Publications du Département de mathématiques de Lyon

A. Preller

La catégorie des algèbres quantifiées

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1967, tome 4, fascicule 1
, p. 91-135
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1967__4_1_91_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1967 t, 4-1

LA CATEGORIE DES ALGEBRES QUANTIFIEES

par A. PRELLER

SOMMAIRE

Ce travail constituait la majeure partie de ma thèse de doctorat de spécialité de mathématiques pures soutenue en octobre 1966, à LYON.

INTRODUCTION

La terminologie de ce travail est celle des ouvrages [1] , [3] et [6] de la bibliographie.

Les chapitres III et IV de [3] sont à l'origine de ce mémoire. Les résultats de [3] , considérés comme fondamentaux, seront utilisés sans référence explicite. Signalons cependant qu'il nous a semblé nécessaire de modifier les notions d'ensembles individualisés et d'algèbres quantifiées données dans [3]; en effet, pour exprimer certaines propriétés intéressantes du calcul des prédicats en langages algébrique ou topologique, il nous a fallu renforcer certains axiomes. Le chapitre I est consacré au développement de la technique du calcul des substitutions ; nous donnons une caractérisation du calcul des prédicats en termes d'ensembles individualisés. Dans le chapitre II, nous donnons les définitions des algèbres quantifiées et nous étudions les propriétés catégoriques des algèbres quantifiées pour préciser différentes notions de liberté et donner une solution fonctorielle à ces problèmes universels. Ensuite, reprenant la notion d'homomorphismes validants qui jouent un rôle essentiel dans le théorème de complétude, nous montrons comment "interpréter" un homomorphisme validant comme morphisme de la catégorie.

Nous en déduirons l'analogue du théorème de complétude de Gödel pour des classes assez larges d'algèbres quantifiées et des généralisations (théorème de compacité, de Löwenheim-Skolem, etc...) pour un cardinal quelconque pour les mêmes classes.

CHAPITRE I : ENSEMBLES INDIVIDUALISES

§ 1 - Le calcul des substitutions :

Soit I un ensemble infini. Notons J l'ensemble des suites finies $\mathfrak{a} = (a_1,b_1),\ldots,(a_m,b_m)$ d'eléments de I^2. La suite vide sera notée $\emptyset$; pour deux suites $\mathfrak{a} = ((a_i,b_i))_{1\leq i\leq m}$, et $\mathfrak{b} = ((c_i,d_i))_{1\leq i\leq n}$ on désigne par $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ la suite $((l_i,k_i))_{1\leq i\leq m+n}$ avec $(l_i,k_i) = (a_i,b_i)$ pour $1\leq i\leq m$ et $(l_{i+m},k_{i+m}) = (c_i,d_i)$ pour $1\leq i\leq n$; pour $a\in I$ et $\mathfrak{a}\in J$, on écrira $a \neq \mathfrak{a}$ pour " $a \neq a_i$ et $a \neq b_i$ $1\leq i\leq m$ ".

D1. Definition : Un ensemble E est appelé "ensemble individualisé" ou I-ensemble, si à chaque couple $(a,b)\in I^2$ on a associé une application de E dans E, notée (a/b) et appelée substitution, l'ensemble de ces substitutions devant vérifier les cinq axiomes suivants :

1) $(a/a) = 1_E$ pour tout a I.

2) Si $a \neq b$, alors $(c/a)(b/a) = (b/a)$ pour tout $a, b, c\in I$.

3) $(a/b)(b/c) = (a/b)(a/c)$ pour tout $a, b, c\in I$.

4) Si $b \neq c,d$ et $d \neq a, b$, alors :

$(a/b)(c/d) = (c/d)(a/b)$ pour tout $a,b,c,d\in I$.

5) L'ensemble $I_\alpha = \{a\in I,$ il existe $b\in I$ $(b/a)\alpha \neq \alpha\}$ est fini pour tout $\alpha\in E$.

Exemple : Si K est un ensemble quelconque on pose $(a/b) = 1_K$ pour tout $(a,b)\in I^2$. (individualisation triviale).

