PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

JACQUES RAVEL

Sur les modules M-injectifs

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1968, tome 5, fascicule 1
, p. 63-71

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1968__5_1_63_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1968 t.5-1

SUR LES MODULES M-INJECTIFS

Jacques RAVEL

Tous les modules considérés dans ce qui suit seront des modules à gauche unitaires sur l'anneau unitaire A ; si M est un tel module, nous exprimerons par la notation $N \leq M$ (resp. $N \triangleleft M$) le fait que N est un sous-module de M (resp. un sous-module de M essentiel dans M) et nous désignerons par $\hat{M}$ une enveloppe injective du module M.

On dit qu'un module N est M-injectif si tout homomorphisme d'un sous-module N_0 de N dans M se prolonge en un homomorphisme de N dans M (figure 1).

$$\begin{tikzcd} N_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"'] & N \arrow[dl, dashed, "f"] \\ M & \end{tikzcd}$$

Il suffit d'ailleurs que les sous-modules de N essentiels dans N aient cette propriété (en effet, si $N_0 \leq N$ et si N'_0 est un complément de N_0 dans N, un homomorphisme f_0 de N_0 dans M se prolonge en l'homomorphisme $f_0 \oplus o_{N'_0,M}$ de $N_0 \oplus N'_0$ dans M – en désignant par $o_{N'_0,M}$ l'homomorphisme nul de N'_0 dans M – lequel se prolonge à son tour, puisque $N_0 \oplus N'_0$ est essentiel dans N, en un homomorphisme de N dans M prolongeant lui aussi f_0).

Si Q est un module injectif, tout module N est Q-injectif ; inversement, un module Q tel que tout module N soit Q-injectif est injectif (en effet, pour que le A-module soit Q-injectif, il faut et il suffit que Q soit injectif, propriété qu'on érige souvent en "test d'injectivité" pour pouvoir s'y référer plus commodément).

Si N est un module semi-simple, N est M-injectif pour tout module M (en effet, tout sous-module N_o de N en étant un facteur direct a un supplémentaire N'_o et l'homomorphisme f_o de N_o dans M peut être prolongé par l'homomorphisme $f_o \oplus o_{N'_o,M}$ de N dans M) ; inversement, un module N qui est M-injectif pour tout module M est semi-simple (en effet, si $N_o \leqslant N$, l'homomorphisme identique 1_{N_o} de N_o se prolonge, puisque N est N_o-injectif, en un homomorphisme r de N sur N_o, et le "retracté" N_o de N en est un facteur direct).

Notons que pour qu'un module M soit M-injectif, il faut et il suffit qu'il soit quasi injectif, ce qui suggère, par analogie avec [1], le "test de M-injectivité" suivant :

Théorème : Pour qu'un module N soit M-injectif, il faut et il suffit que l'image de N par tout homomorphisme d'une enveloppe injective de N dans une enveloppe injective de M soit contenue dans M (autrement dit, que $(\forall f : \hat{N} \to \hat{M})(f(N) \subseteq M)$).

- la condition est évidemment suffisante.

(En effet, si f_o est un homomorphisme d'un sous module N_o de N dans M, donc dans $\hat{M}$, il se prolonge, puisque $\hat{M}$ est injectif, en un homomorphisme f de $\hat{N}$ dans $\hat{M}$ dont la restriction à N est un homomorphisme de N dans M (puisque $f(N) \subseteq M$) prolongeant f_o).

- La condition est nécessaire :

Si N est M-injectif, soit f un homomorphisme d'une enveloppe injective $\hat{N}$ de N dans une enveloppe injective $\hat{M}$ de M : la restriction f_o de f à $N_o = N \cap \overset{-1}{f}(M)$ est un homomorphisme de N_o dans M qui se prolonge, puisque N est M-injectif, en un homomorphisme g de N dans M, donc dans $\hat{M}$, lequel se prolonge à son tour, puisque $\hat{M}$ est injectif, en un homomorphisme h de $\hat{N}$ dans $\hat{M}$ (figure 2).

$$\begin{tikzcd} N \cap f^{-1}(M) \arrow[r, "f_o"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ N \arrow[r, "g"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ \hat{N} \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "f"'] & \hat{M} \end{tikzcd}$$

on a $(h-f)(N) = o$ (d'où en particulier $f(N) = h(N) = g(N) \subseteq M$, ce qui prouve bien la necessité).

