

G. PETOLLA

Approximation d'un problème variationnel non linéaire

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1967, tome 4, fascicule 3
, p. 69-90

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1967__4_3_69_0>

© Université de Lyon, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPROXIMATION D'UN PROBLEME VARIATIONNEL NON LINEAIRE

G. PETOLLA

Introduction.

Ce travail a fait l'objet d'un rapport de recherche de D.E.A., effectué sous la direction de J.P. AUBIN, et soutenu en juin 1967 à Lyon.

HARTMAN ET STAMPACCHIA ont donné les conditions d'existence et d'unicité du problème variationnel non linéaire qui est défini au § 1. AUBIN, dans [2] a construit une théorie générale de l'approximation des espaces de distributions et des opérateurs différentiels. Il s'est agit d'appliquer les résultats de cette théorie au problème de HARTMAN-STAMPACCHIA, afin de dégager une méthode d'approximation théorique : le § 3 traite le cas général, et donne deux théorèmes de convergence. Le § 2 rappelle certaines définitions, et les § 4 et 5 sont consacrés à des cas particuliers importants.

Les notations et la terminologie sont celles de [1].

Table des matières.§ 1- Définition des problèmes (P) et (P_h) .

1-1 Données générales

1-2 Théorème d'existence

§ 2- Notion d'approximations

2-1 Approximation d'un espace de Banach

2-2 Approximation duale

§ 3- Cas général

3-1 Théorème de convergence forte.

3-2 Théorème de convergence faible.

§ 4- Schéma aux restrictions

4-1 Définition

4-2 Théorème d'approximation

§ 5- Schéma aux approximations partielles.

5-1 Problème (P)

5-2 Approximations partielles

5-3 Définition du schéma

5-4 Théorème d'approximation

§ 1 - Définition des problèmes (P) et (P_h).1-1 Notions générales.

Dans toute la suite, h sera un paramètre réel, destiné à tendre vers zéro.

Nous désignerons par :

- V, V_h des espaces de Banach réflexifs, dont les normes seront respectivement $||\cdot||$ et $||\cdot||_h$;
- K, K_h des convexes fermés de V, V_h ;
- $a(u, v)$ [resp. $a_h(u_h, v_h)$] une forme définie sur $V \times V$ [resp. $V_h \times V_h$], linéaire et continue en v [resp. v_h]
- V', V'_h , les duals respectifs de V, V_h ;

Les produits scalaires qui les mettent en dualité seront respectivement

(\dots) et $(\dots)_h$; et les normes duales $||\cdot||_*$ et $||\cdot||_{*h}$.

Soient aussi :

- f, f_h un élément donné de V', V'_h ;
- $\sigma(u, v) = a(u, u-v) - a(v, u-v)$
- $\sigma_h(u_h, v_h) = a_h(u_h, u_h - v_h) - a_h(v_h, u_h - v_h)$

Nous désignons également par :

- A l'opérateur de V dans V' défini par :

$$(Au, v) = a(u, v) ; \quad \forall v \in V ;$$

- A_h l'opérateur de V_h dans V'_h défini par :

$$(A_h u_h, v_h)_h = a_h(u_h, v_h) ; \quad \forall v_h \in V_h ;$$

1-2 Problèmes (P) et (P_h)

Nous appellerons (P) le problème :

" Trouver u dans K vérifiant : $a(u, u-v) \leq (f, u-v) ; \forall v \in K$ " Et (P_h) le problème :

" Trouver u_h dans K_h vérifiant : $a_h(u_h, u_h - v_h) \leq (f_h, u_h - v_h)_h ; \forall v_h \in K_h$ ".

Le théorème suivant, démontré par HARTMAN et STAMPACCHIA [2], donne des conditions suffisantes pour que (P) admette des solutions.

T-1. Théorème d'existence. Sous les hypothèses suivantes :

$$(1-2) \left\{ \begin{array}{l} A \text{ est borné et } \lim_{\lambda \rightarrow 0} a(u - \lambda w, v) = a(u, v) ; \forall u, v, w \in V. \\ \text{i) } \sigma(u, v) > 0, \forall u, v \in K - [\text{monotonie}]. \\ \text{ii) } \exists \phi_0 \in K \text{ tel que } \|u - \phi_0\| \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{\sigma(u, \phi_0)}{\|u - \phi_0\|} \rightarrow +\infty, \\ \forall u \in K - [\text{coercivité}]. \end{array} \right.$$

Le problème (P) admet au moins une solution.

Remarques :

1) Ce théorème, énoncé pour le problème (P) est valable aussi pour le problème (P_h) , avec les hypothèses correspondantes.

2) Si on suppose $\sigma(u, v) > 0$, la solution est unique.

3) Si K est borné, l'hypothèse (1-2) ii est inutile.

4) Si K est un cône, on vérifie immédiatement que le problème (P) est équivalent à trouver u dans K tel que :

$$\begin{cases} a(u, v) \leq (f, v) ; \forall v \in K \\ a(u, u) = (f, u) \end{cases}$$

Jusqu'à maintenant, les problèmes (P) et (P_h) sont identiques, à la notation près. Nous allons les différencier, en disant que (P_h) est une "approximation", au sens ci-dessous, de (P).

§ 2 - Notion d'approximations.

Pour des compléments concernant ce paragraphe, on peut voir AUBIN [1].

2-1 Approximation d'un espace de Banach.

Définitions : * D.1. On appelle approximation d'un espace de Banach V la donnée :

- d'espaces de Banach V_h
- des applications : $P_h \in L(V_h, V) ; r_h \in L(V, V_h)$; appelées respectivement prolongements et restrictions. On note $A_h(V) = \{V, V_h, P_h, r_h\}$ une approximation.

D.2. Stabilité.

