

A. HUDRY

**Sous-modules Σ clos, sous-modules Σ -compléments
relatifs Modules Σ -quasi-injectifs**

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1968, tome 5, fascicule 1
, p. 1-35

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1968__5_1_1_0

© Université de Lyon, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOUS-MODULES Σ CLOS, SOUS-MODULES Σ -COMPLÉMENTS RELATIFS

MODULES Σ -QUASI - INJECTIFS

par A. Hudry

INTRODUCTION :

Dans tout ce qui suit, M désigne un module à gauche sur un anneau A unitaire non nécessairement commutatif, et Σ est une famille d'idéaux à gauche de A vérifiant les axiomes de Sanderson [7]. On note T_M le treillis des sous-modules de M .

Au paragraphe I, on généralise la notion de sous-module clos utilisée par Harada [3], Johnson [4] ou Wong [8]. On étudie systématiquement l'application qui, à un sous-module de M , fait correspondre son extension Σ -close dans M . Les résultats obtenus permettent (proposition 7) de mettre en évidence une fermeture de T_M et montrent (proposition 2) que la notion de Σ -clos introduite s'adapte particulièrement bien à l'étude des modules dont le sous-module Σ -singulier est nul. On obtient une caractérisation de ces modules (proposition 12) et on trouve tous les Σ -compléments de ces modules. On retrouve alors en les généralisant les propriétés classiques des modules avec sous-module singulier nul. Les propositions 16 et 17 permettent de se ramener du cas général au cas des modules dont le sous-module Σ -singulier est nul en effectuant un passage au quotient.

Au paragraphe II, on introduit la notion de Σ -complément relatif d'un sous-module dans un souci de généralisation et surtout dans le but de caractériser les facteurs directs d'un module Σ -quasi-injectif.

(La notion de Σ -quasi-injectivité d'un module qui est une généralisation de la notion de quasi-injectivité a été introduite par G. Maury en [5]). Cette généralisation n'est plus aussi simple que dans le cas où Σ est la famille de tous les idéaux de A car on n'est plus assuré de l'existence d'un Σ -complément relatif pour un sous-module quelconque de M. La notion introduite a des rapports étroits avec celle de Σ -complément fort introduite par G. Maury en [5].

Au paragraphe III, on se propose essentiellement de trouver les facteurs directs d'un Σ -quasi-injectif. Harada avait mis en évidence dans [3] une classe de facteurs directs d'un quasi-injectif à savoir les sous-modules clos ; ici on montre que dans le cas où Σ n'est plus la famille de tous les idéaux de A, un Σ -clos n'est pas nécessairement un facteur direct d'un Σ -quasi-injectif. C'est la notion introduite au paragraphe II qui nous permet de trouver tous les facteurs directs d'un Σ -quasi-injectif.

Au paragraphe IV, on généralise un article de Fort [2] dans le but de définir une Σ -dimension pour un module quelconque. Si on peut définir un module riche en Σ -coirréductibles, cette notion n'est plus aussi souple que dans [2] et on ne dispose plus du Théorème 1 de Fort [2] qui permet de définir la dimension d'un module injectif quelconque à partir de la dimension d'un module injectif riche en coirréductibles. Aussi nous ferons cette étude directement dans le cas général en utilisant notamment dans la démonstration de la proposition fondamentale 41 la technique d'Azumaya [1] reprise par Miyashita [6] et par Fort [2]. On donne enfin un exemple de décomposition d'un Σ -quasi-injectif satisfaisant à certaines conditions, en une somme directe de Σ -quasi-injectifs indécomposables.

I. Σ -CLOTURE DANS UN MODULE ET SOUS-MODULES Σ -CLOS DANS UN MODULE

Si X est un sous-module de M et x un élément de M , on notera $[X : x]$ le quotient de X par x à gauche, c'est-à-dire :

$$[X : x] = \{ \lambda \in A \mid \lambda x \in X \}$$

Proposition 1 :

Si X est un sous-module de M , $X_M^\Sigma = \{ x \in M \mid [X : x] \Delta_\Sigma A \}$ est un sous-module de M .

Soient $x \in X_M^\Sigma$ et $y \in X_M^\Sigma$: $[X : x] \Delta_\Sigma A$ et $[X : y] \Delta_\Sigma A$

Donc : $[X : x] \cap [X : y] \Delta_\Sigma A$. Or : $[X : x] \cap [X : y] \subset [X : x + y]$.

Par suite : $[X : x + y] \Delta_\Sigma A$ et $x + y \in X_M^\Sigma$

Soient $x \in X_M^\Sigma$ et $a \in A$; on a les relations :

$$[X : x] \Delta_\Sigma A \quad \text{et} \quad [X : ax] = [X : x] \Delta_\Sigma a . \text{ Puisque } [X : x] \in \Sigma$$

il en résulte que $[X : ax] \in \Sigma$. Montrons que $[X : ax] \Delta A$.

Soit $\lambda \in A$ avec $\lambda \neq 0$. Si $\lambda \notin [X : ax]$ on a en particulier $\lambda a \neq 0$ et puisque $[X : x] \Delta A$ il vient :

$\exists \mu \in A, \mu \lambda a \neq 0$ et $\mu \lambda a \in [X : x]$. Il en résulte que :

$$\exists \mu \in A, \mu \lambda \neq 0 \quad \text{et} \quad \mu \lambda \in [X : x] : a = [X : ax] .$$

Définition :

X étant un sous-module de M , X_M^Σ sera appelé la Σ -cloture de X dans M (On la notera X^Σ s'il n'y a pas d'ambiguïté).

L'application : $X \in T_M \longrightarrow X_M^\Sigma \in T_M$ sera appelée Σ -cloture dans M .

Remarques :

1. Cette application est extensive et croissante.

2. Si M est un sous-module du module Q :

$$X_M^\Sigma = X_Q^\Sigma \cap M$$

3. Si Σ et Σ' sont deux familles d'idéaux à gauche de Sanderson telles que $\Sigma \subset \Sigma'$ alors :

$$X_M^\Sigma \subset X_M^{\Sigma'}$$

4.

$$(X \cap Y)_M^\Sigma = X_M^\Sigma \cap Y_M^\Sigma$$

Définition :

Le sous-module 0_M^Σ est le sous-module Σ -singulier de M

$$0_M^\Sigma = \{x \in M \mid \text{An}(x) \Delta_\Sigma A\}$$

($\text{An}(x)$ désigne l'annulateur à gauche de x).

Proposition 2 :

Pour tout sous-module X de M , on a :

$$X + 0_M^\Sigma \Delta_\Sigma X_M^\Sigma$$

On a : $X \subset X^\Sigma$ d'après l'extensivité de la Σ -cloture et $0^\Sigma \subset X^\Sigma$ d'après la croissance de la Σ -cloture. Donc : $X + 0^\Sigma \subset X^\Sigma$
 Soit $x \in X^\Sigma$ tel que $x \notin X + 0^\Sigma$; on a : $[X : x] \Delta_\Sigma A$ donc $[X : x] \in \Sigma$.
 $[X : x] \subset [X + 0^\Sigma : x]$ implique $[X + 0^\Sigma : x] \in \Sigma$. On a $[X : x] x \neq 0$
 car si non on aurait $\text{An}(x) = [X : x] \Delta_\Sigma A$ ce qui contredirait : $x \notin 0^\Sigma$.
 Par suite $[X + 0^\Sigma : x] x \neq 0$.

Proposition 3 :

Toute extension Σ -essentielle d'un sous-module X dans M est contenue dans la Σ -cloture de X dans M .

$$(\forall X \in \mathcal{T}_M) (\forall Y \in \mathcal{T}_M) (X \Delta_\Sigma Y \implies Y \subset X_M^\Sigma)$$

Soit Y un sous-module de M tel que : $X \Delta_{\Sigma} Y$ et soit $y \in Y$.
 Si y appartient à X il appartient à X_M^{Σ} . Soit alors $y \in Y$ avec $y \notin X$.
 On a $y \neq 0$ donc $[X : y]y \neq 0$. Soit $a \in A$ et $a \notin [X : y]$, on a :
 $[X : y] : a \in \Sigma$ car $[X : y] \in \Sigma$. D'autre part on a $ay \neq 0$ car :
 $a \notin [X : y]$. ay est un élément de Y donc puisque : $X \Delta_{\Sigma} Y$ il vient :
 $[X : ay]ay \neq 0$ donc $[X : ay] \neq 0$ c'est-à-dire $[X : y] : a \neq 0$.
 Donc on a $[X : y] \Delta A$ et finalement $[X : y]$ est Σ -essentiel dans A
 et $y \in X_M^{\Sigma}$.

Proposition 4 :

Si un sous-module X de M contient le sous-module Σ -singulier de M , alors X possède une unique extension Σ -essentielle maximale à savoir sa Σ -cloture dans M , X_M^{Σ} . X_M^{Σ} est aussi la plus grande extension Σ -essentielle de X et un Σ -complément (voir [5] page 6) minimal contenant X .

D'après la proposition 2, on a : $0_M^{\Sigma} \subset X \implies X \Delta_{\Sigma} X_M^{\Sigma}$.

Donc X_M^{Σ} est une extension Σ -essentielle de X et c'est la plus grande car si $X \Delta_{\Sigma} Y$, d'après la proposition 3, on a : $Y \subset X_M^{\Sigma}$. En particulier X_M^{Σ} est l'unique extension Σ -essentielle maximale de X .
 Soit Z un Σ -complément de M tel que : $X \subset Z \subset X_M^{\Sigma}$ on a alors
 $Z \Delta_{\Sigma} X_M^{\Sigma}$ Donc $Z = X_M^{\Sigma}$; donc X_M^{Σ} est un Σ -complément minimal contenant X .

Corollaire :

Soit $0_M^{\Sigma} \subset X$; Si l'intersection de deux Σ -compléments est un Σ -complément, alors X_M^{Σ} est le plus petit Σ -complément contenant X .

Soit Y un Σ -complément quelconque contenant X , on a :
 $X \subset Y \cap X_M^{\Sigma}$, et $Y \cap X_M^{\Sigma}$ est un Σ -complément d'après l'hypothèse faite, comme intersection de deux Σ -compléments. Comme X_M^{Σ} est un Σ -complément minimal contenant X on a $Y \cap X_M^{\Sigma} = X_M^{\Sigma}$ donc $X_M^{\Sigma} \subset Y$.