Exemple 2 : Pour $c\in I$ on pose :

$$(a/b)c = \begin{cases} c \text{ si } b \neq c \\ a \text{ si } b = c \end{cases}$$

Exemple 3 : Soit $n\in N$ et I_n l'ensemble des parties finies de I ayant n éléments au plus. Soit $\gamma = \{c_1,\ldots,c_n\}\in I_n$, alors $(a/b)\gamma = \{d_1,\ldots,d_n\}$ où

$$d_i = \begin{cases} a \text{ si } c_i = b \\ c_i \text{ si } c_i \neq b \end{cases}$$

P1 . Proposition :

1) Si $b \notin I_\alpha$,alors : $(a/b)(b/c)\alpha = (a/c)\alpha$

2) $(a/b)(a/c) = (a/c)(a/b)$ pour tout $a,b,c \in I$

Démonstration :

C'est une conséquence des axiomes 3 et 4.

P2. Proposition : Si $b, b' \notin I_\alpha$ et si $b \neq \mathfrak{A}$, $b' \neq \mathfrak{A}$,alors, pour tout $a, d \in I$:

$(d/b)\mathfrak{A}(b/a)\alpha = (d/b')\mathfrak{A}(b'/a)\alpha$ ($\mathfrak{A}\alpha$ signifie évidemment (a_1/b_1) $(a_2/b_2) \ldots (a_n/b_n)\alpha$).

Démonstration :

$(b'/b)\mathfrak{A}(b/a)\alpha = \mathfrak{A}(b'/b)\ (b/a)\alpha$ (par l'axiome 4) qui est égal d'après P1 à $\mathfrak{A}(b'/a)\alpha$; donc : $(d/b')\mathfrak{A}(b'/a)\alpha = (d/b')(b'/b)\mathfrak{A}(b/a)\alpha = (d/b)\mathfrak{A}(b/a)\alpha$ car $b' \notin I_{\mathfrak{A}(b/a)\alpha}$ ou $b' = b$.

D2. Définition : On note I-E la catégorie des I-ensembles dont les objets sont les I-ensembles E, E', ... et dont les morphismes sont les applications entre I-ensembles qui commutent aux substitutions. Un morphisme de I-ensembles est appelé I-application.

P3. Proposition : I-E possède des produits directs quelconques.

Démonstration :

Soit $(E_\lambda)_{\lambda\in L}$ une famille de I-ensembles et soit P le produit ensembliste des E_λ . Pour $\alpha = (\alpha_\lambda)_{\lambda\in L} \in P$, posons : $(a/b)\alpha = ((a/b)\alpha_\lambda)_{\lambda\in L}$. La substitution (a/b) est donc définie dans P tout entier et de même l'ensemble I_α pour tout $\alpha \in P$, d'ailleurs : $I_\alpha = \bigcup_{\lambda\in L} I_{\alpha_\lambda}$. Soit $E = \{\alpha \in P\ ;\ I_\alpha \text{ fini}\}$. Il est clair que la restriction de (a/b) à E est une application de E dans E et que pour ces substitutions E est un I-ensemble. Désignons par p_λ la restriction à E de la λ-ième projection de P dans E_λ. p_λ est une I-application et $(E,(p_\lambda)_{\lambda\in L})$ est produit direct dans I-E de la famille $(E_\lambda)_{\lambda\in L}$. En effet, soit K un I-ensemble et $h_\lambda : K \to E_\lambda$ des I-applications. Posons pour $\varphi\in K$ $h(\varphi) = (h_\lambda(\varphi))_{\lambda\in L}$, alors $h(\varphi)\in E$, car $I_{h(\varphi)} = \bigcup_{\lambda\in L} h_\lambda(\varphi)$ donc $I_{h(\varphi)} \subset I_\varphi$. Il est clair que h est l'unique I-application telle que $p_\lambda h = h_\lambda$ pour tout $\lambda\in L$.