D'après D.1., nous avons :

$$\begin{aligned} \|P_h u_h\| &\leq M(h) \|u_h\|_h \\ \|r_h u\|_h &\leq m(h) \|u\| \end{aligned}$$

Nous dirons que les prolongements (resp. restrictions) sont stables

si $\sup_{h>0} M(h)$ (resp. $\sup_{h>0} m(h)$) existe.

L'approximation sera stable si les prolongements et les restrictions le sont.

(* . Il n'est pas nécessaire que r_h soit linéaire. Dans ce cas

$A_h(V)$ est dite semi-linéaire.)

D.3. L'approximation sera convergente si $\|u - p_h r_h u\|$ tend vers 0 avec h , pour tout u de V .

D.4. Une suite $(u_h)_h$ sera discrètement convergente vers u si

$\|u_h - r_h u\|_h$ tend vers 0 avec h .

La même suite convergera vers u (ou sera fortement convergente)

si $\|u - p_h u_h\|$ tend vers 0 avec h .

Elle sera stable si $\|u_h\|_h \leq c$;

Elle sera bornée si $\|p_h u_h\| \leq c$;

où c est une constante indépendante de h .

P.1 Proposition : Si p_h est stable et si $A_h(V)$ est convergente, alors la convergence discrète implique la convergence forte.

En effet :

$$\begin{aligned} \|u - p_h u_h\| &\leq \|u - p_h r_h u\| + \|p_h r_h u - p_h u_h\| \\ &\leq \|u - p_h r_h u\| + M \|u_h - r_h u\|_h \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2-2 Approximation duale.

Soit $A_h(V) = \{V, V_h, p_h, r_h\}$ une approximation.

Désignons par r_h^* le transposé de p_h , p_h^* le transposé de r_h . Alors

$A_h^*(V') = \{V', V'_h, p_h^*, r_h^*\}$ est une approximation du dual V' de V , que l'on appelle approximation duale de $A_h(V)$.

Dans la suite, nous utiliserons la :

P.2 Proposition : L'approximation duale d'approximation stable (resp : convergente) est stable (resp : faiblement convergente).

En effet, nous avons :

$$\|p_h\|_{L(V'_h, V')} = \|r_h\|_{L(V, V_h)}$$

$$\|r_h^*\|_{L(V', V'_h)} = \|p_h\|_{L(V_h, V)}$$

D'où la première partie de la proposition.

De plus, si B est borné dans V' et si $f \in B$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{f \in B} |(p_h^* r_h^* f - f, u)| \leq \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{f \in B} \|f\|_* \|p_h r_h u - u\|$$

D'où la convergence faible de $p_h^* r_h^* f$ vers f , uniformément sur tout borné.

§ 3 - Cas général : Théorèmes de convergence .

Nous nous plaçons dans le cas général défini au § 1. Nous allons démontrer deux théorèmes qui diffèrent par la seule nature des hypothèses de monotonie.

T-2. Théorème de convergence forte.

Sous les hypothèses suivantes :

$$(3-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i)} \quad A \text{ est borné et } \lim_{\lambda \rightarrow 0} a(u - \lambda w, v) = a(u, v) ; \forall u, v, w \in V. \\ \text{ii)} \quad \sigma(u, v) > 0 ; \forall u \neq v \in K. \\ \text{iii)} \quad \exists \phi_0 \in K \text{ tel que } \|u\| \rightarrow +\infty \implies \frac{\sigma(u; \phi_0)}{\|u - \phi_0\|} \rightarrow +\infty, \forall u \in K. \end{array} \right.$$

$$(3-2) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } A_h \text{ est globalement borné en } h : \|u_h\|_h \leq cte \Rightarrow \|A_h u_h\|_h \leq cte \\ \text{et } \lim_{\lambda=0} a_h(u_h - \lambda w_h, v_h) = a_h(u_h, v_h) ; \forall u_h, v_h, w_h \in V_h. \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ (ind. de } h) \text{ tel que } \forall u_h, v_h \in K_h \text{ vérifiant} \\ \|u_h - v_h\|_h \geq \varepsilon, \text{ alors } \sigma_h(u_h, v_h) \geq \eta \\ \text{iii) } \exists \phi_{0h} \in K_h \text{ tel que } \|\phi_{0h}\|_h < cte \text{ et si } \|u_h - \phi_{0h}\|_h \rightarrow +\infty \\ \text{alors } \frac{\sigma(u_h, \phi_{0h})}{\|u_h - \phi_{0h}\|_h} \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

$$(3-3) \left\{ \begin{array}{l} r_h K \subset K_h \text{ et } p_h K_h \subset K \end{array} \right.$$

$$(3-4) \left\{ \begin{array}{l} A_h(V) = \{V, V_h, p_h, r_h\} \text{ est une approximation stable et} \\ \text{convergente.} \end{array} \right.$$

$$(3-5) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \lim_{h=0} \psi_u(h) = 0 \text{ où } \psi_u(h) = \sup_{v_h} \frac{|a(u, p_h v_h) - a_h(r_h u, v_h)|}{\|v_h\|_h} \\ \text{ii) } \lim_{h=0} \varepsilon(f, f_h) = 0 \text{ où } \varepsilon_h(f, f_h) = \sup_{v_h} \frac{|(f, p_h v_h) - (f_h, v_h)_h|}{\|v_h\|_h} \end{array} \right.$$

La solution u_h du problème (P_h) converge vers la solution u du problème (P) , lorsque h tend vers 0.

L'existence et l'unicité des solutions résultent des hypothèses (3-1) et (3-2) d'après le théorème de Hartman-Stampacchia.

Puisque ici p_h est stable, et $A_h(V)$ est convergente, il suffit, d'après P1 de démontrer la convergence discrète. Nous utiliserons pour cela deux lemmes.

L1 - Majoration de l'erreur discrète.