En effet, si $(h-f)(N) \neq o$, on a, puisque $M \triangleleft \hat{M}$, $(h-f)(N) \cap M \neq o$, et il existe des éléments non nuls y de N et x de M tels que $x = (h-f)(y) = h(y)-f(y)$; mais, puisque $y \in N$, $h(y) = g(y)$ et $f(y) = g(y) - x \in M$, d'où $y \in f^{-1}(M) \cap N = N_o$ et $g(y) = f_o(y) = f(y)$, d'où $x = o$, l'absurdité souhaitée et le résultat.

Il s'ensuit en particulier que si $M' \triangleleft M$ et si N est M'-injectif, N est M-injectif (en effet on peut alors considérer que $\hat{M} = \hat{M}'$, et si f est un homomorphisme de $\hat{N}$ dans $\hat{M}$, on a, puisque N est M-injectif, $f(N) \subseteq M'$, d'où $f(N) \subseteq M$ et la M-injectivité de N).

Théorème : Pour que N soit $M \oplus M'$-injectif, il faut et il suffit qu'il soit M-injectif et M'-injectif.

La condition est nécessaire, car si $f = \hat{N} \to \hat{M} \leq \hat{M} \oplus \hat{M}' = \widehat{M \oplus M'}$; on a, puisque N est $M \oplus M'$-injectif, $f(N) \subseteq M \oplus M'$, d'où

$$f(N) \subseteq (M \oplus M') \cap \hat{M} = M \oplus (M' \cap \hat{M}) = M \oplus o = M$$

et la M-injectivité de N.

La condition est suffisante : si elle est vérifiée, soient $f : \hat{N} \to \widehat{M \oplus M'} = \hat{M} \oplus \hat{M}'$, ϕ (resp. ψ) l'application canonique de $\hat{M} \oplus \hat{M}'$ sur $\hat{M}$ (resp. sur $\hat{M}'$) ; puisque ϕf (resp. ψf) applique $\hat{N}$ dans $\hat{M}$ (resp. dans $\hat{M}'$) on a, sur la M- (resp. sur la M'-)injectivité de N $\phi f(N) \subseteq M$ (resp. $\psi f(N) \subseteq M'$), d'où $f(N) \subseteq \phi f(N) + \psi f(N) \subseteq M \oplus M'$ et la $M \oplus M'$-injectivité de N.

Par une récurrence immédiate, on voit que si I est un ensemble d'indices fini, N est $\bigoplus_{i\in I} M_i$-injectif si et seulement si N est M_i-injectif ($\forall i\in I$).

Cette équivalence s'étend à un ensemble d'indices quelconque si et seulement si l'anneau A est noéthérien (en effet, il est nécessaire pour cela que le A-module A soit $\bigoplus_{i\in I} Q_i$-injectif dès qu'il est Q_i-injectif ($\forall i\in I$), c'est-à-dire que toute somme directe de A-modules injectifs soit injective, ce qui implique la noéthérianité de l'anneau (d'après un théorème de Zoltan Papp, dont on trouvera une démonstration (dûe à Bass) en [2]). Inversement, la propriété invoquée est vérifiée lorsque l'anneau considéré est noéthérien, en raison du test de M-injectivité, et du fait que pour toute famille $(M_i)_{i\in I}$ de modules sur un tel anneau, on a $\widehat{\bigoplus_{i\in I} M_i} = \bigoplus_{i\in I} \widehat{M_i}$.

<u>Théorème</u> : Pour que $N\oplus N'$ soit M-injectif, il faut et il suffit que N et N' soient M-injectifs.

- <u>La condition est nécessaire</u>, puisque tout sous-module d'un module M-injectif est M-injectif.

- <u>La condition est suffisante</u> : si elle est vérifiée, soient f un homomorphisme de $\widehat{N\oplus N'} = \widehat{N}\oplus\widehat{N'}$ dans $\widehat{M}$, et ϕ (resp. ψ) sa restriction à $\widehat{N}$ (resp. à $\widehat{N'}$) ; on a, sur la M-injectivité de N (resp. de N') $\phi(N)\subseteq M$ (resp. $\psi(N')\subseteq M$), d'où $f(N\oplus N') = f(N) + f(N') = \phi(N) + \psi(N')\subseteq M$ la M-injectivité de $N\oplus N'$.

Il s'ensuit, par une récurrence immédiate, qu'une somme directe finie est M-injective si et seulement si tous ses facteurs sont M-injectifs, résultat qui s'étend bien entendu à une somme directe quelconque dans le cas d'un anneau noéthérien.