On peut remarquer que E est non vide si chaque E_λ est non vide. Car soit $a_o\in I$, $a_\lambda\in E_\lambda$ et $\beta_\lambda = (a_o,b_1)\dots(a_o,b_k)\alpha_\lambda$ où $\bigcup_{1\leq i\leq k} \{b_i\} = I_{a_\lambda}$; pour $\beta = (\beta_\lambda)_{\lambda\in L}$ on a $I_\beta = \bigcup_{\lambda\in L} I_{\beta_\lambda} \subset \{a_o\}$. Par un raisonnement semblable, on voit que p_λ applique E sur E_λ. De plus, si L est fini, alors E = P.

<u>Exemple</u> : I^n, muni de la structure de I-ensemble produit direct de la structure de I.

P4. <u>Proposition</u> : I-E possède des sommes directes quelconques.

<u>Démonstration</u> :

Soit $(E_\lambda)_{\lambda\in L}$ une famille de I-ensembles, E la réunion disjointe des E_λ et $q_\lambda : E_\lambda \to E$ l'injection canonique. Si $\alpha\in E$, alors il existe un unique $\lambda\in L$ et un unique $\beta\in E_\lambda$ tels que $\alpha = q_\lambda(\beta)$. On pose $(a/b)\alpha = q_\lambda((a/b)\beta)$. Il est clair que pour ces substitutions E est un I-ensemble, q_λ une I-application pour tout $\lambda\in L$ et que $(E, (q_\lambda)_{\lambda\in L})$ est somme directe de la famille $(E_\lambda)_{\lambda\in L}$ dans I-E.

<u>Exemple</u> : Soit L l'ensemble des énoncés élémentaires du calcul des prédicats du premier ordre. L est somme directe de la famille $(I^{n_r}_r)_{r\in R}$ où R désigne l'ensemble des relations du calcul et où n_r est le poids de la relation r.

P5. Lemme : Soit $\mathfrak{V}\in J$, $\mathfrak{V} = \ldots (a_{i_1},b_{i_1})\ldots(a_{i_r},b_{i_r})\ldots(a_{i_k},b_{i_k})\ldots$ où les points signifient que pour $m<i_1$ $b_m \neq a_{i_1}$; pour $i_j<m<i_{j+1}$ $b_m \neq a_{i_{j+1}}$ et pour $m>i_k$ $b_m \neq b_{i_k}$, mais $b_{i_j} = a_{i_{j+1}}$ $1\leq j\leq k-1$. Alors pour tout $i \neq \mathfrak{V}$, $i\notin I_\alpha$:

$$(a_{i_1}/i)\mathfrak{V}(i/b_{i_k})\alpha = \mathfrak{V}\alpha$$

Démonstration :

Pour simplifier l'écriture, posons :

$i_j = a_{i_{j+1}}$ $0\leq j\leq k-1$, $i_k = b_{i_k}$; alors :

$$\begin{aligned}(i_o/i)\mathfrak{V}(i/i_k)\alpha &= (i_o/i)\ldots(i_o/i_1)\ldots(i_1/i_2)\ldots(i_{k-1}/i_k)\ldots(i/i_k)\alpha = \\ &= \ldots(i_o/i)(i_o/i_1)\ldots(i_1/i_2)\ldots(i_{k-1}/i_k)\ldots(i/i_k)\alpha = \\ &= \ldots(i_o/i_1)(i_1/i)\ldots(i_1/i_2)\ldots(i_{k-1}/i_k)\ldots(i/i_k)\alpha = \\ &= \ldots(i_o/i_1)\ldots(i_1/i_2)\ldots(i_{k-1}/i)(i_{k-1}/i_k)\ldots(i/i_k)\alpha = \\ &= \ldots(i_o/i_1)\ldots(i_1/i_2)\ldots(i_{k-1}/i_k)\ldots(i_k/i)(i/i_k)\alpha = \mathfrak{V}\alpha\end{aligned}$$

ceci par application réitérée des axiomes 3 et 4.