Si nous désignons par u_h (resp. u) la solution du problème (P_h) (resp. (P)), les hypothèses (3-3) et (3-5) entraient que :

$$(3-6) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_h(u_h, r_h u) \leq \left[\psi_u(h) + \varepsilon(f, f_h) \right] \cdot \|u_h - r_h u\|_h \\ + \|f - Au\|_* \|u - p_h r_h u\|. \end{array} \right.$$

En effet, par définition de σ_h :

$$\sigma_h(u_h, r_h u) = a_h(u_h, u_h - r_h u) - a_h(r_h u, u_h - r_h u)$$

Par définition de u_h , et en ajoutant un terme nul :

$$\begin{aligned} \sigma_h(u_h, r_h u) &\leq (f_h, u_h - r_h u)_h - a_h(r_h u, u_h - r_h u) \\ &\quad + a(u, p_h(u_h - r_h u)) - a(u, p_h(u_h - r_h u)) \end{aligned}$$

Par définition de $\psi_u(h)$, et en ajoutant zéro :

$$\begin{aligned} \sigma_h(u_h, r_h u) &\leq (f_h, u_h - r_h u)_h + \psi_u(h) \|u_h - r_h u\|_h - a(u, p_h(u_h - r_h u)) \\ &\quad + a(u, u - p_h u_h) - a(u, u - p_h u_h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_h(u_h, r_h u) &\leq \psi_u(h) \|u_h - r_h u\|_h - a(u, u - p_h r_h u) \\ &\quad + (f_h, u_h - r_h u)_h + a(u, u - p_h u_h) \end{aligned}$$

Par définition de u , et en ajoutant zéro :

$$\begin{aligned} \sigma_h(u_h, r_h u) &\leq \psi_u(h) \|u_h - r_h u\|_h - a(u, u - p_h r_h u) \\ &\quad + (f_h, u_h - r_h u)_h + (f, u - p_h u_h) \\ &\quad + (f, p_h(u_h - r_h u)) - (f, p_h(u_h - r_h u)) \end{aligned}$$

Par définition de $\varepsilon(f, f_h)$:

$$\begin{aligned} \sigma_h(u_h, r_h u) &\leq \left[\psi_u(h) + \varepsilon(f, f_h) \right] \|u_h - r_h u\|_h \\ &\quad + (f - Au, u - p_h r_h u) \end{aligned}$$

Enfin, par définition du produit scalaire mettant en dualité V et V' :

$$(f - Au, u - p_h r_h u) \leq \|f - Au\|_{X'} \|u - p_h r_h u\|$$

D'où l'on déduit la majoration (3-6).

Pour pouvoir terminer la démonstration du théorème, il suffit de montrer que $(u_h - r_h u)_h$ est stable, donc que $(u_h)_h$ est stable car

$$\|u_h - r_h u\|_h \leq \|u_h\|_h + m \|u\|.$$

Nous utiliserons pour cela le lemme :

L2 - Stabilité de u_h .

L'hypothèse de coercivité globale (3-2) iii entraîne que si $(f_h)_h$ est stable, alors $(u_h)_h$ l'est aussi.

En effet nous avons :

$$\sigma_h(u_h, \phi_{0h}) = a_h(u_h, u_h - \phi_{0h}) - a_h(\phi_{0h}, u_h - \phi_{0h})$$

donc, par définition de u_h et de A_h :

$$\sigma_h(u_h, \phi_{0h}) \leq (f_h - A_h \phi_{0h}, u_h - \phi_{0h})_h \leq \|f_h - A_h \phi_{0h}\|_{*h} \|u_h - \phi_{0h}\|_h$$

D'où :

$$\frac{\sigma_h(u_h, \phi_{0h})}{\|u_h - \phi_{0h}\|_h} \leq \|f_h\|_{*h} + \|A_h \phi_{0h}\|_h \leq \text{cte.}$$

$$\text{car } \|\phi_{0h}\|_h \leq \text{cte} \Rightarrow \|A_h \phi_{0h}\|_h \leq \text{cte}$$

$$\text{et } \|f_h\|_{*h} \leq \text{cte par hypothèse.}$$

La coercivité globale entraîne alors que $\|u_h - \phi_{0h}\|_h \leq \text{cte}$ donc que

$(u_h)_h$ est stable car ϕ_{0h} l'est.

Démonstration du théorème.

La stabilité de $(f_h)_h$ découle de l'inégalité :

$$\|f_h\|_{*h} = \|f_h - r_h^* f + r_h^* f\|_{*h} \leq \|f_h - r_h^* f\|_{*h} + \|r_h^* f\|_{*h}$$

$$\text{car } \|f_h - r_h^* f\|_{*h} \text{ tend vers 0 d'après (3-5) ii}$$

$$\text{et } r_h^* \text{ est stable [cf. P2].}$$

Alors le lemme L2 implique que u_h est stable, donc aussi

$$\|u_h - r_h u\|_h \leq \|u_h\|_h + m \|u\| \leq \text{cte} \quad . \text{ La majoration de L1}$$

entraîne alors que $\sigma_h(u_h, r_h u)$ tend vers 0 avec h d'après (3-6), donc que

$\|u_h - r_h u\|_h$ tend vers 0 d'après (3-2)ii. La convergence forte est alors une conséquence de P1.

Il est clair que la convergence est obtenue grâce à l'hypothèse (3-2)ii.

Si on se contente d'une hypothèse de monotonie, suffisante pour l'existence des solutions, alors on peut démontrer la convergence faible, au sens ci-dessous.

T-3. Théorème de convergence faible.

Si dans T2, on remplace les hypothèses :

$$\sigma(u,v) > 0 \text{ par } \sigma(u,v) \geq 0 ; \forall u, v \in K$$

$$(3-2) \text{ ii. par } \sigma_h(u_h, v_h) \geq 0 ; \forall u_h, v_h \in K_h$$

Alors il existe une sous-suite extraite de $(p_h u_h)_h$ qui converge faiblement vers une solution u du problème (P).

L'existence de solutions u_h (resp. u) au problème (P) [(resp. (P_h)] est assurée par le théorème de Hartman-Stampacchia.

