

ROLAND FRAISSE

**La classe universelle : une notion à la limite de la logique
et de la théorie des relations**

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1967, tome 4, fascicule 3
, p. 55-61

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1967__4_3_55_0>

© Université de Lyon, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA CLASSE UNIVERSELLE : UNE NOTION A LA LIMITE
DE LA LOGIQUE ET DE LA THEORIE DES RELATIONS

Roland FRAISSE

La classe universelle a été introduite par A. Tarski (Universal arithmetical classes of mathematical systems, Bull. Amer. Math. Soc. t. 59 p. 390-391) et R. Vaught (Remarks on universal arithmetical classes, ibidem p. 391).

La définition logique est : classe des relations d'arité donnée, vérifient une formule liée ne comportant, sous sa forme préfixe, que des quantificateurs universels. Notant A une classe universelle et passant à la classe complémentaire A' pour l'arité considéré - on voit qu'une relation n -aire R appartient à A' si et seulement s'il existe une suite d'éléments a_1, a_2, \dots, a_p (p étant le nombre de quantificateurs universels) tels que $(R, a_1, a_2, \dots, a_p)$ vérifie une certaine formule libre U . On transforme U en considérant tous les cas possibles concernant les égalités et les inégalités entre a_1, a_2, \dots, a_p et dans chaque cas tous les sous-cas définis par les valeurs $+$ ou $-$ prises par R pour chaque n -uplet extrait de a_1, a_2, \dots, a_p . Après transformation de U , on obtient un nombre fini de relations n -aires U_1, U_2, \dots, U_h sur $1, 2, \dots$ ou p éléments, avec R appartient à A' si et seulement si $R \not\supseteq U_1, R \not\supseteq U_2, \dots$ ou $R \not\supseteq U_h$.

Il en résulte qu'une classe A de relations n -aires (ou de multirelations d'arité donnée) est universelle lorsqu'il existe un nombre fini de relations n -aires finies U_1, U_2, \dots, U_h telles que $R \in A$ si et seulement si $R \text{ non } \supseteq U_1, \text{ non } \supseteq U_2, \dots, \text{ non } \supseteq U_h$ (cf. R. FRAISSE 1957, Obtention en théorie des relations de certaines classes d'origine logique. Proc. Intern. Congr. Math. Amsterdam 1954, p. 537-538).

On peut supprimer les U_i pour lesquelles il existe une $U_j \leq U_i$; il reste alors seulement les U_i pour lesquelles $U_i \in A$ mais toute restriction stricte de U_i appartient à A , on les appellera les bornes de la classe A . On voit qu'un ensemble de relations U_i définit A si et seulement s'il comprend les bornes.

Exemples. La classe vide (borne = relation de base vide) ; la classe pleine (aucune borne) ; la classe des relations binaires réflexives (une borne : la relation U sur un seul élément a telle que $U(a,a) = -$) ; la classe des relations de cardinaux $\leq p$ (bornes : toutes les relations de cardinal $p+1$).

L'intersection de deux classes universelles est universelle : prendre la réunion des ensembles de bornes.

La réunion de deux classes universelles est universelle.

Noter que, pour U, V finies, la condition $R \geq U$ et $R \geq V$ équivaut à $R \geq U$ ou ... ou $R \geq U_h$, où les U_1, \dots, U_h sont toutes les relations supérieures à la fois à U et V et de cardinaux au plus égal à (cardinal de U + cardinal de V).

Une classe universelle est close pour \leq , autrement dit si A est universelle $R \in A$ et $S \leq R$ alors $S \in A$. Il en résulte que les seules classes qui sont universelles et dont la complémentaire est universelle, sont les classes vides et pleines.

Une classe universelle est close pour l'équivalence $R \sim R'$ lorsque R et R' ont les mêmes restrictions finies. Il en résulte que la classe des bons ordres par exemple, bien que close pour \leq , n'est pas universelle.

1. Pour que A soit universelle, il faut et il suffit qu'il existe un entier p tel que :

$R \in A$ si et seulement si toute restriction de R à $0, 1, 2, \dots, p$ éléments (avec ses isomorphes) appartient à A (voir R. Vaught 1953, loc. cit.).