Définition :

X étant un sous-module de M , on appelle Σ -surcloture de X dans M la Σ -cloture de la Σ -cloture de X dans M et on la notera $X_M^{\Sigma\Sigma}$. L'application : $X \in T_M \longrightarrow X_M^{\Sigma\Sigma} \in T_M$ s'appellera la Σ -surcloture dans M .

Remarques :

1. Cette application est extensive et croissante.
2. Si M est un sous-module de Q : $X_M^{\Sigma\Sigma} = X_Q^{\Sigma\Sigma} \cap M$.
3. Si Σ' est une autre famille d'idéaux de Sanderson telle que $\Sigma \subset \Sigma'$ alors $X_M^{\Sigma\Sigma} \subset X_M^{\Sigma'\Sigma'}$.

Proposition 5 :

La famille des Σ -surclotures des sous-modules de M dans M $(X_M^{\Sigma\Sigma})_{X \in T_M}$ est une famille de Σ -compléments de M .

Pour $X \in T_M$ on a $0_M^\Sigma \subset X_M^\Sigma$ donc d'après la proposition 4, $X_M^{\Sigma\Sigma}$ est la plus grande extension Σ -essentielle de X_M^Σ dans M , c'est donc en particulier un Σ -complément dans M .

Proposition 6 :

Si X contient le sous-module Σ -singulier de M , sa Σ -cloture dans M coïncide avec sa Σ -surcloture dans M .

D'après la proposition 2 : $0_M^\Sigma \subset X \Rightarrow X \Delta_\Sigma X_M^\Sigma$. On a vu dans la proposition précédente que $X_M^\Sigma \Delta_\Sigma X_M^{\Sigma\Sigma}$ donc on a : $X \Delta_\Sigma X_M^{\Sigma\Sigma}$ et puisque d'après la proposition 4, X_M^Σ est la plus grande extension Σ -essentielle de X , on a : $X_M^{\Sigma\Sigma'} \subset X_M^\Sigma$ d'où finalement $X_M^\Sigma = X_M^{\Sigma\Sigma}$.

Proposition 7 :

La Σ -surcloture dans M : $X \in T_M \longrightarrow X_M^{\Sigma\Sigma} \in T_M$ est une fermeture.

Lemme :

$$X_M^{\Sigma\Sigma\Sigma} = X_M^{\Sigma\Sigma}$$

Puisque $0_M^\Sigma \subset X_M^\Sigma$ d'après la proposition 6, la Σ -cloture de X_M^Σ coïncide avec sa Σ -surcloture d'où le résultat du Lemme. On a déjà remarqué que la Σ -surcloture dans M était croissante et extensive ; l'idempotence résulte immédiatement du Lemme.

Proposition 8 :

Pour que le sous-module X de M coïncide avec sa Σ -surcloture dans M il faut et il suffit qu'il coïncide avec sa Σ -cloture dans M .

Soit $X = X_M^\Sigma$, on en déduit : $X_M^\Sigma = X_M^{\Sigma\Sigma}$ donc $X = X_M^{\Sigma\Sigma}$.

Réciproquement, soit $X = X_M^{\Sigma\Sigma}$, on en déduit $X_M^\Sigma = X_M^{\Sigma\Sigma\Sigma} = X_M^{\Sigma\Sigma}$ donc $X = X_M^\Sigma$.

Définition :

On dit que le sous-module X de M est Σ -clos si c'est un invariant pour la Σ -cloture dans M ($X = X_M^\Sigma$) ; on vient de voir que cela revient à dire que c'est un invariant pour la Σ -surcloture dans M .

Remarque :

Tout Σ -clos de M est un Σ -complément mais la réciproque est fautive en général. Il est clair que la famille des Σ -clos de M est $(X_M^{\Sigma\Sigma})_{X \in T_M}$.

Proposition 9 :

L'intersection d'une famille quelconque de Σ -clos dans M est Σ -close dans M .

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une telle famille ; on a :

$\bigcap_{i \in I} X_i \subset (\bigcap_{i \in I} X_i)^\Sigma$ (à cause de l'extensivité) et
 $(\bigcap_{i \in I} X_i)^\Sigma \subset X_i^\Sigma = X_i$ (à cause de la croissance). D'où :

$(\bigcap_{i \in I} X_i)^\Sigma \subset \bigcap_{i \in I} X_i$ et finalement, on a :

$$(\bigcap_{i \in I} X_i)^\Sigma = \bigcap_{i \in I} X_i$$

 Σ -compléments, Σ -fermés et Σ -closProposition 10 :

L'ensemble des Σ -clos dans un module M coïncide avec l'ensemble des Σ -compléments contenant le sous-module Σ -singulier de M .

(Harada [3] a démontré ce résultat dans le cas particulier où Σ est la famille de tous les idéaux de A et où M est quasi-injectif).

Soit X un Σ -clos dans M ; on a remarqué que c'était un Σ -complément et puisque $X = X^\Sigma$ il en résulte que ce Σ -complément contient 0^Σ . Réciproquement, soit X un Σ -complément contenant 0^Σ ; d'après la proposition 2, on a $X \Delta_\Sigma X^\Sigma$ d'où $X = X^\Sigma$.

Remarque :

Si M est Σ -injectif [7] il y a équivalence entre

- (1) X Σ -clos dans M
 et (2) X Σ -injectif contenant 0_M^Σ

En effet, d'après [5] " X Σ -complément dans M Σ -injectif" équivaut à " X Σ -injectif".

Proposition 11 : tout Σ -clos est Σ -fermé ([5] page 6)
mais la réciproque est fautive dans le cas général.

Soit X un Σ -clos. Si X n'était pas Σ -fermé, on aurait :
 $(\exists x \notin X) (\forall a \in A) (ax \neq 0) ([X : ax] \in \Sigma \text{ et } [X : ax]ax \neq 0)$
 Soit $a \in A$; si $a \notin An(x)$ on a $[X : ax] \in \Sigma$ et si $a \in An(x)$ $[X : ax] = A \in \Sigma$.
 Donc, pour tout $a \in A$ on a $[X : x] : a = [X : ax] \in \Sigma$. Comme $A \in \Sigma$
 il vient $[X : x] \in \Sigma$. Montrons que $[X : x] \Delta A$. Soit $a \in A$ et
 $a \notin [X : x]$ alors $ax \neq 0$ et d'après l'hypothèse faite, on a
 $[X : ax]ax \neq 0$. Par suite : $(\exists \lambda \in [X : ax]) (\lambda ax \in X \text{ et } \lambda ax \neq 0)$.
 Donc $\lambda a \in [X : x]$ et $\lambda a \neq 0$. Il en résulte que $[X : x] \Delta A$ et
 finalement que $[X : x] \Delta_{\Sigma} A$. Finalement on a montré que $x \in X^{\Sigma} = X$
 ce qui est contradictoire.

La réciproque est fautive dans le cas général : 0 est Σ -fermé mais
 en général non Σ -clos car en général $0 \neq 0^{\Sigma}$.

Proposition 12 :

Dans un module M on a les propriétés équivalentes

- (1) la famille des Σ -compléments coïncide avec la famille des Σ -clos
- (2) la famille des Σ -fermés coïncide avec la famille des Σ -clos
- (3) $(0 = 0^{\Sigma}_M)$ le module Σ -singulier est nul.

(1) \Rightarrow (2) : On sait que tout Σ -clos est Σ -fermé (proposition 11).
 Soit alors X un Σ -fermé c'est un Σ -complément d'après [5] donc
 sous l'hypothèse (1) c'est un Σ -clos.

(2) \Rightarrow (3) : 0 est un Σ -fermé donc sous l'hypothèse (2) c'est aussi
 un Σ -clos et $0 = 0^{\Sigma}_M$

(3) \Rightarrow (1) : On sait que tout Σ -clos est un Σ -complément. Soit X
 un Σ -complément. Puisque $0 = 0^{\Sigma}_M$ le module Σ -singulier de M est
 inclu dans X donc d'après la proposition 10, X est Σ -clos.

Application à l'étude des modules dont le module Σ -singulier est nul :

Proposition 13 :

Si $0_M^\Sigma = 0$ alors la Σ -cloture dans M est une fermeture.

Puisque $0_M^\Sigma = 0$ tout sous-module X de M contient le module Σ -singulier de M donc d'après la proposition 6 : $X_M^\Sigma = X_M^{\Sigma\Sigma}$ et la Σ -cloture dans M coïncide avec la Σ -surcloture dans M . D'où le résultat d'après la proposition 7.

Remarque :

Dans le cas où $0_M^\Sigma = 0$ on sait expliciter l'ensemble des Σ -compléments de M c'est l'ensemble : $\{X_M^\Sigma, X \in \mathcal{T}_M\}$ d'après la proposition 12.

Proposition 14 :

Si Q est un Σ -injectif dont le module Σ -singulier est nul alors tout sous-module X de Q possède une unique enveloppe Σ -injective incluse dans Q à savoir sa Σ -cloture dans Q .

D'après [5] pour que Y soit enveloppe Σ -injective de X dans Q il faut et il suffit que Y soit extension Σ -essentielle maximale de X dans Q . Or la proposition 4 nous assure l'existence et l'unicité d'une telle extension Σ -essentielle maximale, c'est X_M^Σ .

Proposition 15 :

Si $0_M^\Sigma = 0$ l'intersection d'une famille quelconque de Σ -compléments est un Σ -complément.

En effet d'après la proposition 9 l'intersection d'une famille quelconque de Σ -clos est Σ -close.

Etant donné un module M , la proposition suivante montre que par passage au quotient on peut se ramener au cas où $0_M^\Sigma = 0$.

Sous-modules Σ clos...

Proposition 16

M étant un module quelconque $\frac{M}{0 \Sigma \Sigma_H}$ a son module Σ -singulier

$$\text{nul} : \begin{pmatrix} 0 \Sigma_H \\ 0 \Sigma_H \end{pmatrix} = 0$$

Soit $x' \in 0 \Sigma_H$, on a $\text{An}(x') \Delta \Sigma \Lambda$. Soit ψ la surjection

canonique : $M \longrightarrow \frac{M}{0 \Sigma_H}$. Il existe $x, x \in M, x' = \psi(x)$.

$$\text{An}(x') = \left\{ \lambda \in \Lambda \mid \lambda \psi(x) = \bar{0} \right\} = \left\{ \lambda \in \Lambda \mid \lambda x \in 0 \Sigma_H \right\} = \left[0 \Sigma_H : x \right]$$

Donc $\left[0 \Sigma_H : x \right] \Delta \Sigma \Lambda$, et $x \in 0 \Sigma_H = 0 \Sigma_H$ (proposition 7)

Finalement $x' = \psi(x) = 0$

Proposition 17 :

M étant un module quelconque il y a une bijection entre l'ensemble des Σ -compléments contenant le sous-module de Σ -torsion de $M, 0 \Sigma_H$, et l'ensemble des Σ -compléments de $\frac{M}{0 \Sigma_H}$

Soit ψ l'épimorphisme canonique : $M \longrightarrow \frac{M}{0 \Sigma_H}$.