P6. Lemme : (de la substitution simultanée) :

Soit $\mathfrak{V}\in J$, $\alpha\in I$, $I_\alpha = \{c_1,\ldots, c_n\}$ avec $c_i \neq c_j$ pour $i \neq j$. Alors, il existe $(e_1, e_2,\ldots e_n)\in I^n$ tel que pour tout $(d_1,\ldots, d_n)$ I^n avec $d_i \neq d_j$ pour $i \neq j$ et $d_i \neq e_j$, c_j pour $1\leq i, j\leq n$, on ait :

(*) $$\mathfrak{V}\alpha = (e_1/d_1)\ldots(e_n/d_n)(d_n/c_n)\ldots(d_1/c_1)\alpha .$$

De plus, si $c_i \neq b_j$ pour $1\leq j\leq m$, alors $e_i = c_i$, sinon il existe a_j avec $b_k \neq a_j$ pour $k<j$ tel que $e_i = a_j$.

Démonstration :

S'il existe un élément $(e_1,\dots, e_n)$ de I^n tel que l'équation (✱) soit vérifiée pour un élément $(d_1,\dots,d_n)$ de I^n satisfaisant aux conditions imposées, alors l'équation (✱) est vérifiée par tout $(d_1,\dots, d_n)$ satisfaisant à ces conditions (cf. P2).

Montrons l'existence par récurrence sur la longueur m de la suite $\mathfrak{U}$

Si m = 0, c'est-à-dire $\mathfrak{U} = \emptyset$, il suffit de prendre $e_i = c_i$ $1\leq i\leq n$ et d_i comme indiqué dans l'énoncé.

Cas m+1 :

$\mathfrak{U} = (a_1,b_1),\dots,(a_{m+1},b_{m+1})$ et supposons que $b_{m+1}\in I_\alpha$, par exemple $b_{m+1} = c_i$. Ecrivons $\mathfrak{U}$ sous la forme du lemme P5, c'est-à-dire :

$\mathfrak{U} = \dots(e_i,i_1)\dots(i_1,i_2)\dots(i_{k-1},c_i)$. Soit maintenant $d_i \neq \mathfrak{U}$, $d_i \notin I_\alpha$ d'après P5 : $\mathfrak{U}\alpha = (e_i/d_i)\mathfrak{U}(d_i/c_i)\alpha =$

$$= (e_i/d_i)(a_1/b_1)\dots(a_m/b_m)(i_{k-1}/c_i)(d_i/c_i)\alpha =$$

$$= (e_i/d_i)(a_1/b_1)\dots(a_m/b_m)\alpha \qquad \text{car } d_i \neq c_i.$$

Or, $I_{(d_i/c_i)\alpha} = \{c_1,\dots,c_{i-1},d_i,c_{i+1},\dots,c_n\}$ et en appliquant l'hypothèse de récurrence à : $(a_1/b_1)\dots(a_m/b_m)\beta$ où $\beta = (d_i/c_i)\alpha$, on obtient :

$$\mathfrak{U}\alpha = (e_i/d_i)(e_1/d_1)\dots(e_{i-1}/d_{i-1})(d_i/f_i)(e_{i+1}/d_{i+1})\dots(e_n/d_n)(d_n/c_n)\dots$$
$$\dots(d_{i+1}/c_{i+1})(f_i/d_i)(d_{i-1}/c_{i-1})\dots(d_1/c_1)\beta, \text{ car } d_i \neq b_j \quad 1\leq j\leq m.$$

Les conditions imposées à f_i,d_i et d_j et c_j pour $1\leq j\leq n$ font que les (e_j/d_j) pour $1\leq j\leq n$ sont permutables entre eux, de même les (d_j/c_j) pour $1\leq j\leq n$, de plus (d_i/f_i) et (f_i/d_i) sont permutables avec (e_j/d_j) et (d_j/c_j) pour $1\leq j\leq n$. On obtient donc : $\alpha = (e_1/d_1)\dots(e_n/d_n)(d_n/c_n)\dots(d_1/c_1)(d_i/f_i)(f_i/d_i)\alpha =$

