

A. ROUX

**Une propriété homotopique des cofibrations**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1969, tome 6, fascicule 2  
, p. 131-138

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1969\\_\\_6\\_2\\_131\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1969__6_2_131_0)

© Université de Lyon, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE PROPRIÉTÉ HOMOTOPIQUE DES COFIBRATIONS

A. ROUX

1. Le théorème principal.

Soit  $(X,A)$  une paire fermée où l'inclusion canonique  $i : A \longrightarrow X$  est une cofibration. Pour une homotopie  $\phi : AXI \longrightarrow B$ , on construit les carrés cartésiens :



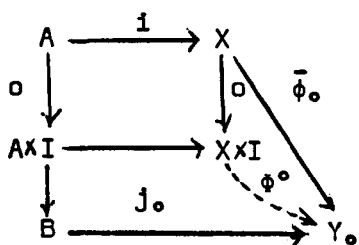
a) Il existe  $\gamma_1^0 : Y_1 \longrightarrow Y_0$  constant sur B

$\phi^0$  une homotopie de  $\bar{\phi}_0$  à  $\gamma_1^0 \bar{\phi}_1$  prolongeant  $\phi$

et de même, en permutant 0 et 1.

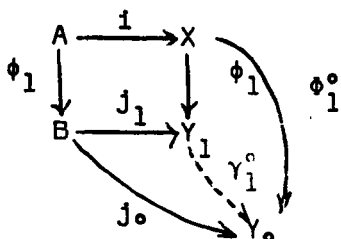
b) Il existe une homotopie  $K^0$  de  $1_{Y_0}$  à  $\gamma_1^0 1_{Y_1}$  relative à B et de même en permutant 0 et 1.

Preuve :



$i : A \longrightarrow X$  étant une cofibration, le diagramme ci-contre peut être complété par  $\phi^0 : X \times I \longrightarrow Y_0$ .

On a alors le diagramme commutatif ci-dessous qui par cocartésianité peut être complété (de façon unique) par  $\gamma_1^0 : Y_1 \longrightarrow Y_0$ .



ceci démontre a).

$\gamma_1^0 \phi^1$  est une homotopie de  $\gamma_1^0 \bar{\phi}_1$  à  $\gamma_1^0 \gamma_0^1 \bar{\phi}_0$  dont la restriction à  $A \times I$  est  $j_0 \phi$  (avec  $\phi^*(a, t) = \phi(a, 1-t)$ ). D'où  $\phi_* (\gamma_1^0 \phi^1)$  est une homotopie de  $\bar{\phi}_0$  à  $\gamma_1^0 \gamma_0^1 \bar{\phi}_0$  dont la restriction à  $A \times I$  est  $j_0 (\phi_* \phi^*)$  (et non  $j_0 \phi_* p$  malheureusement !).

On utilise alors le fait que  $\phi_* \phi^*$  est homotope à  $\phi_* p$  (avec  $p(a, t) = a$ ) pour construire une homotopie  $H$  de  $\bar{\phi}_0$  à  $\gamma_1^0 \gamma_0^1 \bar{\phi}_0$  dont la restriction à  $A \times I$  soit  $j_0 \phi_* p$  :

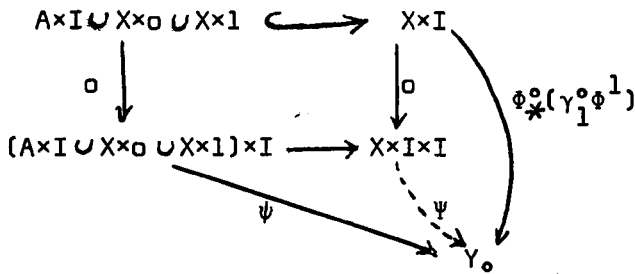
on définit  $\psi : (A \times I \cup X \times_0 \cup X \times 1) \times I \longrightarrow X \times I$  par

sur  $X \times_0 \times I$   $\psi(x, 0, t') = \bar{\phi}_0(x)$

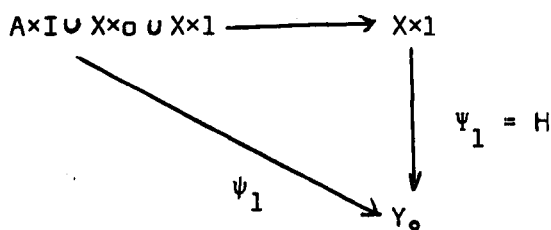
sur  $X \times 1 \times I$   $\psi(x, 1, t') = \gamma_1^0 \gamma_0^1 \bar{\phi}_0(x)$

sur  $A \times I \times I$   $(a, t, t') = \begin{cases} j_0 \phi(a, 0) & 0 \leq t \leq \frac{t'}{2} \\ j_0 \phi(a, 2t-t') & \frac{t'}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ j_0 \phi(a, 2-2t-t') & \frac{1}{2} \leq t \leq 1-\frac{t'}{2} \\ j_0 \phi(a, 0) & 1-\frac{t'}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$