On sait que l'application $X' \longrightarrow \psi^{-1}(X')$ de l'ensemble des sous-modules de $\frac{M}{0 \Sigma_H}$ sur l'ensemble des sous-modules de M contenant

$0 \Sigma_H$ est une bijection. Soit X' un Σ -complément de $\frac{M}{0 \Sigma_H}$;

D'après la proposition 16 et une remarque précédente X' est un Σ -clos.

Soit $x \in (\psi^{-1}(X')) \Sigma$ on a : $[\psi^{-1}(X') : x] \Delta \Sigma \Lambda$

$$[\varphi^{-1}(X') : x] = \{\lambda \mid \lambda x \in \varphi^{-1}(X')\} = \{\lambda \mid \lambda \varphi(x) \in X'\} = [X' : \varphi(x)]$$

donc $[X' : \varphi(x)] \Delta_{\Sigma} A$ et $\varphi(x) \in (X')_{\Sigma}^{\Sigma} = X'$ donc $x \in \varphi^{-1}(X')$

et $(\varphi^{-1}(X'))_{\Sigma}^{\Sigma} = \varphi^{-1}(X')$ est donc un Σ -clos donc aussi un Σ -complément contenant D_{Σ}^{Σ} (proposition 10). $0_{\Sigma}^{\Sigma} \subset \varphi^{-1}(X')$

implique $0_{\Sigma\Sigma}^{\Sigma} \subset (\varphi^{-1}(X'))_{\Sigma}^{\Sigma} = \varphi^{-1}(X')$ et $\varphi^{-1}(X')$ est un Σ -complément de M contenant le sous-module de Σ -torsion de M . Soit X

un Σ -complément de M contenant $0_{\Sigma\Sigma}^{\Sigma}$ c'est un Σ -clos (proposition 10)

Soit $\varphi(x) \in (\varphi(X))_{\Sigma}^{\Sigma}$ $[\varphi(X) : \varphi(x)] \Delta_{\Sigma} A$. Or :

$$[\varphi(X) : \varphi(x)] = \{\lambda \in A \mid \lambda \varphi(x) \in \varphi(X)\} = \{\lambda \in A \mid \lambda x \in X\} = [X : x]$$

Donc $[X : x] \Delta_{\Sigma} A$ et $x \in X_{\Sigma}^{\Sigma} = X$ donc $\varphi(x) \in \varphi(X)$ et $(\varphi(X))_{\Sigma}^{\Sigma} = \varphi(X)$

et $\varphi(X)$ est un Σ -clos dans $\frac{M}{0_{\Sigma\Sigma}^{\Sigma}}$ c'est-à-dire un Σ -complément (propositions 16 et 12).

Application aux modules sur un anneau A dont le module Σ -singulier est nul :

Proposition 18 :

Soit M un module à gauche sur l'anneau A . Si $0_{\Sigma}^{\Sigma} = 0$ alors le sous-module Σ -singulier de M coïncide avec son sous-module de Σ -torsion $0_{\Sigma\Sigma}^{\Sigma} = 0_{\Sigma}^{\Sigma}$.

On a déjà $0_{\Sigma}^{\Sigma} \subset 0_{\Sigma\Sigma}^{\Sigma}$ (extensivité de la Σ -cloture).

Soit $x \in 0_{\Sigma\Sigma}^{\Sigma}$ alors $[0_{\Sigma}^{\Sigma} : x] \Delta_{\Sigma} A$. Pour prouver que $x \in 0_{\Sigma}^{\Sigma}$, il suffit de prouver que $An(x) \Delta_{\Sigma} [0_{\Sigma}^{\Sigma} : x]$.

Soit $a \in [0_M^\Sigma : x]$ alors $ax \in 0_M^\Sigma$ donc $[0 : ax] \Delta_\Sigma A$
 et $[0 : x] : a = [0 : ax] \in \Sigma$ pour tout $a \in [0_M^\Sigma : x]$. Comme
 $[0_M^\Sigma : x] \in \Sigma$ on a $[0 : x] = An(x) \in \Sigma$. Prouvons que $An(x) \Delta$
 $[0_M^\Sigma : x]$. Soit $a \in [0_M^\Sigma : x]$ et $a \notin An(x)$.

On a $[0 : ax] \Delta_\Sigma A$ (car $ax \in 0_M^\Sigma$). Comme $ax \neq 0$ et comme $0_A^\Sigma = 0$
 on a $[0 : ax] a \neq 0$ car sinon, on aurait $An(a) \Delta_\Sigma A$ avec $a \neq 0$ ce
 qui contredirait $0_A^\Sigma = 0$. Par suite :

$(\exists \lambda \in [0 : ax]) (\lambda a \neq 0) (\lambda ax = 0)$ et $\lambda a \in An(x)$ avec $\lambda a \neq 0$
 et $An(x) \Delta [0_M^\Sigma : x]$. D'où finalement il vient : $An(x) \Delta_\Sigma [0_M^\Sigma : x]$.

Enveloppe Σ -injective d'un sous-module Σ -clos :

Proposition 19 :

Soit M un sous-module du module Q

a) Si X est Σ -clos dans Q alors sa trace sur M

$X \cap M$ est un Σ -clos dans M .

b) Si M est Σ -clos dans Q et si X est Σ -clos dans M
 alors X est Σ -clos dans Q .

$$a) (X \cap M)_M^\Sigma = (X \cap M)_Q^\Sigma \cap M = X_Q^\Sigma \cap M_Q^\Sigma \cap M = X_Q^\Sigma \cap M$$

et puisque $X_Q^\Sigma = X$ on a $(X \cap M)_M^\Sigma = X \cap M$

b) Soit $X \subset M$ et X Σ -clos dans M , alors il vient :

$$X_Q^\Sigma \subset M_Q^\Sigma = M \text{ donc } X_Q^\Sigma = X_Q^\Sigma \cap M = X_M^\Sigma = X$$

d'où le résultat.

Proposition 20 :

Soit M un module et $E(\Sigma; M)$ une enveloppe Σ -injective
 de M . a) Les Σ -clos de M sont les traces sur M des Σ -clos
 de son enveloppe Σ -injective

b) tout Σ -clos X de M possède une unique enveloppe
 Σ -injective incluse dans $E(\Sigma; M)$ à savoir sa
 Σ -cloture dans $E(\Sigma; M)$: $X_{E(\Sigma; M)}^\Sigma = E(\Sigma; X)$

a) Posons $Q = E(\Sigma; M)$ et soit X un Σ -clos de M et $E(\Sigma; X)$ une enveloppe Σ -injective quelconque de X contenue dans Q . Comme X est un Σ -complément, on a $X = E(\Sigma; X) \cap M$ (d'après [5]) on a $X = X_{M}^{\Sigma\Sigma} = X_{Q}^{\Sigma\Sigma} \cap M$; $X_{Q}^{\Sigma\Sigma}$ est un Σ -clos de Q donc X est la trace sur M d'un Σ -clos de Q . La proposition 19 nous donne alors le a)

b) Mais ici on a plus : $X \Delta_{\Sigma} E(\Sigma; X)$ implique que $E(\Sigma; X) \subset X_{Q}^{\Sigma\Sigma}$ d'après la proposition 3, donc $E(\Sigma; X) \subset X_{Q}^{\Sigma\Sigma}$.
D'après [5] les deux Σ -compléments de Q , $E(\Sigma; X)$ et $X_{Q}^{\Sigma\Sigma}$ ayant même trace sur M et étant comparables coïncident, donc :
 $E(\Sigma; X) = X_{Q}^{\Sigma\Sigma}$ d'où $E(\Sigma; X) = X_{Q}^{\Sigma\Sigma}$.

Corollaire :

Si $E(\Sigma; M)$ est une enveloppe Σ -injective de M , on a

$$E(\Sigma; 0_{M}^{\Sigma\Sigma}) = 0_{E(\Sigma; M)}^{\Sigma\Sigma}$$

Ce qui généralise Harada [3].

Il suffit de remarquer que $0_{M}^{\Sigma\Sigma}$ est Σ -clos dans M et que l'on a

$$0_{E(\Sigma; M)}^{\Sigma\Sigma} = 0_{E(\Sigma; M)}^{\Sigma\Sigma} \quad \text{d'après la proposition 7.}$$

D'où le résultat d'après la proposition précédente.

II. Σ -COMPLÉMENT RELATIF D'UN SOUS-MODULE DE M

X étant un sous-module de M , si l'ensemble des sous-modules Y de M tels que $X \oplus Y \Delta_{\Sigma} M$, n'est pas vide, alors il est inductif.

Définition :

On dit que Y est un Σ -complément relatif de X dans M si $X \oplus Y \Delta_{\Sigma} M$ et si Y est maximal pour cette propriété. On dit que Y est un Σ -complément relatif dans M si c'est le Σ -complément relatif d'un certain sous-module de M .

Remarques :

1. Si X est un sous-module quelconque de M , on n'est pas assuré de l'existence d'un Σ -complément relatif de X . Lorsque Σ est la famille de tous les idéaux de A , on retrouve la définition classique d'un complément relatif.

2. Dire que Y est Σ -complément relatif de X équivaut à dire que Y est un complément relatif de X tel que $X \oplus Y \Delta_{\Sigma} M$.

L'équivalence entre Σ -complément relatif et Σ -complément fort obtenue par l'auteur dans le cas particulier des Σ -quasi-injectifs a été étendue au cas général par G. Maury.

Proposition 21 :

Tout Σ -complément relatif d'un module est un Σ -complément fort de M (Pour la démonstration se reporter à [5]).

Lemme :

Si $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille indépendante finie de sous-modules de M , alors : $E(\Sigma; \bigoplus_{1 \leq i \leq n} X_i) = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} E(\Sigma; X_i)$ où $E(\Sigma; X_i)$ et $E(\Sigma; \bigoplus_{1 \leq i \leq n} X_i)$ désignent respectivement une enveloppe Σ -injective X_i et une enveloppe Σ -injective de $\bigoplus_{1 \leq i \leq n} X_i$ dans $E(\Sigma; M)$ une enveloppe Σ -injective de M .