D'après L2, u_h est stable, donc aussi bornée car p_h est stable ; c'est-à-dire qu'il existe une constante c indépendante de h telle que $\|p_h u_h\| \leq c$. Il existe donc une sous-suite $(p_k u_k)_k$ qui converge faiblement vers un élément u^* de K , car K est convexe et fermé, donc aussi faiblement fermé. Montrons que u^* est une solution du problème (P).

L3 - Lemme.

Si il existe une sous-suite $(p_k u_k)_k$ de $(p_h u_h)_h$ qui converge faiblement vers u^* dans K et si de plus:

$$i) \lim_{\lambda \rightarrow 0} a(u - \lambda w, v) = a(u, v) ; \forall u, v, w \in V.$$

$$ii) \lim_{h \rightarrow 0} \psi_u(h) = 0 \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(f, f_h) = 0$$

Alors u^* est une solution du problème (P).

Soit v un élément quelconque de K . Alors :

$$\begin{aligned} 0 \leq \sigma_h(u_h, r_h v) &= a_h(u_h, u_h - r_h v) - a_h(r_h v, u_h - r_h v) \\ &\leq (f_h, u_h - r_h v)_h - (f, p_h(u_h - r_h v)) \\ &\quad + a(v, p_h(u_h - r_h v)) - a_h(r_h v, u_h - r_h v) \\ &\quad + (f, p_h u_h - p_h r_h v) - a(v, p_h u_h - p_h r_h v) \end{aligned}$$

En se limitant à la sous-suite $(p_k u_k)_k$, et en passant à la limite faible :

$$(3-7) \quad 0 \leq (f, u^* - v) - a(v, u^* - v) ; \quad \forall v \in K.$$

On utilise alors le procédé de MINTY : quel que soit l'élément w de K , $v = u^* + \lambda(w - u^*) = \lambda w + (1 - \lambda)u^*$ appartient au convexe K , si $0 \leq \lambda < 1$. En portant v dans (3-7), il vient :

$$\lambda a(u^* - \lambda(w - u^*), u^* - w) \leq \lambda (f, u^* - w) ; \quad \forall w \in K.$$

En divisant par λ , puis en faisant tendre λ vers 0 :

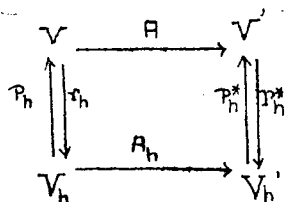
$$a(u^*, u^* - w) \leq (f, u^* - w) ; \quad \forall w \in K.$$

Ce qui montre que u^* est une solution de (P).

Si on avait supposé $\sigma(u, v)$ et $\sigma_h(u_h, v_h)$ strictement positifs, alors (P) admettrait une solution unique qui serait u^* , et toutes les sous-suites convergentes extraites $(p_h u_h)_h$ convergeraient vers u^* , donc toute la suite $(p_h u_h)_h$ convergerait faiblement vers la solution du problème.

§ 4 - Cas particulier du schéma aux restrictions.

4-1 Définition du schéma aux restrictions.



On appelle schéma aux restrictions le cas où l'opérateur A étant donné, on définit A_h par $A_h = r_h^* \circ A \circ p_h$

Dans ce cas, suivant la nature des hypothèses faites sur A et sur $A_h(V)$ on pourra obtenir la convergence forte ou faible des solutions du problème approché.

Dans tout ce paragraphe, nous nous placerons dans les conditions suivantes :

- (4-1) $\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } V_h \text{ est de dimension finie, pour tout } h \text{ fixé.} \\ \text{ii) } p_h \text{ est injectif.} \\ \text{iii) } ||u_h||_h = ||p_h u_h|| \text{ définit la norme dans } V_h \end{array} \right.$

$$(4-2) \begin{cases} \text{i) } a_h(u_h, v_h) = a(p_h u_h, p_h v_h) \\ \text{ii) } f_h = r_h^* f \text{ (i.e. } \epsilon(f, f_h) = 0) \end{cases}$$

$$(4-3) \begin{cases} \text{i) } A_h(V) \text{ est une approximation stable et convergente} \\ \text{ii) } p_h K_h \subset K \text{ et } r_h K \subset K_h \end{cases}$$

Comme précédemment, nous appellerons u_h une solution du problème (p_h) lorsqu'elle existe, et u une solution du problème (p) .

4-2 Le théorème d'approximation.

Nous obtiendrons la convergence, en divers sens suivant que l'on utilisera l'une des hypothèses suivantes :

$$(4-5) \sigma(u, v) \geq 0, \forall u, v \in K.$$

$$(4-6) \sigma(u, v) > 0, \forall u, v \in K; (u \neq v).$$

$$(4-7) \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \|u - v\| \geq \epsilon \Rightarrow \sigma(u, v) \geq \eta$$

T-4. Théorème d'approximation.

Dans les conditions définies par (4-1), (4-2), (4-3), si on suppose de plus que :

$$(4-4) \begin{cases} \text{i) } A \text{ est borné et } \lim a(u - \lambda w, v) = a(u, v); \forall u, v, w \in V. \\ \text{ii) } \exists \phi_0 \in K \text{ tel que, si } u \in K, \|u - p_h r_h \phi_0\| \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\text{implique } \frac{\sigma(u, p_h r_h \phi_0)}{\|u - p_h r_h \phi_0\|} \rightarrow +\infty$$

Alors :

(4-5) implique : il existe une solution u^* au problème (P) , qui est limite faible d'une sous-suite de $(p_h u_h)_h$

(4-6) implique : il existe une solution unique u^* au problème (p) , qui est limite faible de toute la suite $(p_h u_h)_h$.

(4-7) implique : il existe une solution unique au problème (p) , qui est limite forte de $(p_h u_h)_h$, et qui vérifie :

$$\sigma(u, p_h u_h) \leq \|f - A(p_h u_h)\|_* \|u - p_h r_h u\|$$

Remarquons d'abord que le problème (p) admet des solutions, car si ϕ_0 est dans K, il en est de même de $p_h r_h \phi_0$.