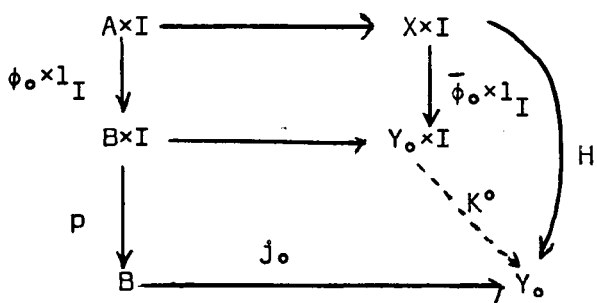
la restriction de  $\psi$  à  $A \times I \times I$  est une homotopie de  $j_0 (\phi_* \phi^*)$  à  $j_0 \phi_* p$



$A \times I \cup X \times_0 \cup X \times 1 \longrightarrow X \times I$  étant une cofibration, le diagramme ci-contre peut être complété par  $\Psi : X \times I \times I \longrightarrow Y_0$ .

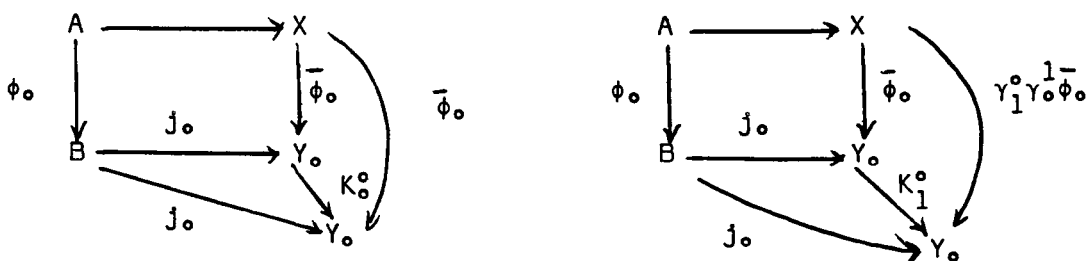


Pour  $t' = 0$  on a donc  $\Psi_0 = \phi_* (\gamma_1^0 \phi^1)$  et pour  $t' = 1$  on a le diagramme commutatif ci-contre et  $H = \Psi_1$  est une homotopie de  $\bar{\phi}_0$  à  $\gamma_1^0 \gamma_0^1 \bar{\phi}_0$  dont la restriction à  $A \times I$  est  $j_0 \phi_* p$ .



Par cocartisianité, le diagramme commutatif ci-contre peut être complété (de façon unique) par  $k^0 : Y_0 \times I \rightarrow Y_0$ .  $K^0$  est donc une homotopie de  $K_0^0$  à  $K_1^0$  relative à  $B$ .

Pour  $t = 0$  et  $t = 1$ , on a les diagrammes commutatifs

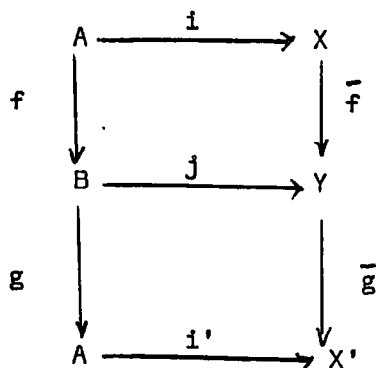


et par cocartisianité on en déduit  $K_0^0 = 1_{Y_0}$  et  $K_1^0 = \gamma_1^0 \gamma_0^1$  donc  $K^0$  est une homotopie de  $1_{Y_0}$  à  $\gamma_1^0 \gamma_0^1$  relative à  $B$ .

En permutant 0 et 1 on a aussi une homotopie  $K^1$  de  $1_{Y_1}$  à  $\gamma_0^1 \gamma_1^0$  relative à  $B$ . ce qui démontre b).

Corollaire 1 :

Soit  $(X,A)$  une paire fermée où l'inclusion canonique  $i : A \rightarrow X$  est une cofibration. Pour des applications  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow A$ , on construit les carrés cocartésiens :



Si  $|g||f| = |1_A|$ , il existe  $\gamma : X \rightarrow X$  constant sur  $A$  tel que  $|\gamma \bar{g}||f| = |1_X|$   
 $|\bar{g}||\bar{f} \gamma| = |1_{X'}|$   
 de plus  $\gamma$  est une équivalence d'homotopie.

Preuve :

Par hypothèse, il existe une homotopie de  $1_A$  à  $gf$ , donc d'après le théorème principal il existe  $\gamma : X' \longrightarrow X$  constant sur  $A$  et une homotopie  $\phi$  de  $1_X$  à  $\gamma \bar{f}$ .