Proposition 22 :

Si X est un Σ -complément fort, il admet un Σ -complément relatif au moins Y , et c'est un Σ -complément relatif de Y . Il en résulte que X est un Σ -complément fort si et seulement si c'est un Σ -complément relatif. (-Pour la démonstration, se reporter à [5]-).

Corollaire [5] :

Pour que X sous-module de M admette un Σ -complément relatif dans M il faut et il suffit que X soit Σ -essentiel dans un Σ -complément fort de M .

Proposition 23 :

Si X est un sous-module de M inclu strictement dans Y
 Σ -complément fort de M alors X est inter-réductible.
 Il en résulte qu'un sous-module inter-irréductible
 Σ -complément fort est un inter-irréductible minimal.

(Cela généralise un résultat connu sur les compléments relatifs)

Soit $X \subset Y$ avec Y Σ -complément fort dans M . Soit Z un
 Σ -complément relatif de Y . (On est maintenant assuré de l'existence
 d'un tel Σ -complément). Alors : $Y \oplus Z \Delta_{\Sigma} M$; $X \subset Y$ et $X \subset X \oplus Z$ donc :
 $X \subset Y \cap (X \oplus Z)$. Soit $y \in Y \cap (X \oplus Z)$ $y = x + z$ où $x \in X$ et $z \in Z$.
 Alors $y - x = z \in Y \cap Z = 0$ donc $y = x \in X$ et $Y \cap (X \oplus Z) \subset X$. Finalement
 $X = Y \cap (X \oplus Z)$ avec $X \not\subset Y$ et $X \not\subset X \oplus Z$. Donc X est inter-réductible.

Proposition 24 :

Soit Y un Σ -complément fort de M . Pour que $X \subset Y$ soit
 un Σ -complément fort dans M il faut et il suffit que
 ce soit un Σ -complément fort dans Y .

Supposons que X soit un Σ -complément fort dans M .

Alors on sait que X admet un Σ -complément relatif X' dans M et :
 $X \oplus X' \Delta_{\Sigma} M$. Comme $X \subset Y$ on peut choisir une enveloppe Σ -injective
 de X telle que $E(\Sigma; X) \subset E(\Sigma; Y)$. On a : $E(\Sigma; X) \oplus E(\Sigma; X') = E(\Sigma; M)$
 La somme $E(\Sigma; X) + (E(\Sigma; X') \cap E(\Sigma; Y))$ est directe. Si $y \in E(\Sigma; Y)$
 on a : $y = x + x'$ avec $x \in E(\Sigma; X)$ et $x' \in E(\Sigma; X')$.
 Alors $x' \in E(\Sigma; Y) \cap E(\Sigma; X')$ et : $E(\Sigma; Y) = E(\Sigma; X) \oplus (E(\Sigma; X') \cap E(\Sigma; Y))$
 Donc X est un Σ -complément fort dans Y .

Supposons que X soit Σ -complément fort dans Y . D'après [5]
 on sait que X est un Σ -complément dans M . X admet un Σ -complément
 relatif Z dans Y alors $X \oplus Z \Delta_{\Sigma} Y$. Y étant un Σ -complément fort dans
 M , admet un Σ -complément relatif Y' dans M et $Y = Y' \oplus Y \Delta_{\Sigma} M$. Il en
 résulte que $X \oplus (Z \oplus Y') \Delta_{\Sigma} M$. Donc X admet un Σ -complément relatif
 dans M contenant $Z \oplus Y'$. Il en résulte que X est Σ -essentiel dans
 un Σ -complément fort de M . Comme X est un Σ -complément dans M , X est
 un Σ -complément fort de M .

Proposition 25 :

Si X et Y sont 2 Σ -compléments forts de M tels que :
 $X \not\subseteq_{\neq} Y$ alors il existe X' et Y' Σ -compléments relatifs
 respectivement de X et de Y tels que $Y' \not\subseteq_{\neq} X'$

Soit $X \not\subseteq_{\neq} Y$. D'après la proposition précédente, on sait que X est aussi un Σ -complément fort dans Y donc il existe Z Σ -complément relatif de X dans Y : $Z \oplus X \Delta_{\Sigma} Y$ ($Z \neq 0$ car $X \neq Y$)
 Y admet un Σ -complément relatif Y' dans M : $Y \oplus Y' \Delta_{\Sigma} M$
 la somme $(X \oplus Z) + Y'$ est directe et on a : $X \oplus (Z \oplus Y') \Delta_{\Sigma} M$
 Alors X admet un Σ -complément relatif X' dans M tel que :
 $Z \oplus Y' \subset X'$. Puisque $Z \neq 0$ on a $\vdash Y' \not\subseteq_{\neq} X'$.

Corollaire :

La condition de chaîne ascendante pour les Σ -compléments forts de M implique la condition de chaîne descendante pour ces Σ -compléments forts.

En effet, supposons que l'on n'ait pas la condition de chaîne descendante pour les sous-modules Σ -compléments forts, alors il existerait une suite infinie de Σ -compléments forts strictement décroissante :
 $\dots X_{n+1} \subsetneq X_n \subset \dots X_2 \not\subseteq_{\neq} X_1$.

D'après la proposition précédente, on peut trouver X'_1 et X'_2

Σ -compléments forts tels que $X'_1 \not\subseteq_{\neq} X'_2$. On a $X_3 \not\subseteq_{\neq} X_2$. On peut trouver Z tel que $X_3 \oplus Z \Delta_{\Sigma} X_2$. Puisque $X_2 \oplus X'_2 \Delta_{\Sigma} M$ on a :

$X_3 \oplus (Z \oplus X'_2) \Delta_{\Sigma} M$ et on peut trouver X'_3 Σ -complément relatif de X_3 dans M (donc Σ -complément fort) tel que $Z \oplus X'_2 \subset X'_3$

donc tel que $X'_2 \not\subseteq_{\neq} X'_3$. Itérons ce raisonnement : il existe alors une chaîne strictement croissante de Σ -compléments forts

$$X'_1 \not\subseteq_{\neq} X'_2 \not\subseteq_{\neq} X'_3 \subset \dots \subset X'_n \not\subseteq_{\neq} X'_{n+1} \not\subseteq_{\neq} \dots$$

Alors on n'a pas la condition de chaîne ascendante pour les Σ -compléments forts.

III. QUELQUES RESULTATS SUR LES Σ -QUASI-INJECTIFS

Quasi-injectifs et Σ -quasi-injectifs :

Proposition 26 :

Tout Σ -clos dans un quasi-injectif M est un Σ -quasi-injectif.

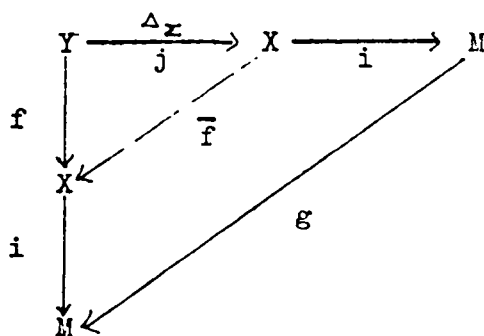
Lemme :

L'image réciproque par un endomorphisme de M d'un Σ -clos dans M est un Σ -clos dans M .

Soient X un Σ -clos dans M et $f \in \text{Hon}_A(M, M)$. Soit $Y = f^{-1}(X)$. Si on avait $Y \subsetneq Y_M^\Sigma$, il existerait $y \in Y_M^\Sigma$ et $y \notin Y$ et $x = f(y) \notin X = X_M^\Sigma$ donc $[X : x] \not\subseteq_\Sigma A$. On a $[Y : y] \subset [X : x]$ ($\lambda \in [Y : y] \implies \lambda y \in Y \implies \lambda f(y) \in X \implies \lambda \in [X : x]$) et $[Y : y] \Delta_\Sigma A$. Donc : $[X : x] \Delta_\Sigma A$ d'où la contradiction et $Y = Y_M^\Sigma$.

Démonstration de la proposition :

Soit X un Σ -clos du quasi-injectif M . Soit Y un sous-module de M Σ -essentiel dans X et soit $f \in \text{Hon}(Y, X)$. Montrons que f se prolonge en un endomorphisme de X .



Puisque M est quasi-injectif, f se prolonge en un endomorphisme g de M : et $gi = f$
 $g^{-1}(X)$ est un Σ -clos de M d'après le Lemme. On a $Y \subset g^{-1}(X)$ donc :
 $Y_M^\Sigma \subset (g^{-1}(X))_M^\Sigma = g^{-1}(X)$. Or
 $Y_M^\Sigma = X$ donc $X \subset g^{-1}(X)$ et par suite
 $g(X) \subset X$. On considère alors \bar{f} la restriction de g à X : $\bar{f} = g|_X = gi$

et on a : pour $y \in Y$ $\bar{f}(y) = g(y) = f(y)$ donc $\bar{f}j = f$.

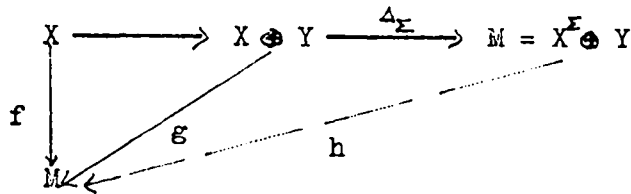
Harada a démontré [3] dans le cas où Σ est la famille de tous les idéaux de A et dans le cas des quasi-injectifs que tout Σ -clos est facteur direct d'un quasi-injectif. Dans la proposition qui suit on va voir que, dans le cas où Σ est une famille d'idéaux de Sanderson, distincte de celle formée par tous les idéaux de A, on n'a pas ce résultat.

Proposition 27 :

Si M est un Σ -quasi-injectif non quasi-injectif, dont le module Σ -singulier est nul ($O_M^\Sigma = 0$) alors il existe au moins un Σ -clos non facteur direct de M.

En effet, sinon tous les Σ -clos seraient facteurs directs de M. Soit alors X un sous-module quelconque de M. Puisque $O_M^\Sigma = 0$, X_M^Σ est un Σ -clos de M donc un facteur direct. Il existe alors $Y \in T_M$ tel que : $X_M^\Sigma \oplus Y = M$.

On a $X \Delta_\Sigma X_M^\Sigma \implies X \oplus Y \Delta_\Sigma X_M^\Sigma \oplus Y = M$



Soit $f \in \text{Hom}_A(X, M)$. Posons $g = f \circ p$ où p est le projecteur de X associé à $X \oplus Y$. g prolonge f à $X \oplus Y$.