Preuve. Soit A universelle : si $R \in A$, alors toute restriction de R appartient à A ; a fortiori toute restriction à $1, 2, \dots, p$ éléments, pour un entier p donné. D'autre part appelons p le maximum des cardinaux de bornes U_1, \dots, U_h de A . Si toute restriction de R à $1, 2, \dots, p$ éléments appartient à A , alors une telle restriction est non $\succ U_1, \dots, \text{non} \succ U_h$ donc aussi R est non $\succ U_1, \dots, \text{non} \succ U_h$ donc $R \in A$.

Inversement soit A une classe vérifiant la condition de l'énoncé, et soit U_1, \dots, U_h les relations de cardinaux $\leq p$ et qui n'appartiennent pas à A . Alors $R \in A$ si et seulement si toute restriction de R à $0, 1, 2, \dots, p$ éléments est distincte de U_1, \dots, U_h .

Autrement dit si et seulement si R est non $\succ U_1, \dots, \text{non} \succ U_h$: donc A est universelle.

1.1. Soit U une relation finie ; alors la classe des relations inférieures à U est universelle.

Preuve. Appelons V_1, \dots, V_h les bornes de U , c'est-à-dire les relations non $\leq U$ mais dont les restrictions strictes sont $\leq U$: elles sont de cardinal au plus égal à $p+1$, donc en nombre fini, et d'autre part $R \leq U$ équivaut à R non $\succ V_1$ et ... et non $\succ V_h$.

Par conséquent : pour tout ensemble fini de relations finies U_1, \dots, U_h , la classe des $\leq U_1$ ou ... ou $\leq U_h$ est universelle.

Ou encore : toute classe d'un nombre fini (à l'isomorphie près) de relations finies, close pour \leq , est universelle.

1.2. Si une classe universelle comprend des relations finies de cardinaux arbitrairement grands, alors elle comprend des relations infinies.

Preuve . Prendre une suite dénombrable R_1 de cardinal $1, \dots, R_i$ de cardinal i, \dots appartenant à la classe, considérer chaque R_i comme défini sur les entiers $1, 2, \dots, i$. Pour une infinité de valeurs i , les relations R_i ont la même restriction S_1 au seul 1 . Parmi cette infinité, une autre infinité de R_i ont la même restriction S_2 à l'ensemble $\{1, 2\}$ etc... On définit S_i et on prend l'extension commune des S_i sur l'ensemble des entiers.

1.3. Compacité. Si une intersection de classes universelles est vide, alors pour un nombre fini d'entre elles l'intersection est vide.

Preuve. Prenons pour chaque classe l'ensemble des bornes et soit U_1, \dots, U_i, \dots une suite de toutes les bornes des différentes classes. Une relation R appartient à l'intersection si et seulement si R n'est supérieure à aucune U_i . Or si aucune intersection finie n'est vide, il existe R_1 non $\geq U_1$, puis R_2 non $\geq U_1$ et non $\geq U_2, \dots, R_i$ non $\geq U_1$ et ... et non $\geq U_i$. On définit R_i sur tout ou partie de l'ensemble $\{1, 2, \dots, i\}$ puis une relation S admettant une infinité d'extensions parmi les R_i , de sorte que S non $\geq U_i$ pour chaque i donc S appartient à l'intersection des classes.

2. Etant donné une classe A et un entier a , appelons A' la classe A diminuée de ses relations de cardinaux $\leq a$ puis Aa la classe A' augmentée des restrictions, de cardinaux $\leq a$, des relations de A' (autrement dit Aa est A' complétée par cloture pour \leq).

2.1. Si A est universelle, alors Aa est universelle.

Preuve. On a évidemment $Aa \subseteq A$ et les relations appartenant à $A - Aa$ sont de cardinaux $\leq a$ donc en nombre fini (à l'isomorphie près), soit U_1, \dots, U_h . De plus toute relation \geq une U_i ($i = 1, \dots, h$) est hors de A . Donc $R \notin Aa$ équivaut à $R \notin A$ ou $R \geq U_1$ ou ... ou $R \geq U_h$. Enfin $R \in Aa$ équivaut à $R \in A$ et $R \not\geq U_1$ et ... et $R \not\geq U_h$: donc Aa est l'intersection de A et de la classe universelle définie par U_1, \dots, U_h , donc Aa est universelle.