Ainsi :

Si I et J sont des ensembles d'indices finis, $\bigoplus_{i\in I} N_i$ est $\bigoplus_{j\in J} M_j$-injectif si et seulement si $(\forall i\in I)\ (\forall j\in J)$ N_i est M_j-injectif.

Cette équivalence s'étend à des ensembles d'indices quelconques si l'anneau A est noéthérien (et dans ce cas seulement).

Applications. Pour qu'un module $M = N\oplus N'$ soit quasi injectif, il faut et il suffit que N et N' soient quasi injectifs, que N soit N'-injectif et que N' soit N-injectif.

On retrouve le fait que tout facteur direct d'un module quasi injectif est quasi injectif ; mais, surtout, on obtient un critère qui permet de décider si la somme directe de deux modules quasi injectifs est quasi injective (critère qui s'étend à une somme directe quelconque dans le cas d'un anneau noéthérien). C'est ainsi que toute somme directe finie de modules quasi injectifs isotypiques est quasi injective, ceci valant aussi pour une somme directe quelconque si l'anneau A est noethérien, comme l'a indiqué en [3] N. Chaptal.

Harada a signalé en [4] que pour que la somme directe de deux modules quasi injectifs dont les enveloppes injectives sont isomorphes soit quasi injective, il faut et il suffit que ces deux modules soient eux aussi isomorphes ; cela résulte aussi très naturellement du lemme suivant :

Lemme : Si les enveloppes injectives des modules M et M' sont isomorphes, M est M'-injectif et M' est M-injectif si et seulement si M et M' sont des modules quasi injectifs isomorphes.

-La condition est suffisante, la relation "N est M-injectif" étant catégorique (N et M peuvent être remplacés par des modules isomorphes sans que la relation soit modifiée).

- La condition est nécessaire : soient en effet ϕ et ψ des isomorphismes inverses respectivement de $\hat{M}$ sur $\hat{M'}$ et de $\hat{M'}$ sur $\hat{M}$; on a, en raison de la M'-injectivité de M et de la M-injectivité de M', $\phi(M) \subseteq M'$ et $\psi(M') \subseteq M$, et les restrictions de ϕ et de ψ à M et à M' sont des isomorphismes inverses respectivement de M sur M' et de M' sur M.

Le lemme a aussi pour conséquence le résultat suivant :

Proposition : Deux modules quasi injectifs M et M' dont chacun est isomorphe à un sous-module de l'autre sont isomorphes.

Il suffit en effet de remarquer que chacun des modules injectifs $\hat{M}$ et $\hat{M'}$ étant isomorphe à un sous-module de l'autre, $\hat{M}$ et $\hat{M'}$ sont isomorphes (d'après [5]) puis de noter que M, (resp. M'), étant quasi injectif est M-(resp. M'-) injectif d'où le fait que M' (resp. M) qui est isomorphe à un sous-module de M (resp. de M') est M- (resp. M'-) injectif, d'où le résultat en vertu du lemme.

Remarquons comme application qu'un module quasi injectif M qui contient un élément sans torsion est injectif (le A-module A lui-même étant alors M-injectif) : nous retrouvons ainsi un résultat de [3] , qui généralise un lemme de [6].

En guise d'ultime application, citons le résultat suivant :

Théorème : Pour l'anneau A, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) Il existe une correspondance $M \rightarrow \hat{M}$ qui soit croissante (c'est-à-dire telle que $M \subseteq M' \Rightarrow \hat{M} \subseteq \hat{M'}$)

2) Si M et M' sont des sous-modules de M", et si N est M-injectif et M'-injectif, il est aussi $M \cap M'$-injectif.

3) L'intersection de deux sous-modules injectifs d'un module est un sous-module injectif de ce module.

4) A est semi-simple.

1) $\Rightarrow$ 2) en raison du test de M-injectivité et du fait que $\widehat{M \cap M'}$ est, dans $\widehat{M''}$, un sous-module de $\hat{M}$ et de $\widehat{M'}$.

2) $\Rightarrow$ 3), comme on le voit en considérant le cas où $N = A$.

3) $\Rightarrow$ 4) comme nous l'avons démontré en [7] .

4) $\Rightarrow$ 1) la correspondance considérée étant alors l'égalité.

Les résultats que nous allons citer pour finir serrent d'un peu plus près **la** notion de M-injectivité.