M est Σ -quasi-injectif donc on a $g \in \text{Hom}_A(X \oplus Y, M)$ qui se prolonge en un endomorphisme h de M : $h \in \text{Hom}_A(M, M)$. Alors pour tout $x \in X$: $h(x) = g(x) = f(p(x)) = f(x)$. On a donc pu trouver $h \in \text{Hom}_A(M, M)$ prolongeant $f \in \text{Hom}_A(X, M)$. Il en résulte que M serait quasi-injectif ce qui est contradictoire. D'où la proposition.

Corollaire :

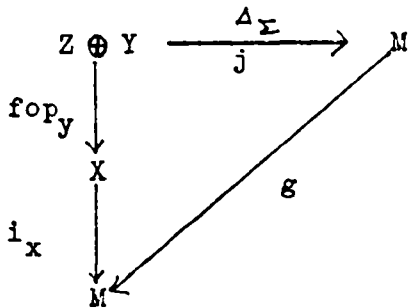
Si $O_M^\Sigma = 0$ et si M est un Σ -quasi-injectif tel que tout Σ -clos est facteur direct de M alors M est quasi-injectif.

Facteurs directs d'un Σ -quasi-injectif

Proposition 28 :

Tout facteur direct X d'un Σ -quasi-injectif M est Σ -quasi-injectif.

Soit M un Σ -quasi-injectif et X un facteur direct de M : $M = X \oplus Z$. Soit Y un sous-module de X , Σ -essentiel dans X : $Y \Delta_{\Sigma} X$ et soit $f \in \text{Hom}(Y, X)$. $Y \cap Z = 0$ par suite on peut considérer la somme directe $Y \oplus Z$ et d'après [5] puisque $Y \Delta_{\Sigma} X$ on a : $Y \oplus Z \Delta_{\Sigma} X \oplus Z = M$. Soit p_Y le projecteur de Y associé à la somme directe $Y \oplus Z$; alors $f \circ p_Y \in \text{Hom}_A(Z \oplus Y, X)$. Soit i_X l'injection canonique de X dans M .



Puisque M est Σ -quasi-injectif il existe $g \in \text{Hom}_A(M, M)$ prolongeant $i_X \circ f \circ p_Y$ alors : $g \circ j = i_X \circ f \circ p_Y$.

Soit p_X le projecteur de X associé à la somme directe $M = X \oplus Z$:

$p_X \circ g \in \text{Hom}_A(M, X)$. Posons : $h = p_X \circ g \mid X$ (restriction de $p_X \circ g$ à X).

Alors $h \in \text{Hom}(X, X)$. Montrons que h prolonge f . Soit $y \in Y$ $h(y) = p_X \circ g(y) = p_X \circ g \circ j(y) = p_X \circ i_X \circ f \circ p_Y(y) = f(y)$. Il en résulte que X est un Σ -quasi-injectif.

Corollaire :

Si M est un Σ -quasi-injectif tout Σ -complément fort X de M est un Σ -quasi-injectif.

En effet d'après [5] M étant Σ -quasi-injectif est stable par les endomorphismes de son enveloppe Σ -injective, donc en particulier M est stable par les endomorphismes idempotents de son enveloppe Σ -injective. Dans ces conditions d'après [5] tout Σ -complément fort de M est alors facteur direct de M donc Σ -quasi-injectif d'après la proposition précédente.

Proposition 29 :

Si M est un Σ -quasi-injectif alors la trace sur M de tout facteur direct X de son enveloppe Σ -injective $E(\Sigma; M)$ est un facteur direct de M et on a : $E(\Sigma; M) = X \oplus Y \implies M = (X \cap M) \oplus (Y \cap M)$.

Soit $X' = X \cap M$ et $Y' = Y \cap M$. X est facteur direct du Σ -injectif $E(\Sigma; M)$ donc c'est un Σ -injectif et par suite un Σ -complément de $E(\Sigma; M)$. Il en résulte que $X' = X \cap M$ est un Σ -complément de M . Alors $X' = E(\Sigma; X') \cap M$. Puisque X est une extension Σ -injective de X' on sait que (d'après [5]) $E(\Sigma; X')$ considéré en tant qu'extension Σ -essentielle de X' peut être plongée dans X (ce que l'on supposera). Puisque les deux Σ -compléments X et $E(\Sigma; X')$ de $E(\Sigma; M)$ sont tels que $E(\Sigma; X') \subset X$ et $X' = E(\Sigma; X') \cap M = X \cap M$ alors d'après [5] $E(\Sigma; X') = X$. On a alors $E(\Sigma; M) = E(\Sigma; X') \oplus Y$ c'est-à-dire $E(\Sigma; X')$ est facteur direct de l'enveloppe Σ -injective de M ; donc X' est un Σ -complément fort de M donc aussi un facteur direct absolu [5] et alors :

$$M = X' \oplus (Y \cap M) = (X \cap M) \oplus (Y \cap M)$$

Proposition 30 :

M étant un module quelconque, tout sous-module Σ -complément facteur direct dans M est la trace sur M d'un facteur direct d'une enveloppe Σ -injective de M .

Soit X un Σ -complément de M . Si X est facteur direct de M , on a : $M = X \oplus Y$ et d'après le Lemme de la proposition 21, il résulte : $E(\Sigma; M) = E(\Sigma; X) \oplus E(\Sigma; Y)$. Par conséquent puisque $X = E(\Sigma; X) \cap M$ X apparaît comme la trace sur M d'un facteur direct de son enveloppe Σ -injective.

Des propositions 29 et 30, il résulte immédiatement que :

Proposition 31 :

Pour qu'un sous-module Σ -complément d'un module Σ -quasi-injectif M soit un facteur direct de M , il faut et il suffit que ce soit la trace sur M d'un facteur direct d'une enveloppe Σ -injective de M .

La proposition suivante nous donne tous les facteurs directs d'un Σ -quasi-injectif.

Proposition 32 :

Si M est un Σ -quasi-injectif, l'ensemble des Σ -compléments forts (c'est aussi l'ensemble des Σ -compléments relatifs) de M coïncide avec l'ensemble des facteurs directs de M .

Si X est un Σ -complément fort de M alors $E(\Sigma; X)$ est un facteur direct de $E(\Sigma; M)$. Puisque $X = E(\Sigma; X) \cap M$ c'est que X est la trace d'un facteur direct de $E(\Sigma; M)$ sur M . Donc d'après la proposition 29 la Σ -quasi-injectivité de M implique que X est facteur direct de M .

Réciproquement, si X est facteur direct de M , il existe Y tel que : $M = X \oplus Y$ X étant un supplémentaire de Y est aussi un complément relatif de Y ($X \cap Y = 0$ et si $X \subset X'$ avec $X' \cap Y = 0$ $X' = X' \cap (X \oplus Y) = X$ car T_M est un treillis modulaire) donc en particulier X est un Σ -complément. Puisque d'après le Lemme de la proposition 21, on a : $E(\Sigma; M) = E(\Sigma; X) \oplus E(\Sigma; Y)$ ce Σ -complément est fort.

Décomposition en somme directe d'un Σ -quasi-injectif :**Proposition 33 :**

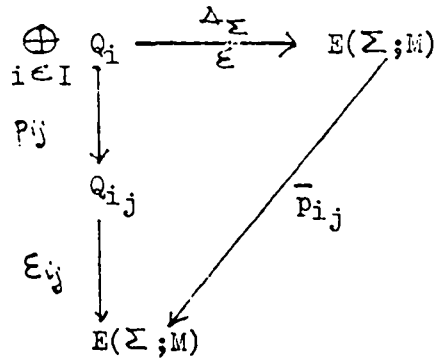
Si M est un Σ -quasi-injectif et si $(Q_i)_{i \in I}$ est une famille indépendante quelconque de sous-modules de l'enveloppe Σ -injective $E(\Sigma; M)$ de M alors :

$$\bigoplus_{i \in I} Q_i \Delta_{\Sigma} E(\Sigma; M) \implies M \cap \left(\bigoplus_{i \in I} Q_i \right) = \bigoplus_{i \in I} (M \cap Q_i)$$

On a évidemment : $\bigoplus_{i \in I} (M \cap Q_i) \subset M \cap (\bigoplus_{i \in I} Q_i)$

Soit maintenant $q \in M \cap (\bigoplus_{i \in I} Q_i)$; $q = q_{i_1} + \dots + q_{i_n}$

où $q_{i_j} \in Q_{i_j}$. Soit p_{i_j} le projecteur de Q_{i_j} dans $\bigoplus_{i \in I} Q_i$.



Puisque $E(\Sigma; M)$ est Σ -injectif, il existe $\bar{p}_{i_j} \in \text{Hom}_A(E(\Sigma; M), E(\Sigma; M))$ prolongeant p_{i_j} c'est-à-dire tel que : $\bar{p}_{i_j} \varepsilon = \varepsilon_{i_j} p_{i_j}$ où ε et ε_{i_j} sont respectivement les injections canoniques de $\bigoplus_{i \in I} Q_i$ et Q_{i_j} dans $E(\Sigma; M)$.

On a alors : $p_{i_j}(q) = \bar{p}_{i_j}(q) = q_{i_j}$

Puisque M est Σ -quasi-injectif M est stable par \bar{p}_{i_j} . Donc $q \in M \implies \bar{p}_{i_j}(q) \in M$ et finalement $q_{i_j} \in M \cap Q_{i_j}$ et $q \in \bigoplus_{1 \leq j \leq n} (Q_{i_j} \cap M)$ donc $q \in \bigoplus_{i \in I} (Q_i \cap M)$ ce qui prouve : $M \cap \bigoplus_{i \in I} Q_i \subset \bigoplus_{i \in I} (Q_i \cap M)$ d'où le résultat.

Proposition 34 :

M étant un Σ -quasi-injectif décomposable, M est la somme directe d'un Σ -complément fort et de l'un quelconque de ses Σ -compléments relatifs.

Puisque M est décomposable, M admet au moins un facteur direct X propre. D'après la proposition 32, X est un Σ -complément fort. X admet donc un Σ -complément relatif au moins d'après la proposition 22. Soit X' l'un quelconque de ses Σ -compléments relatifs. $X \oplus X' \Delta_\Sigma M$. On a $E(\Sigma; X \oplus X') = E(\Sigma; M)$. Donc d'après le Lemme de la proposition 21 : $E(\Sigma; M) = E(\Sigma; X) \oplus E(\Sigma; X')$ et d'après la proposition 33 : $M = E(\Sigma; M) \cap M = (E(\Sigma; X) \cap M) \oplus (E(\Sigma; X') \cap M)$ donc $M = X \oplus X'$ car $X = E(\Sigma; X) \cap M$ et $X' = E(\Sigma; X') \cap M$

Sous-modules Σ -compléments relatifs, Σ -équivalents, d'un module Σ -quasi-injectif :

On dit que deux sous-modules X et Y d'un module M sont Σ -équivalents si leurs enveloppes Σ -injectives $E(\Sigma; X)$ et $E(\Sigma; Y)$ sont isomorphes. On étudiera systématiquement au IV. cette relation de Σ -équivalence entre les sous-modules d'un module.

