec l'anneau maximal des fractions à droite de A au sens d'Utumi. Sanderson conjecture alors que la réciproque est vraie. Il n'en n'est rien. En effet si on prend $A = \frac{\mathbb{Z}}{(4)}$ on constate que A est son propre anneau classique des fractions et puisque $R = \{A\}$ on a aussi $A = \bar{A}$ et pourtant l'idéal essentiel dans A , $\bar{2}A$ ne contient pas d'élément régulier.

Proposition 8 : Si tout idéal à droite rationnel dans A contient un élément régulier et si A satisfait à la condition de Ore à droite, alors l'anneau classique des fractions à droite de A coïncide avec l'anneau maximal des fractions à droite de A au sens d'Utumi.

Cela résulte du fait qu'alors R est l'ensemble des idéaux à droite de A rencontrant la partie multiplicative des éléments réguliers de A .

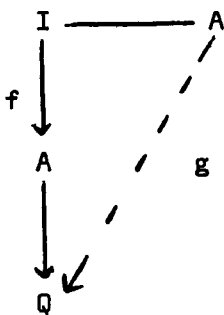
Proposition 9 : Soit A un anneau unitaire satisfaisant à la condition de Ore à droite.

Pour que l'anneau classique des fractions à droite de A coïncide avec l'anneau maximal des fractions au sens d'Utumi il faut et il suffit que la condition (G) suivante soit réalisée :

(G) Pour tout idéal à droite rationnel I et pour tout homomorphisme f de I dans A , il existe un idéal à droite J contenant I et un élément régulier de A , et un homomorphisme \bar{f} de J dans A prolongeant f .

Soit F l'ensemble des idéaux à droite de A coupant la partie multiplicative des éléments réguliers de A . $Q = A^F$ est alors l'anneau classique (ou encore total) des fractions à droite de A .

Supposons que l'anneau maximal des fractions de A au sens d'Utumi coïncide avec Q . Soit $f \in \text{Hom}_A(I, A)$ avec $I \in R$. Puisque Q est R -injectif il existe $g \in \text{Hom}_A(A, Q)$ tel



que le diagramme ci-contre soit commutatif. $g(1) \in Q$ implique $g(1) = ab^{-1}$ avec $a \in A$ et b régulier dans A . Soit J l'idéal à droite engendré par I et b et soit \bar{f} la restriction de g à J . Si $j \in J$ il existe $i \in I$ et $a' \in A$ tel que $j = i + ba'$. Il vient $\bar{f}(j) = g(i + ba') = f(i) + aa'$. On a donc $\bar{f}(j) \in A$ et par suite $\bar{f}(J) \subset A$; la condition (G) est donc réalisée.

Supposons, réciproquement, que (G) est réalisée. Pour montrer la coïncidence des deux anneaux de fractions il suffit de montrer que Q est R -injectif. Soient $I \in R$ et f un A -homomorphisme de I dans Q . On pose $I' = I \cap f^{-1}(A)$. On a $I' \Delta_F I$, (en effet, si $r \in I$ on a $f(r) = ab^{-1}$ avec $a \in A$ et b régulier dans A ; on a donc $f(rb) = a$ c.a.d. $rb \in I'$; il vient donc $I', r \in F$, d'autre part il est trivial de voir que $I' \Delta I$). Soit f' la restriction de f à I' . f' est un homomorphisme de I' dans A . Or I' est rationnel dans A ; (en effet $I' \Delta_F I$ implique $I' \Delta_R I$ et puisque

$I \Delta_{\mathbb{R}} A$ on a $I' \Delta_{\mathbb{R}} A$ donc $I' \in \mathbb{R}$). D'après (G) il existe $J \in \mathbb{F}$ contenant I' et il existe $g' \in \text{Hom}_A(J, A)$ prolongeant f' . La \mathbb{F} -injectivité de Q assure l'existence d'un A -homomorphisme g de A dans Q prolongeant g' . Considérons f et la restriction g/I de g à I . On a : $I' \subset I \subset Q$ et I' est rationnel dans Q . $\forall i' \in I'$ on a :

$$(f-g/I)(i') = f(i') - g'(i') = f'(i') - g'(i') = 0.$$

Il en résulte alors que $f = g|I$, et par suite g prolonge f . Q est donc \mathbb{R} -injectif.

Remarque : dans la cas particulier où $A^{\Delta} = \{x \in A / 0 \cdot x \Delta A\} = 0$ la condition (G) redonne celle obtenue par Gupta dans sa thèse [3] .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. FAITH : "Lectures on injective modules and quotient rings" Springer Verlag, Berlin Heidelberg.
- [2] GABRIEL : Bourbaki, Algèbre commutative ch. 1 et 2 p. 157-160 Hermann.
- [3] GUPTA : Self injective quotient-rings and injective quotient modules p. 69-88. Osaka J. of Math., vol. 5 n°1; June 1968.
- [4] HUDRY : Sous-modules Σ -clos C.R. Acad. Sc. Paris, t. 267, p. 789-791 25 novembre 1968.
- [5] MAURY : C.R. Acad. Sciences. Paris, t. 266 , série A, 1968p. 189.
- [6] SANDERSON : Canadian. Math. Bul. 8, 1965, p.205-513.
- [7] DICKSON : Trans. Amer. Math. Soc., Janvier 1966.
"A torsion theory for Abelian categories".

Manuscrit remis le 30 mai 1969.

Alain HUDRY
Assistant
Département de Mathématiques
43, boulevard du 11 novembre 1918
69 - VILLEURBANNE