L4 - Lemme.

L'hypothèse (4-4) implique :

i) A_h est globalement borné en h ;

$$(4-8) \quad \lim_{\lambda=0} a_h(u_h - \lambda w_h, v_h) = a_h(u_h, v_h) ; \quad \forall u_h, v_h, w_h \in V_h.$$

ii) $\exists \phi_{0h} \in K_h$ tel que $\|\phi_{0h}\|_h \leq c h^2$ et $\|u_h - \phi_{0h}\|_h$ tend vers l'infini entraîne $\frac{\sigma_h(u_h, \phi_{0h})}{\|u_h - \phi_{0h}\|_h} \rightarrow +\infty$

De plus :

(4-5) implique : $\sigma_h(u_h, v_h) \geq 0$; $\forall u_h, v_h \in K_h$.

(4-6) implique : $\sigma_h(u_h, v_h) > 0$; $\forall u_h \neq v_h \in K_h$.

(4-7) implique : $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, indépendant de h, tel que

$$\|u_h - v_h\|_h > \epsilon \Rightarrow \sigma_h(u_h, v_h) > \eta.$$

- La deuxième partie du lemme est évidente.

- On vérifie également :

$$\lim_{\lambda=0} a_h(u_h - \lambda w_h, v_h) = \lim_{\lambda=0} a(p_h u_h - \lambda p_h w_h, p_h v_h) = a(p_h u_h, p_h v_h) = a_h(u_h, v_h)$$

. Montrons que A_h est globalement borné en h :

Supposons que $\|u_h\|_h \leq L$; L indépendant de h.

Autrement dit $\|p_h u_h\| \leq L$, donc il existe une constante indépendante de h, R telle que $\|A(p_h u_h)\|_* \leq R$ ceci d'après (4-4) i.

Par définition de la norme duale :

$$\sup_{v \in V} \frac{a(p_h u_h, v)}{\|v\|} \leq R$$

En particulier, pour $v = p_h v_h$:

$$\sup_{v_h \in V_h} \frac{a(p_h u_h, p_h v_h)}{\|p_h v_h\|} \leq R$$

Or :

$$\sup_{v_h \in V_h} \frac{a(p_h u_h, p_h v_h)}{\|p_h v_h\|} = \sup_{v_h \in V_h} \frac{a_h(u_h, v_h)}{\|v_h\|_h} = \|A_h u_h\|_{X_h} \leq R$$

Ce qui prouve notre assertion.

Montrons (4-8) ii.

Il suffit pour cela de prendre $\phi_{o_h} = r_h \phi_o$. Nous obtenons alors la stabilité : $\|\phi_{o_h}\|_h = \|p_h r_h \phi_o\| \leq M.m. \|\phi_o\|$

ainsi que la coercivité globale :

si $\|u_h - \phi_{o_h}\|_h$ tend vers l'infini, c'est-à-dire si $\|p_h u_h - p_h r_h \phi_o\|$ tend vers l'infini, alors

$$\frac{\sigma(p_h u_h, p_h r_h \phi_o)}{\|p_h u_h - p_h r_h \phi_o\|} = \frac{\sigma_h(u_h, \phi_{o_h})}{\|u_h - \phi_{o_h}\|_h}$$

tend aussi vers l'infini.

Ce lemme prouve que nous sommes dans les conditions du théorème de Hartmann-Stampacchia pour le problème (p_h) . L'unicité est assurée si l'une des hypothèses (4-6) ou (4-7) est vérifiée.

Démonstration de T-4.

Par définition : $f_h = r_h^* f$, d'où la stabilité de $(f_h)_h$ et par conséquent celle de $(u_h)_h$ [cf. L2]. Donc $\|p_h u_h\| \leq cte$. Or K étant convexe et fermé, il est aussi faiblement fermé ; on peut donc extraire une sous-suite $(p_k u_k)_k$ faiblement convergente vers un élément u^* de K .

Montrons que u^* est solution de (p) .

Soit v un élément quelconque de K ; nous avons :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sigma(p_k u_k, v) = a(p_k u_k, p_k u_k - v) - a(v, p_k u_k - v) \\ &= a(p_k u_k, p_k u_k - p_k r_k v) + a(p_k u_k, p_k r_k v - v) - a(v, p_k u_k - v) \\ &\leq (f; p_k u_k - p_k r_k v) - a(v, p_k u_k - v) + a(p_k u_k, p_k r_k v - v) \end{aligned}$$

Le dernier terme tend vers 0 car $\|p_k r_k v - v\|$ tend vers 0 et $\|A(p_k u_k)\|$ est borné. En passant à la limite :

$$(4-9) \quad 0 \leq (f, u^* - v) - a(v, u^* - v), \quad \forall v \in K$$

D'après L3 [procédé de MINTY], u^* est donc solution du problème (p).

Si l'on fait l'hypothèse (4-6) [à fortiori (4-7)], la solution de (p) est unique, donc [cf. L3] toute la suite $(p_h u_h)_h$ converge faiblement vers u . Nous avons dans ce cas la majoration de l'erreur :

$$\begin{aligned} \sigma(u, p_h u_h) &= a(u, u - p_h u_h) - a(p_h u_h, u - p_h u_h) \\ &\quad + a(p_h u_h, p_h u_h - p_h r_h u) - a(p_h u_h, p_h u_h - p_h r_h u) \\ &\leq (f, u - p_h u_h) + (f, p_h u_h - p_h r_h u) - a(p_h u_h, u - p_h r_h u) \\ &\leq (f - A(p_h u_h), u - p_h r_h u) \end{aligned}$$

D'où la majoration annoncée :

$$\sigma(u, p_h u_h) \leq \|f - A(p_h u_h)\|_X \|u - p_h r_h u\|$$

On en déduit que $\sigma(u, p_h u_h)$ tend vers 0 avec h . Si nous sommes dans les conditions de (4-7), alors $\|u - p_h u_h\|$ tend vers 0, ce qui achève la démonstration du théorème.