Proposition 35 :

Deux Σ -compléments relatifs du module M Σ -quasi-injectif Σ -équivalents sont isomorphes.

Soient X et Y deux Σ -compléments relatifs de M , Σ -équivalents. On sait que X est aussi un Σ -complément fort donc $E(\Sigma; X)$ est facteur direct de $E(\Sigma; M)$; soit p_X le projecteur de $E(\Sigma; X)$ associé à la décomposition : $E(\Sigma; M) = E(\Sigma; X) \oplus Z$. On a : $X = E(\Sigma; X) \cap M$. Soit φ un isomorphisme de $E(\Sigma; X)$ sur $E(\Sigma; Y)$.

$$\varphi(X) = \varphi_{\text{op}_X}(X) = \varphi_{\text{op}_X}(E(\Sigma; X) \cap M) ; \varphi_{\text{op}_X} \in \text{Hom}_A(E(\Sigma; M), E(\Sigma; M))$$

et puisque M est Σ -quasi-injectif, M est stable par φ_{op_X} donc $\varphi(X) \subset \varphi_{\text{op}_X}(M) \subset M$ or $\varphi_{\text{op}_X}(X) \subset \varphi_{\text{op}_X}(E(\Sigma; X))$ on a :

$$\varphi_{\text{op}_X}(E(\Sigma; X)) = \varphi(E(\Sigma; X)) = E(\Sigma; Y) \text{ donc : } \varphi(X) \subset M \cap E(\Sigma; Y) = Y$$

En faisant le même raisonnement avec φ^{-1} et Y on obtient $\varphi^{-1}(Y) \subset X$.
Donc la restriction de φ à X est un isomorphisme de X sur Y .

Prolongement d'un isomorphisme entre deux sous-modules Σ -essentiels d'un Σ -quasi-injectif

Le résultat suivant généralise un résultat connu pour les quasi-injectifs.

Proposition 36 :

Soit M un Σ -quasi-injectif alors tout prolongement linéaire à M d'un isomorphisme entre deux sous-modules Σ -essentiels dans M est un automorphisme de M .

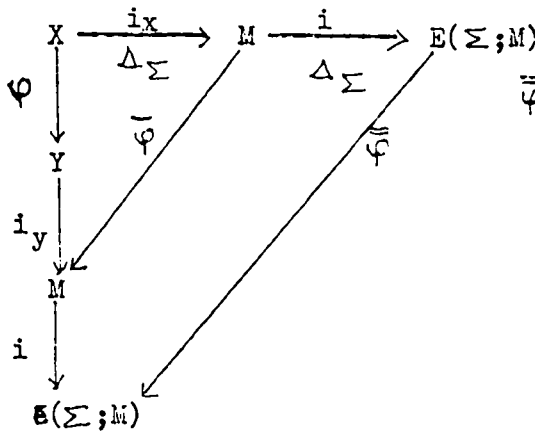
Lemme :

Si f est un homomorphisme du module M dans le module N et si la restriction de f à un sous-module Σ -essentiel de M est un monomorphisme alors f est un monomorphisme.

Soit $M' \Delta_{\Sigma} M$ on suppose que $f|_{M'}$ est un monomorphisme donc $\text{Ker} f \cap M' = 0$ et par suite $\text{Ker} f = 0$

Démonstration de la proposition :

Soient $X \Delta_{\Sigma} M$ et $Y \Delta_{\Sigma} M$ et soit φ un isomorphisme de X sur Y . Puisque M est Σ -quasi-injectif il existe un homomorphisme $\bar{\varphi}$ de M dans M et prolongeant $i_y \varphi$ (où i_y est l'injection canonique de Y dans M): $\bar{\varphi}|_X = \varphi \cdot \varphi^y$ est injective donc d'après le Lemme $\bar{\varphi}$ aussi. Puisque $E(\Sigma; M)$ est Σ -injectif, il existe $\bar{\bar{\varphi}} \in \text{Hom}_A(E(\Sigma; M), E(\Sigma; M))$



prolongeant $\bar{\varphi}$ c'est-à-dire tel que :

$\bar{\bar{\varphi}}|_M = \bar{\varphi}$ $\bar{\varphi}$ est injective donc d'après le Lemme $\bar{\bar{\varphi}}$ aussi ; on a :

$$\bar{\bar{\varphi}}(E(\Sigma; M)) \Delta_{\Sigma} E(\Sigma; M)$$

$\bar{\bar{\varphi}}(E(\Sigma; M))$ étant isomorphe à

$E(\Sigma; M)$ est Σ -injectif donc :

$$\bar{\bar{\varphi}}(E(\Sigma; M)) = E(\Sigma; M) \text{ et } \bar{\bar{\varphi}} \text{ est un}$$

automorphisme de $E(\Sigma; M)$. Soit

$(\bar{\bar{\varphi}})^{-1}$ son application réciproque.

Puisque M est Σ -quasi-injectif M

est stable par $(\bar{\bar{\varphi}})^{-1}$ et on a : $(\bar{\bar{\varphi}})^{-1}(M) \subset M$. Soit ψ la restriction de $(\bar{\bar{\varphi}})^{-1}$ à M , alors $\psi \in \text{Hom}(M, M)$. Montrons que $\bar{\bar{\varphi}} \circ \psi = 1_M$.

En effet si $m \in M$: $\bar{\bar{\varphi}} \circ \psi(m) = \bar{\bar{\varphi}} \left((\bar{\bar{\varphi}})^{-1}(m) \right) = \bar{\bar{\varphi}} \left((\bar{\bar{\varphi}})^{-1}(m) \right) = m$.

Il en résulte que $\bar{\bar{\varphi}}$ possède une section ψ donc $\bar{\bar{\varphi}}$ est surjective.

Donc $\bar{\bar{\varphi}}$ est un automorphisme de M .

IV. Σ -DIMENSION D'UN MODULE

Préliminaires :

Définition :

On dit que les sous-modules X et Y de M sont Σ -équivalents si leurs enveloppes Σ -injectives $E(\Sigma; X)$ et $E(\Sigma; Y)$ sont isomorphes.

Proposition 37 :

Pour que X et Y soient Σ -équivalents, il faut et il suffit qu'il existe un isomorphisme d'un sous-module Σ -essentiel dans X sur un sous-module Σ -essentiel dans Y .

Supposons que X et Y soient Σ -équivalents. Soit φ un isomorphisme de $E(\Sigma; X)$ sur $E(\Sigma; Y)$. Posons $Y' = \varphi(X) \cap Y$ et $X' = \varphi^{-1}(Y')$. $X \Delta_{\Sigma} E(\Sigma; X)$ implique $\varphi(X) \Delta_{\Sigma} E(\Sigma; Y)$ donc $Y' = \varphi(X) \cap Y \Delta_{\Sigma} E(\Sigma; Y)$ et par suite $Y' \Delta_{\Sigma} Y$. $Y' \Delta_{\Sigma} E(\Sigma; Y)$ entraîne $\varphi^{-1}(Y') = X' \Delta_{\Sigma} E(\Sigma; X)$ et par suite on a $X' \Delta_{\Sigma} X$. La restriction de φ à X' est un isomorphisme de X' sur Y' . Réciproquement supposons qu'il existe un isomorphisme φ' de X' sur Y' avec $X' \Delta_{\Sigma} X$ et $Y' \Delta_{\Sigma} Y$. Alors $E(\Sigma; X')$ est isomorphe à $E(\Sigma; Y')$ car φ' se prolonge en un isomorphisme de $E(\Sigma; X')$ sur $E(\Sigma; Y')$. Puisque $E(\Sigma; X) = E(\Sigma; X')$ et $E(\Sigma; Y) = E(\Sigma; Y')$ il en résulte que $E(\Sigma; X)$ est isomorphe à $E(\Sigma; Y)$ donc que X et Y sont Σ -équivalents.

Remarque : Il est clair que la Σ -équivalence est une relation d'équivalence dans T_M . On notera $X(\Sigma)Y$ pour exprimer le fait que X est Σ -équivalent à Y .

Définition :

Un sous-module X de M est dit Σ -co-irréductible si $X \neq 0$ et si X est extension Σ -essentielle de tous ses sous-modules non nuls.

Comme dans l'article de J. Fort [2] on peut définir des sommes directes maximales de Σ -co-irréductibles de M (respectivement d'une classe quelconque de Σ -équivalence H de T_M) ; en considérant $(X_i)_{i \in I}$ la famille collectivisante des modules Σ -co-irréductibles de T_M (respectivement de H) on constate que l'ensemble $\Phi(I)$ des parties J de I telles que $\sum_{i \in J} X_i$ soit directe, est inductif lorsqu'on l'ordonne par inclusion. Si J_0 est alors un élément maximal de $\Phi(I)$ on dit que la somme directe $S = \bigoplus_{i \in J_0} X_i$ est une somme directe maximale de Σ -co-irréductibles de M (respectivement de H). Si $J_0 = \emptyset$ on conviendra que $S = 0$. Pour abrégier les écritures nous poserons la définition suivante :

Définition :

H étant une classe de Σ -équivalence, nous appellerons Σ -bloc de H toute somme directe maximale de Σ -co-irréductibles de H .

Nous utiliserons dans la suite à plusieurs reprises le Lemme suivant indiqué par G. Maury.

Lemme :

Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille indépendante de sous-modules de M et si pour tout i de I , Y_i est extension Σ -essentielle de X_i dans M , la famille $(Y_i)_{i \in I}$ est indépendante et $\bigoplus_{i \in I} X_i \Delta_{\Sigma} \bigoplus_{i \in I} Y_i$.

Sous les hypothèses du Lemme le fait que $(Y_i)_{i \in I}$ soit indépendante et le fait que $\bigoplus_{i \in I} X_i \Delta_{\Sigma} \bigoplus_{i \in I} Y_i$ sont bien connus. Soit $y \in \bigoplus_{i \in I} Y_i$. On a : $y = y_{i_1} + y_{i_2} + \dots + y_{i_n}$ avec $y_{i_k} \in Y_{i_k}$ ($1 \leq k \leq n$).