Théorème : Si $N' \leqslant N$ (resp. $M' \leqslant M$), soit $\overline{N'}$ (resp. $\overline{M'}$) une extension essentielle maximale de N' dans N (resp. de M' dans M) : si N est M-injectif, tout homomorphisme f de N' dans M' se prolonge en un homomorphisme $\bar{f}$ de $\overline{N'}$ dans $\overline{M'}$.

En effet, en vertu d'un théorème démontré en [8] par Renault, les sous-modules d'un module M fermés dans M sont précisément, puisque $M \trianglelefteq \hat{M}$, les intersections avec M des sous-modules de $\hat{M}$ fermés dans $\hat{M}$ (c'est-à-dire des sous-modules injectifs de $\hat{M}$) : il existe donc des sous-modules injectifs Q de $\hat{N}$ et R de $\hat{M}$ tels que $\overline{N'} = N \cap Q$ et $\overline{M'} = M \cap R$.

L'homomorphisme f de N' dans M' (donc dans R) se prolonge, puisque R est injectif, en un homomorphisme g de Q dans R : soit $\bar{f}$ la restriction de g à $\bar{N}$ (figure 3).

$$\begin{tikzcd}
N' \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M' \arrow[d] \\
N \cap Q \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] \arrow[d] & M \cap R \arrow[d] \\
Q' \arrow[r, "g"] \arrow[d] & R \arrow[d] \\
\hat{N} \arrow[r, "h"] & \hat{M}
\end{tikzcd}$$

On a $\bar{f}(\overline{N'}) = \bar{f}(N \cap Q) = g(N \cap Q) \subseteq g(Q) \subseteq R$.

Il existe par ailleurs un unique homomorphisme h de $\hat{N}$ dans R (donc dans $\hat{M}$) prolongeant g et nul sur un supplémentaire donné de Q dans $\hat{N}$ - on a, évidemment, $\bar{f}(\overline{N'}) = g(\overline{N'}) = g(N \cap Q) = h(N \cap Q) \subseteq h(N) \subseteq M$ (en raison de la M-injectivité de N), d'où $\bar{f}(\overline{N'}) \subseteq M \cap R = \overline{M'}$ et le résultat.

Dans le cas particulier où N = M et où M' est fermé dans M, on obtient un lemme de [6] .

Théorème : Soient M_o et M'_o des compléments relatifs dans M. pour que N soit M-injectif, il faut et il suffit qu'il soit M_o et M'_o-injectif.

- La condition est évidemment suffisante, car, si elle est vérifiée N est $M_o \oplus M'_o$-injectif, donc aussi M-injectif (puisque $M_o \oplus M'_o \triangleleft M$).

- La condition est nécessaire : soit en effet Q un sous-module injectif de $\hat{M}$ tel que $M_o = M \cap Q$; si f est un homomorphisme de $\hat{N}$ dans $\widehat{M_o} = Q \leq \hat{M}$, on a, puisque N est M-injectif, $f(N) \subseteq M$, d'où $f(N) \subseteq M \cap Q = M_o$ et la M_o-injectivité de N.

Dans un prochain article nous nous proposons de définir et d'étudier la notion de module M-Σ-injectif, Σ définissant une famille d'idéaux à gauche de l'anneau de base A satisfaisant aux conditions de Sanderson [9] .

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.E.JOHNSON et E.T. WONG : Quasi injective modules and irreducible rings. Journal of London Mathematical Society 36 (1961) p. 260-268.

[2] Stephen CHASE : Direct product of modules. Transactions of the American Mathematical Society. 97 (1960) P. 457-473.

[3] Nicole CHAPTAL : Sur les modules quasi injectifs. Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris. 264 (1967) p. 173-175.

[4] Manabu HARADA : Note on quasi injective modules. Osaka Journal of Mathematics. 2 (1965) p. 351-356.

[5]

[6] Carl FAITH et Yunzo UTUMI : Quasi injective modules and their endomorphism rings. Archiv der Mathematik Volume 15, fasc. 3 (1964). p. 166-174.

[7] Jacques RAVEL : Injectivité, extensions essentielles. Thèse de troisième cycle (Lyon 1966).

[8] RENAULT G. : Etude des compléments d'un module. Thèse Faculté des Sciences de Paris 1966.

[9] SANDERSON D.E. : A generalisation of injectivity and divisibility in moduls. Can. Math. Bul. 1965 p. 505-513.