$= (e_1/d_1)\dots(e_n/d_n)(d_n/c_n)\dots(d_1/c_n)\alpha$

Si $b_{m+1}\notin I_\alpha$, alors $\alpha = (a_1/b_1)\dots(a_m/b_m)\alpha = (e_1/d_1)\dots(e_n/d_n)(d_n/c_n)\dots$

$\dots(d_1/c_1)\alpha$

D3. Définition : Soit $b = (b_1,\dots,b_m)\in I^m$ et $a = (a_1,\dots,a_m)\in I^m$, soit $s(b/a)$ l'application, appelée substitution simultanée des b_i aux a_i, définie par : $s(b/a)\alpha = (b_1/i_1)\dots(b_m/i_m)(i_m/a_m)\dots(i_1/a_1)\alpha$

où $i_k \neq i_j$ si $k \neq j$, $i_k \neq a_j, b_j$ pour tout k, j et $i_k \notin I_\alpha$.

P7. Lemme : Soit $d\in I^m$, $e\in I^m$, $b\in I^n$, $a\in I^n$, $\alpha\in E$, alors :

$s(db/ae) = s(d/g)s(gb/ae)\alpha$

où $g = (g_1,\dots g_m)\in I^m$ avec $g_i \neq b_j$, $g_i \neq g_j$, $g_i \notin I_\alpha$ pour tout i, j.

Démonstration :

$s(db/ae)\alpha = (d_1/i_1)\dots(d_m/i_m)(b_1/i_{m+1})\dots(b_n/i_{m+n})(i_{m+n}/a_n)\dots(i_{m+1}/a_1)$
$(i_m/e_m)\dots(i_1/e_1)\alpha =$

$= (d_1/i_1)\dots(d_m/i_m)(i_m/g_m)\dots(i_1/g_1)(g_1/i_1)\dots(g_m/i_m)(b_1/i_{m+1})\dots(b_n/i_{m+n})$
$(i_{m+n}/a_n)\dots(i_{m+1}/a_1)(i_m/e_m)\dots(i_1/e_1)\alpha = s(d/g)s(gb/ae)\alpha$. Les i_j vérifiant les conditions voulues. Posons : $s(b/\mathfrak{a}/a)\alpha = (b_1/i_1)\dots(b_m/i_m)\mathfrak{a}(i_m/a_m)\dots(i_1/a_1)\alpha$ pour $\mathfrak{a}\in J$, où $i_j \neq b_i, a_i, i_k, \mathfrak{a}; i_j \notin I_\alpha$, pour tout i, j, $k \neq j$.

Retenons que : $s(b/s(d/e)/a)\alpha = s(bd/ea)\alpha = s(b_o/a_o)\alpha$ où $b_o = (b_1,\dots,b_m, d_1,\dots d_n)$ et $a_o = (a_1,\dots,a_m, e_1,\dots, e_n)$.

P8. Lemme : Soit d, $e\in I^k$, $\alpha\in E$, $\mathfrak{a}\in J$, alors :

a) $\mathfrak{a}s(d/e) = s(d_o/\mathfrak{a}/e)\alpha$ où $d_o = \mathfrak{a}d$ dans I^k.

b) $s(d/\mathfrak{a}/e)\alpha = \mathfrak{a}_o s(g/e)\alpha$ où $g\in I^k$ avec $g_i \neq g_j$ si $i \neq j$, $g_i \neq \mathfrak{a}$
$g_i \notin I_\alpha$, $\mathfrak{a}_o = (d_1/g_1)\dots(d_k/g_k)\mathfrak{a}$.