D'où

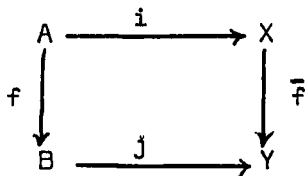
$$|\gamma \bar{g}| |\bar{f}| = |\gamma \bar{g} \bar{f}| = |1_X|$$

De plus on sait que  $\gamma$  est une équivalence d'homotopie, donc il existe  $\gamma' : X \longrightarrow X'$  tel que  $|\gamma'| |\gamma| = |1_X|$ , d'où

$$|1_X| = |\gamma'| |\gamma| = |\gamma'| |\gamma \bar{g}| |\bar{f}| |\gamma| = |\gamma' \gamma| |\bar{g}| |\bar{f} \gamma| = |\bar{g}| |\bar{f} \gamma|$$

Corollaire 2 :

Soit  $(X, A)$  une paire fermée où l'inclusion canonique  $i : A \longrightarrow X$  est une cofibration. Pour une application  $f : A \longrightarrow B$ , on construit le carré cocartésien :

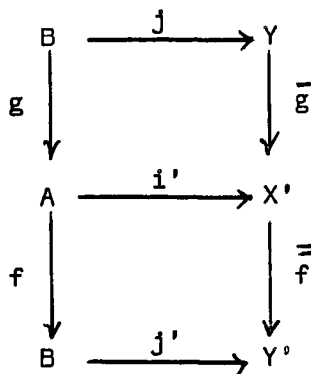


Si  $f$  est une équivalence d'homotopie il en est de même de  $\bar{f}$ .

Preuve :

Soit  $g : B \longrightarrow A$  tel que  $|g| |f| = |1_A|$ ,  $|f| |g| = |1_B|$  avec les notations du corollaire 1 il existe  $\gamma : X' \longrightarrow X$  constant sur  $A$  tel que  $|\gamma \bar{g}| |\bar{f}| = |1_X|$ ,

(2)  $|\bar{g}| |\bar{f} \gamma| = |1_X|$ ,

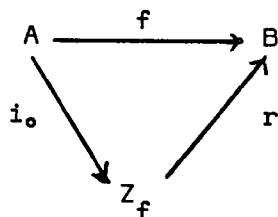


On construit les cocartésiens ci-contre :  
 comme  $|f| |g| = |1_B|$ , d'après le corollaire 1, il existe  $\delta : Y' \longrightarrow Y$  constant sur  $B$  tel que  
 $|\delta \bar{f}| |\bar{g}| = |1_Y|$  (4)  $|\bar{f}| |\bar{g} \delta| = |1_Y|$

D'après (2) et (4) dans la catégorie homotopique  $|\bar{g}|$  et  $|\bar{f}_Y|$  sont des isomorphismes (car  $|\bar{g}|$  admet des inverses à gauche  $|\delta\bar{f}|$  et à droite  $|\bar{f}_Y|$ ) et comme  $|\gamma|$  est un isomorphisme il en est de même de  $|\bar{f}|$ .

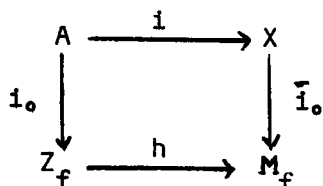
2. Application à la décomposition d'un attachement le long d'une cofibration.

a) Pour  $f : A \rightarrow B$  et  $Z_f$  le cylindre de  $f$ . On a le diagramme ci-contre :



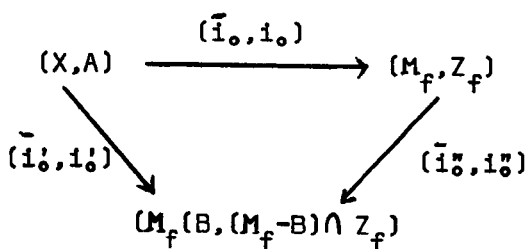
où  $i_o$  est une cofibration (définissant  $A$  comme son espace fermé de  $Z_f$ ) et où  $r$  est une équivalence d'homotopie (rétraction de l'inclusion canonique du sous espace fermé  $B$  dans  $Z_f$ ).

b) Pour une paire fermée  $(X,A)$ , on construit le carré cocartésien ci-contre :



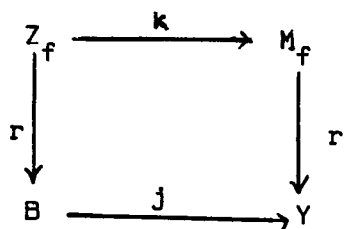
il est facile de voir que l'inclusion de paire  $(\bar{i}_o, i_o) : (X,A) \rightarrow (M_f, Z_f)$

se factorise suivant le diagramme ci-contre :