§ 5 - Cas des approximations partielles.

5-1 Le problème (p).

Considérons un nombre fini d'espaces de Banach réflexifs $V_i (i=1, \dots, n)$, tous contenus dans un même espace V_0 . La norme de V_i est notée $\|\cdot\|_i$.

Nous prenons pour V un sous-espace vectoriel fermé de l'intersection des V_i , muni de la norme :

$$\|u\| = \left(\sum_{i=1}^n \|u\|_i^\alpha \right)^{1/\alpha}, \quad \text{où } 1 < \alpha < +\infty.$$

V est alors un espace de Banach réflexif.

Considérons également les formes $a_j(\vec{u}, v_j)$, définies sur $(\prod_{i=1}^n V_i) \times V_j$ linéaires et continues en v_j ($j=1$ à n), où $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \prod_{i=1}^n V_i$

Nous définissons alors une forme $a(u, v)$ sur $V \times V$, linéaire et continue en v par :

$$a(u, v) = \sum_{j=1}^n a_j(\vec{u}, v) \quad \text{où } \vec{u} = (u, u, \dots, u) \in V^n \subset \prod_{i=1}^n V_i$$

$$\text{et } v \in V \subset V_j$$

Soit f un élément de V' . Alors il existe au moins une décomposition $f = \sum_{i=1}^n f_i$, où $f_i \in V_i'$. Dans tout ce qui suit, nous supposons la décomposition choisie une fois pour toutes.

Etant donné un convexe fermé K de V , le problème (p) est de trouver un élément u de K vérifiant :

$$\underline{a(u, uv) \leq (f, u-v), \forall v \in K.}$$

5-2 Notion d'approximations partielles. (cf. AUBIN [1])

Soit V_h un espace de Banach réflexif, supposé de dimension finie.

Nous considérons les approximations $A_h(V_i) = (V_i, V_h, p_h^i, r_h)$, où $r_h \in L(V_0, V_h)$ et $p_h^i \in L(V_h, V_i)$.

Définitions.

D5 - Nous dirons que $A_h(V_i)$ sont des approximations partielles

de V si : i) $\|u_h\|_h = \left(\sum_{i=1}^n \|p_h^i u_h\|_i^\alpha \right)^{1/\alpha}$ est une norme de V

ii) si $p_h^i u_h$ converge faiblement vers u_i dans V_i ,

pour tout i , alors il existe $u^* = u_i, \forall i$,

$u^* \in V$.

D6 - Des approximations partielles sont stables, si r_h l'est.

D7 - Des approximations partielles sont convergentes si :

$\left(\sum_{i=1}^n \|u - p_h^i r_h u\|_i^\alpha \right)^{1/\alpha}$ tend vers 0 avec h , pour tout u dans V .

P3 - Proposition : Si $\|u_h\|_h \leq cte$, il existe un élément u^* de V , et il existe une sous-suite de $(p_h^i u_h)_h$ qui converge faiblement vers u_i dans V_i , pour tout i .

Démonstration :

$\|u_h\|_h = \left(\sum_{i=1}^n \|p_h^i u_h\|_i^\alpha \right)^{1/\alpha} \leq cte \Rightarrow \|p_h^i u_h\|_i \leq cte$ dans V_i . Donc il existe une sous-suite convergeant faiblement vers u_i dans V_i , pour tout i ; donc aussi $u_i = u^* \in V$, d'après D5.

Notation : $\vec{p}_h u_h = (p_h^1 u_h, p_h^2 u_h, \dots, p_h^n u_h) \in \prod_{i=1}^n V_i$

5-3 Définition du schéma aux approximations partielles.

Nous définissons $a_h(u_h, v_h)$ et f_h par :

$$(5-1) \quad \begin{cases} \text{i) } a_h(u_h, v_h) = \sum_j a_j(\vec{p}_h u_h, p_h^j v_h) ; u_h, v_h \in V_h. \\ \text{ii) } (f_h, v_h)_h = \sum_j (f_j, p_h^j v_h)_j ; v_h \in V_h ; f = \sum_j f_j. \end{cases}$$

Et nous supposons que :

$$(5-2) \quad \begin{cases} \text{i) } r_h K \subset K_h, \text{ où } K_h \text{ est un convexe fermé de } V_h. \\ \text{ii) Si } u_h \in K_h \text{ et si } p_h^j u_h \text{ converge faiblement vers } u_i \text{ dans } V_i, \text{ pour tout } i, \text{ alors il existe } u^* \in K \text{ tel que } u^* = u_i, \text{ pour tout } i. \end{cases}$$

Le problème (p_h) est alors :

Trouver u_h dans K_h vérifiant :

$$\sum_{j=1}^n a_j(\vec{p}_h u_h, p_h^j u_h - p_h^j v_h) \leq \sum_{j=1}^n (f_j, p_h^j u_h - p_h^j v_h)_j$$

pour tout v_h de K_h .

5-4 Le théorème d'approximation.

Nous allons démontrer :

- 1) un lemme d'existence de solutions au problème (p_h) .
- 2) un théorème qui assure la convergence, en différents sens, des solutions de (p_h) vers une solution de (p) .