Démonstration :

a) Considérons le cas où $\mathfrak{A} = (a/b)$ le cas général s'en déduit par récurrence. $(a/b)(d_1/i_1)\ldots(d_k/i_k)(i_k/e_k)\ldots(i_1/e_1)\alpha =$

$$= (a/i_1)\ldots(a/i_j)(d_{j+1}/i_{j+1})\ldots(d_k/i_k)(a/b)(i_k/e_k)\ldots(i_1/e_1)\alpha$$

où l'on suppose, sans perdre de généralité, que $d_1,\ldots,d_j = b$ mais $d_{j+1},\ldots,d_k \neq b$.

b) Soient g et $\mathfrak{A}_0$ comme indiqué dans l'énoncé, alors pour des i_j $1\leq j\leq k$ convenables :

$$\mathfrak{A}_0 s(g/e)\alpha = \mathfrak{A}_0(g_1/i_1)\ldots(g_k/i_k)(i_k/e_k)\ldots(i_1/e_1)\alpha =$$
$$= (d_1/g_1)\ldots(d_k/g_k)(g_1/i_1)\ldots(g_k/i_k)\mathfrak{A}(i_k/e_k)\ldots(i_1/e_1)\alpha =$$
$$= (d_1/i_1)\ldots(d_k/i_k)\mathfrak{A}(i_k/e_k)\ldots(i_1/e_1)\alpha = s(d/\mathfrak{A}/e)\alpha \ .$$

§ 2 - Le calcul des prédicats du premier ordre :

A l'aide des deux lemmes précédents, nous allons établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'un I-ensemble E soit somme directe d'une famille $(I_\lambda^{n_\lambda})_{\lambda\in L}$, donc isomorphe à l'ensemble des énoncés élémentaires du calcul des prédicats du premier ordre.

Remarquons d'abord que $\alpha R \beta =$ " il existe $\mathfrak{A}\in J$ $\alpha = \mathfrak{A}\beta$ " est un préordre sur E. Soit R_0 la relation d'équivalence associée à R. Posons : $\alpha R_1 \beta =$ " il existe une suite finie $\alpha_1,\ldots, \alpha_n$ d'éléments de E avec $\alpha_1=\alpha, \alpha_n= \beta$ et $\alpha_i R\, \alpha_{i+1}$ ou $\alpha_{i+1} R\, \alpha_i$ pour $1\leq i\leq n-1$ ". Evidemment R_1 est une relation d'équivalence et R_0 implique R_1. Soit $E_0 = E/R_0$ muni de l'ordre déduit de R. La relation R_1 induit une relation d'équivalence R_{10} sur E_0 et l'on identifiera dans la suite E/R_1 et E_0/R_{10}. Avec ces notations :

P9. Proposition : E est somme directe de la famille $(I_\lambda^{n_\lambda})_{\lambda\in L}$ si et seulement si :

1) Chaque classe de E_0/R_{10} possède un plus grand élément.

2) Pour tout $\alpha\in E$ $(e_1/d_1)\dots(e_n/d_n)(d_1/c_1)\dots(d_n/c_n)\alpha =$
$= (e'_1/d_1)\dots(e'_n/d_n)(d_1/c_1)\dots(d_n/c_n)\alpha$

entraîne : $(e_1,\dots,e_n) = (e'_1,\dots,e'_n)$ (ceci avec les notations de P6).

Dans ces conditons $L = E_o/R_{1o}$ et n_λ est le cardinal de I_{β_λ} où $\beta_\lambda \in E$ et où la classe de β_λ dans E_o est le plus grand élément de la classe $\lambda\in E_o/R_{1o}$.

Démonstration :

Remarquons d'abord que $\alpha R_o \beta$ entraîne card. I_β = card. I_α car alors $\tau\alpha = \beta$ et $\zeta\beta = \alpha$,donc card. $I_\alpha \leq$ card. $I_{\tau\alpha}$ = card. I_β et card. $I_\beta \leq$ card. $I_{\zeta\beta}$ = card. I_α .