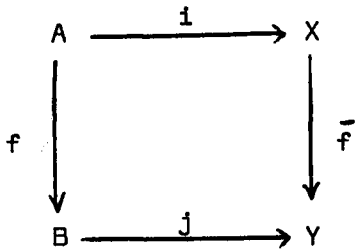
où  $(\bar{i}'_o, i'_o)$  est une équivalence d'homotopie, et où  $(\bar{i}''_o, i''_o)$  est l'inclusion canonique ; de plus le couple  $\{M_f - B, Z_f\}$  est un recouvrement ouvert de  $M_f$ .

c) Lorsque l'inclusion canonique  $i : A \rightarrow X$  est une cofibration, il en est de même de l'inclusion canonique  $k : Z_f \rightarrow M_f$  (la paire  $(M_f, Z_f)$  étant fermée).



Il résulte alors du fait que  $r$  est une équivalence d'homotopie et du corollaire 2 que dans le carré cocartésien,  $\bar{r}$  est une équivalence d'homotopie et plus précisément

$(\bar{r}, r) : (M_f, Z_f) \longrightarrow (Y, B)$  est une équivalence d'homotopie.



En résumé, l'application  $(\bar{f}, f) : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$  définie par le carré cocartésien ci-contre admet la factorisation

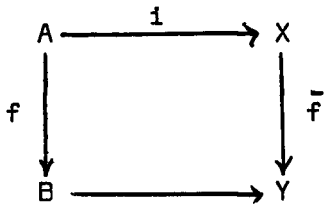
$$(\bar{f}, f) = (\bar{r}, r)(i'_0, i''_0)(i'_0, i''_0)$$

où  $(r, r)$  et  $(i'_0, i''_0)$  sont des équivalences d'homotopie.

3. Exemples :

a) Soit  $(X, A)$  une paire fermée où l'inclusion canonique  $i : A \longrightarrow X$  est une cofibration.

Pour  $f : A \longrightarrow B$ , on construit le carré cocartésien ci-contre :



Avec les notations du paragraphe 2, le couple  $(Z_f, M_f - B)$  étant un recouvrement ouvert de  $M_f$ , on a la suite exacte de Mayer-Victoris (le module des coefficients étant quelconque)

$$\dots \longrightarrow H_n(Z_f, M_f - B) \longrightarrow H_n(M_f - B) \oplus H_n(Z_f) \longrightarrow H_n(M_f) \longrightarrow \dots$$

et du fait des équivalences d'homotopie explicitées ci-dessus on a la suite exacte :

$$(*) \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{(i, f)} H_n(X) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\bar{f}-j} H_n(Y) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \longrightarrow$$

En particulier lorsque  $B$  est réduit à un point on a  $Y = X/A$  et la suite (\*) s'écrit

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \longrightarrow \tilde{H}_n(X) \longrightarrow \tilde{H}_n(X/A) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(A) \longrightarrow \dots$$

Il est évident que l'application quotient  $(X, A) \longrightarrow (X, A/..)$  définit un isomorphisme  $\tilde{H}(X, A) \longrightarrow \tilde{H}(X/A)$ .

Lorsque  $H_{n-1}(A) = 0$  la suite exacte (\*) montre que le carré :

$$\begin{array}{ccc} H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(B) & \longrightarrow & H_n(Y) \end{array}$$

est cocartésien.

(on a des résultats duaux pour la cohomologie).

(b) Lorsque  $X, A, B$  sont connexes par arcs il en est de même de  $(M_f - B)$ ,  $Z_f \cap (M_f - B)$ ,  $Z_f$ , et on peut appliquer le théorème classique de Van-Kamper au carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} Z_f \cap (M_f - B) & \longrightarrow & M_f - B \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z_f & \longrightarrow & M_f \end{array}$$

ce qui donne le carré cocartésien dans la catégorie des groupes :

$$\begin{array}{ccc} (Z_f \cap (M_f - B)) & \longrightarrow & (M_f - B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Z_f) & \longrightarrow & (M_f) \end{array}$$

Du fait des équivalences d'homotopie, on en déduit le carré cocartésien dans la catégorie des groupes :

$$\begin{array}{ccc} \pi(A) & \xrightarrow{i_j} & \pi(X) \\ \downarrow f_j & & \downarrow \bar{f}_j \\ \pi(B) & \xrightarrow{j} & \pi(Y) \end{array}$$



BIBLIOGRAPHIE

- E.H. SPANIER : Algebraic topology (Mac-Graw-Hill book company)
- P. OLUM : Non-abelian cohomology and Van Kamper's theorem.  
(Annals of Math. (1958) 658-68).

Manuscrit remis le 30 mai 1969

A. ROUX  
Maître-assistant  
Département de Mathématiques  
Faculté des Sciences  
43, bd du 11 novembre 1918  
VILLEURBANNE