Nous aurons besoin des hypothèses suivantes :

$$(5-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \left(\sum_i \|u_i\|_i^\alpha \right)^{1/\alpha} < \text{cte} \Rightarrow \sup_{\vec{v} \in \Pi V_1} \frac{\sum_{j=1}^n |a_j(\vec{u}, v_j)|}{\left(\sum_{j=1}^n \|v_j\|_j^\alpha \right)^{1/\alpha}} < \text{cte} \\ \text{pour tout } \vec{u}, \vec{v} \in \Pi V_1. \\ \text{ii) } \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n a_j(\vec{u} - \lambda \vec{w}, v_j) = \sum_{j=1}^n a_j(\vec{u}, v_j) ; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \Pi V_1. \end{array} \right.$$

$$(5-4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists \phi_0 \in K \text{ tel que si } \left(\sum_j \|u - p_h^j r_h \phi_0\|_j^\alpha \right)^{1/\alpha} \rightarrow +\infty, \text{ alors} \\ \frac{\sum_j \sigma_j(\vec{u}, p_h^j r_h \phi_0)}{\left(\sum_j \|u - p_h^j r_h \phi_0\|_j^\alpha \right)^{1/\alpha}} \text{ tend vers l'infini.} \end{array} \right.$$

Ainsi que de l'une des hypothèses suivantes :

$$(5-5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_j \sigma_j(\vec{u}, \vec{v}) \geq 0 ; \text{ pour } u, v \in V ; \vec{u}, \vec{v} \in \Pi V_1. \end{array} \right.$$

$$(5-6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_j \sigma_j(\vec{u}, \vec{v}) > 0 ; \text{ pour } u \neq v \in V. \end{array} \right.$$

$$(5-7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists n > 0 \text{ tel que si } \left(\sum_j \|u - v\|_j^\alpha \right)^{1/\alpha} > \epsilon, \text{ alors} \\ \sum_j \sigma_j(\vec{u}, \vec{v}) \geq n ; \text{ pour } u, v \in K. \end{array} \right.$$

On a noté : $\vec{u} = (u, u, \dots, u)$ et \vec{v} de même.

$$\sigma_j(\vec{u}, \vec{v}) = a_j(\vec{u}, u_j - v_j) - a_j(\vec{v}, u_j - v_j)$$

L5 - Lemme.

Dans les conditions définies par D5, D6, D7 et (5-1), (5-2) :

(5-3) i) implique : A_h est globalement borné en h .

(5-3) ii) implique : $\lim_{\lambda \rightarrow 0} a_h(u_h - \lambda w_h, v_h) = a_h(u_h, v_h) ; u_h, v_h, w_h \in V_h$.

(5-4) implique : $\left\{ \begin{array}{l} \exists \phi_0 \in K_h \text{ tel que } \|\phi_0\|_h < \text{cte} \text{ et si} \\ \|\|u_h - \phi_0\|_h \rightarrow +\infty, \text{ alors } \frac{\sigma_h(u_h, v_h)}{\|\|u_h - \phi_0\|_h} \rightarrow +\infty. \end{array} \right.$

(5-5) implique : $\sigma_h(u_h, v_h) \geq 0$ pour $u_h, v_h \in V_h$.

(5-6) implique : $\sigma_h(u_h, v_h) > 0$ pour $u_h \neq v_h \in V_h$.

(5-7) implique : $\forall \epsilon > 0, \exists \eta$ indépendant de h et > 0 tel que si

$$\|u_h - v_h\|_h \geq \epsilon, \text{ alors } \sigma_h(u_h, v_h) \geq \eta.$$

Dans ces conditions, nous sommes assurés de l'existence de solutions au problème (p_h) , et de l'unicité si (5-6) ou (5-7) est vraie, d'après le théorème de Hartman-Stampacchia.

Nous ne donnerons que la démonstration de la première et la troisième implication, le reste du lemme étant évident d'après les définitions de $\|u_h\|_h$ et de $\sigma_h(u_h, v_h)$.

1) A_h est globalement borné en h .

Rappelons que, par définition :

$$(A_h u_h, v_h)_h = a_h(u_h, v_h) = \sum_j a_j(p_h^{\rightarrow} u_h, p_h^j v_h); \quad v_h \in V_h.$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$(A_h u_h, v_h)_h = \sum_j (A_j(p_h^{\rightarrow} u_h), p_h^j v_h)_j; \quad \text{où } A_j(p_h^{\rightarrow} u_h) \in V_j'.$$

Supposons que $\|u_h\|_h = \left(\sum \|p_h^j u_h\|_j^\alpha \right)^{1/\alpha} \leq \text{cte}$. Alors :

$$\|A_h u_h\|_{V_h'} = \sup_{v_h} \frac{|a_h(u_h, v_h)|}{\|v_h\|_h} = \sup_{v_h} \frac{|\sum a_j(p_h^{\rightarrow} u_h, p_h^j v_h)|}{\|v_h\|_h}$$

$$\|A_h v_h\|_{V_h'} \leq \sup_{v_h} \frac{|a_j(p_h^{\rightarrow} u_h, p_h^j v_h)|}{\|v_h\|_h} \leq \sup_{v \in \mathcal{P} V_j} \frac{\sum |a_j(p_h^{\rightarrow} u_h, v_j)|}{\left(\sum \|v_j\|_j^\alpha \right)^{1/\alpha}} \leq \text{cte}$$

car l'ensemble $\{p_h^j v_h | v_h \in V_h\}$ est inclus dans V_j , [et en tenant compte de (5-3) i)]

2) Supposons (5-4) vraie et prenons $\phi_{o_h} = r_h \phi_o \in K_h$.

Alors $\|\phi_{o_h}\|_h$ est bornée, d'après D7. [$u = \phi_o$].

D'autre part si $\|u_h - \phi_{o_h}\|_h$ tend vers l'infini, alors, d'après (5-4) :

$$\frac{\sigma_h(u_h, \phi_{0h})}{\|u_h - \phi_{0h}\|_h} = \frac{\sum_j \sigma_j(\vec{p}_h^j u_h, \vec{p}_h^j r_h \phi_{0h})}{\left(\sum_j \|p_h^j u_h - p_h^j r_h \phi_{0h}\|_j^\alpha\right)^{1/\alpha}} \quad \text{tend vers l'infini.}$$

La troisième implication du lemme est donc démontrée.

T-5 . Théorème :

Si nous appelons u_h une solution du problème (p_h) , et si les hypothèses (5-1) à (5-4) sont vérifiées :

(5-5) implique : il existe une solution u^* au problème (p) , limite faible dans V_1 d'une sous-suite de $(p_h^i u_h)_h$, pour tout i .