La nécessité des conditons étant immédiate, nous montrerons leur suffisance. Il est clair que E est somme directe de la famille $(E_\lambda)_{\lambda\in L}$ où E_λ est la classe de E/R_1 correspondant à la classe $\lambda\in E_o/R_{1o}$. Montrons que E est isomorphe à I^{n_λ} . Soit β_λ comme indiqué dans l'énoncé, mais fixe, $\{c_1,\dots,c_{n_\lambda}\}$ la base de β_λ. Posons $s(\beta_\lambda) = (c_1,\dots,c_{n_\lambda})$, l'ordre des c_i choisi arbitrairement, mais fixe dans la suite. Si $\alpha\in E_\lambda$ alors $\alpha = (e_1/d_1)\dots(e_{n_\lambda}/d_{n_\lambda})(d_1/c_1)\dots(d_{n_\lambda}/c_{n_\lambda})\beta_\lambda$ pour un seul $(e_1,\dots, e_{n_\lambda})$. Posons $s\alpha = (e_1/d_1)\dots(e_{n_\lambda}/d_{n_\lambda})(d_1/c_1)\dots(d_{n_\lambda}/c_{n_\lambda})s\beta_\lambda$. On vérifie aisément que s est une bijection. s commute aux substitutions car si $b \neq e_i$ pour $1\leq i\leq m$, alors $s(a/b)\alpha = s\alpha = (a/b)s\alpha$. Sinon on peut supposer que $b = e_1$ et alors :

$s((a/b)\alpha) = s((a/e_1)(e/d_1)\dots(e_1/d_{i_1})\dots(e_1/d_{i_k})\dots(d_1/c_1)..(d_{n_\lambda}/c_{n_\lambda})\beta_\lambda)$.

Les points dans cette écriture signifient que $e_i \neq e_1$ si i ne figure pas dans l'écriture.

On vérifie que le membre de droite de l'égalité ci-dessus est égal à :

$s((a/d_1)\dots(a/d_{i_1})\dots(a/d_{i_k})\dots\beta_\lambda)$

où les substitutions non écrites restent inchangées.

Ce dernier élément est égal à : $(a/d_1)\dots(a/d_{i_1})\dots(a/d_{i_k})\dots s\beta_\lambda =$

$= (a/e_1)(e_1/d_1)\dots(e_1/d_{i_1})\dots(e_1/d_{i_k})\dots(e_{n_\lambda}/d_{n_\lambda})(d_1/c_1)\dots(d_{n_\lambda}/c_{n_\lambda})s\beta_\lambda =$

$= (a/e_1)s\alpha$.

Exemple : Si $n \geq 2$, alors I_n muni de la structure définie dans l'exemple 3 de la page 5 ne vérifie pas la condition 2) de P8.

Mais il est clair que E est somme directe de $(I_{n\lambda})_{\lambda\in L}$ si E vérifie 1) et la condition :

$$(e_1/d_1)\dots(e_n/d_n)(d_1/c_1)\dots(d_n/c_n)\alpha =$$

$$= (e'_1/d_1)\dots(e'_n/d_n)(d_1/c_1)\dots(d_n/c_n)\alpha \quad \text{entraîne :} \quad \bigcup_{1\leq i\leq n}\{e_i\} = \bigcup_{1\leq i\leq n}\{e'_i\},$$

pour tout $\alpha\in E$.

P 10. Proposition : Tout monomorphisme de I-E est injectif.

Démonstration :

Soit $\alpha \neq \beta$ dans E et $\{c_1,\dots,c_n\} \supset I_\alpha \cup I_\beta$ avec $c_i \neq c_j$. Définissons deux I-applications s_1, s_2 de I^n dans E :

$s_1((c_1,\dots,c_n)) = \alpha$, $s_1(\mathfrak{V}(c_1,\dots,c_n)) = s_1((e_1/d_1)\dots(d_1/c_1)(c_1,\dots,c_n)) =$

$= (e_1/d_1)\dots(d_n/c_n)\alpha$ (cf. P6)

$s_2((c_1,\dots,c_n)) = \beta$, $s_2(\mathfrak{V}(c_1,\dots,c_n)) = (e_1/d_1)\dots(d_n/c_n)\beta$.

s_1 et s_2 sont bien définies et commutent aux substitutions (cf. la démonstration de P8). De plus, si u est une I-application définie sur E avec $u(\alpha) = u(\beta)$, alors $u\circ s_1 = u\circ s_2$, donc u ne peut être un monomorphisme.