De $\bigcap_{k=1}^n [X_{i_k} : y_{i_k}] \subset [\bigoplus_{i \in I} X_i : y]$ il résulte que

$[\bigoplus_{i \in I} X_i : y] \in \Sigma$ donc que $\bigoplus_{i \in I} X_i \Delta_{\Sigma} \bigoplus_{i \in I} Y_i$.

Decomposition d'une somme directe maximale de Σ -co-irréductibles de M en une somme directe de Σ -blocs.

Proposition 38 :

Si $\bigoplus_{i \in I} X_i$ est une somme directe quelconque de Σ -co-irréductibles de M et si X est un Σ -coirréductible de M tel que $X \cap \bigoplus_{i \in I} X_i \neq 0$, alors il existe une unique partie finie I_X de I telle que $X \cap \bigoplus_{i \in I_X} X_i \neq 0$ et telle que I_X soit minimale pour cette propriété. De plus les X_i pour $i \in I_X$ appartiennent à la classe de Σ -équivalence de X.

On considère la famille \mathcal{F} des parties finies J de I telles que : $X \cap \bigoplus_{i \in J} X_i \neq 0$. Montrons que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Puisque $X \cap \bigoplus_{i \in I} X_i \neq 0$ il existe $x \in X \cap \bigoplus_{i \in I} X_i$ et $x \neq 0$. On a : $x = x_{i_1} + \dots + x_{i_n}$ avec $x_{i_k} \in X_{i_k}$. Posons $J_0 = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$. On a $x \in X \cap \bigoplus_{i \in J_0} X_i$ et $x \neq 0$ donc $J_0 \in \mathcal{F}$. Si J_0 n'est pas minimale dans \mathcal{F} on peut la rendre minimale en lui enlevant un nombre fini d'indices. D'où l'existence d'au moins une partie minimale J_0 dans \mathcal{F} . Montrons l'unicité. Si J_1 et J_2 étaient deux parties minimales de \mathcal{F} on aurait $X \cap \bigoplus_{i \in J_1} X_i = X_1' \neq 0$ et $X \cap \bigoplus_{i \in J_2} X_i = X_2' \neq 0$. Puisque

X est Σ -co-irréductible on a : $X_1' \Delta_{\Sigma} X$ et $X_2' \Delta_{\Sigma} X$. Donc $X_1' \cap X_2' \Delta_{\Sigma} X$ et par suite $X_1' \cap X_2' \neq 0$ (Car sinon on aurait $X = 0$ ce qui n'est pas car X est Σ -co-irréductible). Posons :

$$J_1 = \{i_1^1, i_2^1, \dots, i_n^1\} \quad J_2 = \{i_1^2, i_2^2, \dots, i_n^2\}.$$

Montrons que $J_1 = J_2$. En effet sinon il existerait un indice appartenant à J_1 et n'appartenant pas à J_2 ; supposons que ce soit pour l'indice i_1^1 .

On a vu que $X_1' \cap X_2' \neq 0$. Soit alors $x \in X_1' \cap X_2'$ avec $x \neq 0$; on a :

$$x = x_{i_1^1} + \dots + x_{i_n^1} = x_{i_1^2} + \dots + x_{i_n^2}$$

où $x_{i_k^1} \in X_{i_k^1}$ et $x_{i_k^2} \in X_{i_k^2}$.

Puisque $i_1^1 \notin J_2$ d'après l'unicité d'une telle écriture c'est que $x_{i_1^1} = 0$. Cela contredirait la minimalité de J_1 car $x = x_{i_2^1} + \dots + x_{i_n^1} \neq 0$ appartiendrait à $X \cap \bigoplus_{i \in J_1 - \{i_1^1\}} X_i$ qui serait alors une intersection non nulle. Donc $J_1 = J_2$. Il en résulte qu'il existe une unique partie finie I_X de I minimale dans $\tilde{\mathcal{J}}$.

Pour prouver la seconde partie de la proposition considérons : $X' = X \cap \bigoplus_{i \in I_X} X_i$. Soit p_i le projecteur de X_i associé à la somme directe $\bigoplus_{i \in I} X_i$. On posera $p'_i = p_i|_{X'}$ (restriction de p_i à X') et ceci pour $i \in I_X$. Montrons que p'_i est un monomorphisme de X' dans X_i . Posons $I_X = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$. Si $x \in \text{Ker } p'_{i_k}$ on a $p'_{i_k}(x) = 0$. Or $x \in X'$ donc x donné par : $x = x_{i_1} + \dots + x_{i_n}$ $p'_{i_k}(x) = 0 = x_{i_k}$. Si $x \neq 0$ cela contredirait la minimalité de I_X . Donc $x = 0$ et p'_{i_k} est injectif et ceci pour $k = 1, 2, \dots, n$. p'_{i_k} est donc un isomorphisme d'un sous-module Σ -essentiel X' dans X sur le sous-module $p'_{i_k}(X') \Sigma$ -essentiel dans X_{i_k} donc $X(\Sigma)X_{i_k}$ et ceci pour $k = 1, 2, \dots, n$. D'où la proposition.

Proposition 39 :

Si $S = \bigoplus_{i \in I} X_i$ est une somme directe maximale de Σ -co-irréductibles de M , pour toute classe H de Σ -équivalence $S_H = \bigoplus_{i \in I_H} X_i$ où $I_H = \{i \in I | X_i \in H\}$ est un Σ -bloc de H et on a : $S = \bigoplus_H S_H$ où H parcourt l'ensemble des classes de Σ -équivalence.

Soit H une classe de Σ -équivalence. S_H est une somme directe de Σ -coirréductibles de H . Pour montrer que c'est un Σ -bloc de H il suffit de montrer que pour tout $X \Sigma$ -coirréductible de H on a $X \cap S_H \neq 0$.

Puisque S est une somme directe maximale de Σ -coirréductibles on a $S \cap X \neq 0$, donc d'après la proposition précédente, on sait qu'il existe une partie finie I_X de I minimale pour la propriété $X \cap \bigoplus_{i \in I} X_i \neq 0$; de plus on sait que pour $i \in I_X$; X_i appartient à H , H étant la classe de Σ -équivalence de X . Donc $I_X \subset I_H$ et $X \cap \bigoplus_{i \in I_X} X_i \neq 0 \implies X \cap \bigoplus_{i \in I_H} X_i \neq 0$ c'est-à-dire $X \cap S_H \neq 0$ donc S_H est une somme directe maximale de Σ -coirréductibles de H , donc c'est un Σ -bloc de H et la proposition en résulte.

Σ -blocs d'une même classe de Σ -équivalence :

Pour démontrer la proposition suivante, nous utiliserons la méthode de Miyashita [6].

Proposition 40 :

H étant une classe de Σ -équivalence, si $\bigoplus_{i \in I} X_i$ et $\bigoplus_{j \in J} Y_j$ sont deux Σ -blocs de H alors $\text{Card } I = \text{Card } J$.

1er Cas : Card I ou Card J fini :

On peut supposer $\text{Card } J \leq \text{Card } I$ alors nécessairement $\text{Card } J$ fini. Posons $J = \{1, 2, \dots, s\}$, $S = \bigoplus_{i \in I} X_i$ et pour tout $\alpha \in I$ on notera $X_\alpha^0 = \bigoplus_{i \in I - \{\alpha\}} X_i$ alors $S = X_\alpha \oplus X_\alpha^0$

a) Si $\alpha \in I$, montrons qu'il existe $\beta \in J$ tel que $Y_\beta \cap X_\alpha^0 = 0$

Raisonnons par l'absurde ; si on n'avait pas la propriété a), pour tout $j \in J$ on aurait : $Y_j \cap X_\alpha^0 \neq 0$. Posons $Y_j^1 = Y_j \cap X_\alpha^0$.

Puisque $Y_j^1 \subset Y_j$ la somme $\sum_{j \in J} Y_j^1$ est directe et puisque $Y_j^1 \subset X_\alpha^0$ on a $\bigoplus_{j \in J} Y_j^1 \subset X_\alpha^0$; il en résulte que $X_\alpha \cap \bigoplus_{j \in J} Y_j^1 = 0$ donc que

$X_\alpha + (\bigoplus_{j \in J} Y_j^1)$ est directe. Y_j^1 est un sous-module non nul du

Σ -coirréductible Y_j donc $Y_j^1 \triangleleft_{\Sigma} Y_j$ et Y_j^1 est Σ -équivalent à Y_j

donc d'après le Lemme préliminaire $X_\alpha + \bigoplus_{j \in J} Y_j$ est directe ce qui contredit le fait que $\bigoplus_{j \in J} Y_j$ est un Σ -bloc de H. En définitive pour tout $\alpha \in I$ il existe $\beta \in J$ tel que $Y_\beta \cap X_\alpha^0 = 0$. Posons alors $S_\alpha = Y_\beta \oplus (\bigoplus_{i \in I - \{\alpha\}} X_i)$. S_α est une somme directe de Σ -coirréductibles de H.

b) Montrons que S_α est un Σ -bloc de H :

Raisonnons par l'absurde ; si S_α n'était pas un Σ -bloc de H il existerait $X \in H$, Σ -co-irréductible tel que la somme $S_\alpha + X$ soit directe. On remarque tout d'abord que $S_\alpha \cap X_\alpha \neq 0$ (car si non $S_\alpha + X_\alpha$ serait directe c'est-à-dire $Y_\beta + X_\alpha + X_\alpha^0$ directe donc $Y_\beta + S$ directe ce qui contredirait le fait que S est un Σ -bloc de H). Puisque $S_\alpha \cap X_\alpha \subset X_\alpha$ on a $S_\alpha \cap X_\alpha + X_\alpha^0$ directe. Comme $(S_\alpha \cap X_\alpha) \oplus X_\alpha^0 \subset S_\alpha$ on aurait $((S_\alpha \cap X_\alpha) \oplus X_\alpha^0) + X$ directe. Comme $S_\alpha \cap X_\alpha$ est un sous-module non nul du Σ -co-irréductible X on a : $S_\alpha \cap X_\alpha \triangleleft_\Sigma X_\alpha$ donc la somme $(X_\alpha \oplus X_\alpha^0) + X$ est directe d'après le Lemme, c'est à dire, on a : $S \oplus X$; ce qui contredirait le fait que S est un Σ -bloc de H. D'où le résultat.

c) Montrons que $\text{Card } I = \text{Card } J$:

Comme $\text{Card } I \gg \text{Card } J$ on peut considérer un sous-ensemble de I formé de s éléments distincts : $\{\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_s\} \subset I$. On effectue successivement sur S, s fois l'opération précédente pour les indices $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_s$. C'est-à-dire d'après le a) et le b) on sait qu'il existe $\beta_1 \in J$ tel que $S_{\alpha_1} = Y_{\beta_1} \oplus (\bigoplus_{i \in I - \{\alpha_1\}} X_i)$ soit un Σ -bloc de H. Il existe $\beta_2 \in J$ tel que $S_{\alpha_1, \alpha_2} = Y_{\beta_2} \oplus Y_{\beta_1} \oplus (\bigoplus_{i \in I - \{\alpha_1, \alpha_2\}} X_i)$ soit un Σ -bloc de H. Et finalement on peut trouver $\beta_1, \beta_2, \beta_s$ s éléments distincts de J tels que :

$S_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s} = Y_{\beta_s} \oplus Y_{\beta_{s-1}} \oplus \dots \oplus Y_{\beta_1} \oplus (\bigoplus_{i \in I - \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}} X_i)$ soit un Σ -bloc

de H. On a $J = \{\beta_1, \dots, \beta_s\}$ donc : $S_{\alpha_1, \dots, \alpha_s} = \bigoplus_{j \in J} Y_j \oplus (\bigoplus_{i \in I - \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}} X_i)$

Puisque $\bigoplus_{j \in J} Y_j$ est un Σ -bloc de H c'est que $I - \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\} = \emptyset$ donc $I = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ et $\text{Card } I = \text{Card } J$.