(5-6) implique : Cette solution est unique, et toute la suite $(p_h^i u_h)$ converge faiblement vers elle, pour tout i .

(5-7) implique : la convergence a lieu au sens fort :

$$\left(\sum_j \|p_h^j u_h - u\|_j^\alpha\right)^{1/\alpha} \text{ tend vers } 0 \text{ avec } h.$$

La démonstration est analogue dans son principe à celle de T-4 : on démontre d'abord la stabilité de $(u_h)_h$ d'où l'existence d'une sous-suite c convergente, le point limite étant solution de (p) .

Démonstration.

1) u_h est stable.

Par définition :

$$\begin{aligned} \sum_j \sigma_j(\vec{p}_h^j u_h, \vec{p}_h^j r_h \phi_{0h}) &\leq \sum_j (f_j, p_h^j u_h - p_h^j r_h \phi_{0h})_j - \sum_j a_j(\vec{p}_h^j r_h \phi_{0h}, p_h^j u_h - p_h^j r_h \phi_{0h}) \\ \sum_j \sigma_j(\vec{p}_h^j u_h, \vec{p}_h^j r_h \phi_{0h}) &\leq \sum_j \|f_j - A_j(\vec{p}_h^j r_h \phi_{0h})\|_{V_j} \|p_h^j u_h - p_h^j r_h \phi_{0h}\|_j \end{aligned}$$

Si l'on tient compte de :

$$\|p_h^j u_h - p_h^j r_h \phi_{0h}\|_j \leq \left(\sum \|p_h^j u_h - p_h^j r_h \phi_{0h}\|_j^\alpha\right)^{1/\alpha}$$

Il vient :

$$\frac{\sum_j \sigma_j(\vec{p}_h^j u_h, \vec{p}_h^j r_h \phi_0)}{\left(\sum_j \|p_h^j u_h - p_h^j r_h \phi_0\|_j^\alpha\right)^{1/\alpha}} \leq \sum_j \|f_j - A(\vec{p}_h^j r_h \phi_0)\|_{V_j} \leq \text{cte}$$

Et donc, d'après (5-4) :

$$\left(\sum_j \|p_h^j u_h - p_h^j r_h \phi_0\|_j^\alpha\right)^{1/\alpha} \leq \text{cte}$$

$$\text{Or : } \left(\sum_j \|p_h^j r_h \phi_0\|_j^\alpha\right)^{1/\alpha} \leq \text{cte d'où } \left(\sum_j \|p_h^j u_h\|_j^\alpha\right)^{1/\alpha} \leq \text{cte}$$

Ce qui entraîne $\|p_h^j u_h\|_j \leq \text{cte}$ pour tout j . En particulier (u_h) est stable, sinon $\left(\sum_j \|p_h^j u_h\|_j^\alpha\right)^{1/\alpha}$ tendrait vers l'infini.

Il existe donc [d'après P3] un élément u^* de V qui est limite faible dans V_i d'une sous-suite $(p_{k k}^i u_k)$ de $(p_h^i u_h)$ pour tout i . On peut même affirmer que $u^* \in K$, d'après (5-2) ii).

2) Montrons que u est solution du problème (p).

Soit $v \in K$ quelconque. Nous pouvons écrire :

$$0 \leq \sum_j \sigma_j(\vec{p}_h^j u_h, \vec{v}) = \sum_j a_j(\vec{p}_h^j u_h, p_h^j u_h - p_h^j r_h v) + \sum_j a_j(\vec{p}_h^j u_h, \vec{p}_h^j r_h v - v) - \sum_j a_j(\vec{v}, p_h^j u_h - v).$$

$$0 \leq \sum_j \sigma_j(\vec{p}_h^j u_h, \vec{v}) \leq \sum_j (f_j, p_h^j u_h - p_h^j r_h v)_j - \sum_j a_j(\vec{v}, p_h^j u_h - v) + \sum_j a_j(\vec{p}_h^j u_h, \vec{p}_h^j r_h v - v)$$

Si nous passons à la limite, pour la sous-suite $(p_{k k}^i u_k)$:

$$0 \leq \sum_j (f_j, u^* - v)_j - \sum_j a_j(\vec{v}, u^* - v)$$

c'est-à-dire :

$$a(v, u^* - v) \leq (f, u^* - v)$$

Le procédé de MINTY [cf. L3] permet de conclure que u est une solution de (p).

Si (5-6) est vraie, la solution u^* est unique, donc toute sous-suite convergente extraite de $(p_h^j u_h)_h$ converge vers u^* , c'est-à-dire, que toute la suite $(p_h^j u_h)_h$ converge faiblement vers u^* , pour tout j.

Si (5-7) est vraie, il y a toujours unicité et convergence faible. De plus :

$$\begin{aligned} \sum_j \sigma_j(\vec{p}_h u_h, \vec{u}^*) &\leq \sum_j (f_j, p_h^j u_h - p_h^j r_h u^*)_j \\ &\quad - \sum a_j(\vec{u}^*, p_h^j u_h - u^*) \\ &\quad + \sum a_j(\vec{p}_h u_h, p_h^j r_h u^* - u^*) \end{aligned}$$

Donc $\sum_j \sigma_j(\vec{p}_h u_h, u^*)$ tend vers 0 avec h, et donc $\left(\sum_j \|p_h^j u_h - u^*\|_j^\alpha\right)^{1/\alpha}$ tend vers 0 avec h. Ce qui signifie la convergence "forte" des solutions $(u_h)_h$ vers la solution u^* de (p).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AUBIN J.P. : Approximation des espaces de distributions et des opérateurs différentiels.
(Mémoire n° 12 de la S.M.F. - 1967)
- [2] HARTMAN-STAMPACCHIA : On non-linear elliptic differential-functional equations. (à paraître).
-