2.2 Etant donné une classe universelle A et un entier a , toute classe close pour \leq et qui se confond avec A pour les relations de cardinaux $\geq a$, est universelle.

En effet la classe considérée est la réunion de Aa , qui est universelle, et d'un ensemble de relations finies, clos pour \leq , donc formant une classe universelle.

2.3. Etant donné un entier p , la classe des relations d'arité donnée et p -monomorphes est universelle. (Rappelons qu'une relation est dite p -nomorphe lorsque toutes ses restrictions à p éléments sont isomorphes (p entier positif)).

Preuve. Pour que R soit p -monomorphe, il suffit que toute restriction de R à $p+1$ éléments soit p -monomorphe : car de proche en proche, en changeant un élément chaque fois, on transforme tout p -ensemble en tout autre p -ensemble. Prenons la suite, finie à l'isomorphie près, des relations n -aires de cardinal $p+1$ et p -monomorphes, et la suite U_1, \dots, U_h des autres relations n -aires de cardinal $p+1$. Alors la condition " R est p -monomorphe" équivaut à $R \not\leq U_1$ et ... et $\not\leq U_h$.

3. Utilisant la technique des chaînes permutées, développée par C. Frasaay (1965: quelques problèmes combinatoires concernant les ordres totaux et les relations monomorphes. Annales de l'Inst. Fourier - Grenoble t. 15 n° 2 p. 415-524) on déduit de ce qui précède deux résultats importants dûs à M. JEAN (1967 : sur la classe universelle des relations monomorphes, compte rendu., sous presse):

- La classe des relations monomorphes (i.e. p -monomorphes pour tout entier p), d'arité donnée est universelle.
- La classe des relations enchainables (i.e interprétables par une chaîne (ordre total)) au moyen d'une formule libre, est universelle.

4. Une classe est dite Σ -universelle lorsqu'elle est une intersection quelconque, donc finie au dénombrable, de classes universelles.

- Pour que A soit Σ -universelle, il faut et il suffit :

1) qu'il existe un nombre fini ou dénombrable de relations n-aires

finies U_1, \dots, U_i, \dots telles que $R \in A$ si et seulement si $R \text{ non } \supset U_i$ pour chaque U_i (prenant pour les U_i les cycles de i éléments, on voit qu'il existe des classes Σ -universelles qui ne sont pas universelles) ;

2) que $R \in A$ si et seulement si toute restriction fini de R appartient à A (voir Tarski 1953, loc. cit.).

Du point de vue logique, une classe Σ -universelle est définie par un ensemble fini ou dénombrable de formules prénexes ne comprenant que des quantificateurs universels.

5. Le problème de l'extension respectueuse est étroitement lié aux classes universelles.

Etant donné la relation finie U et la relation $R \text{ non } \supset U$, il existe une extension de R , de cardinal aussi grand que l'on veut, qui reste $\text{non } \supset U$. Dans le cas binaire, compléter R en R' par un élément a avec : $R'(a,x) = R''(x,a) = R'(a,a) = +$ pour tout x , puis en R'' avec : $R''(a,x) = R''(x,a) = R''(a,a) = -$. Alors, si R' et $R'' \supset U$, c'est que U comprend un élément a donnant avec tout autre la valeur $+$, et un élément b donnant avec tout autre la valeur $-$: contradiction en considérant $U(a,b)$.

Etant donné U_1, \dots, U_h finies et $R \text{ non } \supset U_1$ et ... et $\text{non } \supset U_h$, il n'est pas possible en général d'avoir une extension de R respectant ces inégalités. Mais si $\text{Card}(R) \gg k$, où k est un entier fonction de U_1, \dots, U_h , alors il est plausible (mais non prouvé) qu'une telle extension respectueuse existe, de cardinal fini arbitrairement grand, et par suite de cardinal infini. Cela

revient à dire :

- Etant donné une classe universelle A, existe-t-il un entier k tel que toute relation R sur A et de cardinal \aleph_k admette, dans A, une extension stricte (donc une extension de cardinal arbitrairement grand, fini ou infini).

Manuscrit remis le 31 janvier 1967.

R. FRANCE
Faculté des Sciences
MARSEILLE