2e Cas : Card I et Card J infinis :

Par hypothèse $\bigoplus_{j \in J} Y_j$ est une somme directe maximale de Σ -co-irréductibles de H. Puisque pour tout $i \in I$ X_i est un Σ -co-irréductible de H, on a : $X_i \cap \bigoplus_{j \in J} Y_j \neq 0$ et, d'après la proposition 36, il existe une partie finie minimale $J(i)$ unique de J telle que $X_i \cap \bigoplus_{j \in J(i)} Y_j \neq 0$. De même pour tout $j \in J$ il existe une unique partie finie minimale de I (que nous noterons $I(j)$) telle que : $Y_j \cap \bigoplus_{i \in I(j)} X_i \neq 0$. Pour tout $i \in I$ on a $J(i) \subset J$. Donc $\bigcup_{i \in I} J(i) \subset J$. Pour montrer que $J = \bigcup_{i \in I} J(i)$ considérons $\beta \in J$. On considère alors $I(\beta)$ défini précédemment et on pose $X'_i = X_i \cap \bigoplus_{j \in J(i)} Y_j$ pour $i \in I(\beta)$. X'_i est un sous-module non nul de X_i Σ -co-irréductible donc $X'_i \Delta_{\Sigma} X_i$.

Comme $\sum_{i \in I(\beta)} X_i$ est directe, $\sum_{i \in I(\beta)} X'_i$ est directe et d'après le Lemme, on a : $\bigoplus_{i \in I(\beta)} X'_i \Delta_{\Sigma} \bigoplus_{i \in I(\beta)} X_i$. Par définition de $I(\beta)$ on a :

$Y_{\beta} \cap \bigoplus_{i \in I(\beta)} X_i \neq 0$ donc $Y_{\beta} \cap \bigoplus_{i \in I(\beta)} X'_i \neq 0$ puisque pour $i \in I(\beta)$ on a

$X_i \subset \bigoplus_{j \in J(i)} Y_j$, on a a fortiori $Y_{\beta} \cap \bigoplus_{i \in I(\beta)} (\bigoplus_{j \in J(i)} Y_j) \neq 0$ donc

$Y_{\beta} \cap \bigoplus_{j \in \bigcup_{i \in I(\beta)} J(i)} Y_j \neq 0$. Donc nécessairement $\beta \in \bigcup_{i \in I(\beta)} J(i)$. Donc a fortiori

$\beta \in \bigcup_{i \in I} J(i)$. Il en résulte que $J = \bigcup_{i \in I} J(i)$ où $J(i) \neq \emptyset$ et fini.

On a finalement ; Card I = Card J (I et J jouant le même rôle).

Σ -dimension d'un module :

La proposition suivante généralise un résultat de Fort [2].

Proposition 41 :

M étant un A-module quelconque, si $\bigoplus_{i \in I} X_i$ et $\bigoplus_{j \in J} Y_j$ sont deux sommes directes maximales de Σ -co-irréductibles de M, il existe une bijection σ de I sur J (alors Card I = Card J) et un isomorphisme φ de $\bigoplus_{i \in I} E(\Sigma; X_i)$ sur $\bigoplus_{j \in J} E(\Sigma; Y_j)$ tel que $\varphi(E(\Sigma; X_i)) = E(\Sigma; Y_{\sigma(i)})$

D'après la proposition 39, on sait que l'on peut écrire

$$\bigoplus_{i \in I} X_i = \bigoplus_H \left(\bigoplus_{i \in I_H} X_i \right) ; \quad \bigoplus_{j \in J} Y_j = \bigoplus_H \left(\bigoplus_{j \in J_H} Y_j \right)$$
où $I_H = \{i \in I \mid X_i \in H\}$ et $J_H = \{j \in J \mid Y_j \in H\}$ et où H parcourt l'ensemble des classes de Σ -équivalence. On a vu dans cette proposition $\bigoplus_{i \in I_H} X_i$ et $\bigoplus_{j \in J_H} Y_j$ étaient deux Σ -blocs de H.

Donc d'après la proposition précédente $\text{Card } I_H = \text{Card } J_H$. Il existe donc une bijection σ_H de I_H sur J_H que l'on peut prolonger en une bijection de I sur J.

Donc $\text{Card } I = \text{Card } J$ et pour tout $i \in I$ on a : $X_i(\Sigma) \cong Y_{\sigma(i)}$ donc $E(\Sigma; X_i)$ est isomorphe à $E(\Sigma; Y_{\sigma(i)})$.

Soit φ_i un tel isomorphisme. Alors $\varphi = \bigoplus_{i \in I} \varphi_i$ est un isomorphisme de $\bigoplus_{i \in I} E(\Sigma; X_i)$ sur $\bigoplus_{j \in J} E(\Sigma; Y_j)$ tel que

$$\varphi(E(\Sigma; X_i)) = E(\Sigma; Y_{\sigma(i)})$$

Définition :

On appelle Σ -dimension d'un module M quelconque sur l'anneau A le cardinal d'une famille indépendante maximale de Σ -coirréductibles de M. On vient de voir que ce cardinal ne dépend pas du choix d'une telle famille maximale.

Application aux modules Σ -quasi-injectifs

Définition :

On dira que M est un module riche en Σ -coirréductibles s'il existe une somme directe de Σ -coirréductibles Σ -essentielle dans M.

Proposition 42 :

Si M est un Σ -quasi-injectif riche en Σ -coirréductibles et de Σ -dimension finie n, alors M est décomposable en une somme directe de n Σ -compléments forts Σ -coirréductibles et si on a deux telles décompositions $M = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} X_i$ et $M = \bigoplus_{1 \leq j \leq n} Y_j$ on a $n = n$ et il existe une permutation σ de $[1, n]$ et un automorphisme φ de M tel que pour tout $i \in [1, n]$ on ait $\varphi(X_i) = Y_{\sigma(i)}$

Puisque M est riche en Σ -coirréductibles on peut trouver une somme directe de Σ -coirréductibles qui est Σ -essentielle dans M soit : $\bigoplus_{i \in I} X'_i \Delta_{\Sigma} M$. Cette somme directe de Σ -coirréductibles est maximale donc $\text{Card } I = n$. On peut supposer que $I = [1, n]$. On pose alors $X_i = E(\Sigma; X'_i) \cap M$. On a $X'_i \Delta_{\Sigma} X_i$ donc $\bigoplus_{1 \leq i \leq n} X_i$ est une somme directe de Σ -compléments Σ -coirréductibles et telle que

$$\bigoplus_{1 \leq i \leq n} X_i \Delta_{\Sigma} M.$$

Alors $E(\Sigma; \bigoplus_{1 \leq i \leq n} X_i) = E(\Sigma; M) = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} E(\Sigma; X_i)$ (D'après le lemme de la proposition 21). Puisque M est Σ -quasi-injectif d'après la proposition 33, on a : $M \cap \bigoplus_{1 \leq i \leq n} E(\Sigma; X_i) = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} (M \cap E(\Sigma; X_i))$

$$\text{donc } M = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} X_i \quad \text{car } X_i = M \cap E(\Sigma; X_i) \\ (X_i \text{ est un } \Sigma\text{-complément de } M)$$

Par ailleurs X_i est un Σ -complément fort de M et puisque X'_i est Σ -coirréductible il en résulte que X_i est Σ -coirréductible. Si on a une autre telle décomposition de M : $M = \bigoplus_{1 \leq j \leq n} Y_j$ d'après la proposition 41 on sait que $n = n$ et qu'il existe une bijection σ de $[1, n]$ sur $[1, n]$ telle que X_i soit Σ -équivalent à $Y_{\sigma(i)}$.

Comme X_i et $Y_{\sigma(i)}$ sont deux Σ -compléments relatifs d'un quasi-injectif d'après la proposition 35 ils sont isomorphes.

Soit alors φ_i un tel isomorphisme $\varphi = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \varphi_i$ est alors un automorphisme de M tel que :

$$\varphi(X_i) = Y_{\sigma(i)}.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Azunaya : "Corrections and supplementaries to my paper concerning Krull - Renak - Schmidt's Theorem".
- [2] J. Fort : "Sommes directes de sous-modules co-irréductibles d'un module". Séminaire Dubreil - Pisot. 20e année 1966/67 n° 3.
- [3] Harada : "Note on quasi injective modules". Osaka J. Math. 2 (1965) 351-356.
- [4] Johnson and Wong : "Quasi-injective modules and irreducible rings". Journal London Math. Soc. 36 (1961) 260-268.
- [5] G. Maury : " Σ -compléments". Pub. Dép. Fac. Sciences Lyon ce fascicule 1968 pages 1 à 25.
- [6] Miyashita : "On quasi-injective modules". Hokkaido University (1965) pages 158-187.
- [7] Sanderson : "A generalisation of dursibility and injectivity in Modules". Can. Math. Bul. vol 8 1965 p 505-513.
- [8] Wong : "Atomic quasi injective modules". J. Math Kyoto University 3-3 (1964) 295-303.
-