CHAPITRE II : ALGEBRES INDIVIDUALISEES, ALGEBRES QUANTIFIEES

§ 1 - Définitions, théorème de complétude du calcul des predicats.

D1. Définition :

a) On appelle I-algèbre ou algèbre individualisée sur l'ensemble I, toute algèbre de Boole A munie d'une structure de I-ensemble telle que les substitutions soient des endomorphismes (booléiens) de A.

b) On appelle P-I-algèbre ou algèbre partiellement quantifiée sur I, un couple (A,P) où A est une I-algèbre, P un I-sous-ensemble de A tel que :

6) $\bigvee_{b\in I}(b/a)\alpha$ existe dans A pour tout $\alpha\in P$ et appartient à P.

7) Pour tout $\mathfrak{A}\in J$, $\alpha\in P$, $\mathfrak{A}(\bigvee_{b\in I}(b/a)\alpha) = \bigvee_{b\in I}\mathfrak{A}(b/a)\alpha$.

c) Si P = A, on dira que A est une Q-I-algèbre ou encore que A est une algèbre quantifiée sur I.

L'égalité de l'axiome 7) exige l'existence de $\bigvee_{b\in I}\mathfrak{A}(b/a)\alpha$. Or, celle-ci est une conséquence des autres axiomes :

P1. Proposition : Si A est une I-algèbre qui vérifie l'axiome 6) pour un I-sous-ensemble P, alors pour tout $\mathfrak{A}\in J$, $\bigvee_{b\in I}\mathfrak{A}(b/a)\alpha$ existe et $\bigvee_{b\in I}\mathfrak{A}(b/a)\alpha =$ $\bigvee_{b\in I}(b/i)\mathfrak{A}(i/a)\alpha$ pour tout $i\neq\mathfrak{A}$, $i\notin I_\alpha$.

Démonstration :

Il est clair que $\bigvee_{b\in I}(b/i)\mathfrak{A}(i/a)\alpha$ existe et est sous les conditions imposées indépendant de i (cf. P3).

D'autre part, $\bigvee_{b\in I}(b/i)\mathfrak{A}(i/a)\alpha \geqslant (b/i)\mathfrak{A}(i/a)\alpha = \mathfrak{A}(b/i)(i/a)\alpha = \mathfrak{A}(b/a)\alpha$ si $b\neq b_i$ $1\leqslant i\leqslant m$. Si au contraire, $b = b_i$, alors il existe $e\in I$ tel que : $\mathfrak{A}(b/a)\alpha = (e/i)\mathfrak{A}(b/a)(i/a)\alpha = (e/i)\mathfrak{A}(i/a)\alpha$ pour un i convenable (cf. P) et et par conséquent : $\bigvee_{b\in I}(b/i)\mathfrak{a}(i/a)\alpha \geq (b/a)\alpha$ pour tout $b\in I$.

Soit $\beta\in A$, $\beta \geq \mathfrak{a}(b/a)\alpha$ pour tout $b\in I$. Soit $e\in I_o = I - \{b_1,\dots,b_m\}$, i convenable, alors $\beta \geq \mathfrak{a}(e/a)\alpha = \mathfrak{a}(e/i)(i/a)\alpha = (e/i)\mathfrak{a}(i/a)\alpha$.

Or, $\beta \geq (e/i)\mathfrak{a}(i/a)\alpha$ pour tout $e\in I_o$, entraîne que :

$\beta = (b/e)\beta \geq (b/e)(e/i)\mathfrak{a}(i/a)\alpha = (b/i)\mathfrak{a}(i/a)\alpha$ si $e\notin I_\beta \cup I_{\mathfrak{a}(i/a)\alpha}$, $b\in I$ quelconque.

P2. <u>Proposition</u> : Ecrivons $\exists a\alpha$ pour $\bigvee_{b\in I}(b/a)\alpha$. L'application $\alpha \to \exists a\alpha$ est appelée "quantificateur". On peut énoncer :

Soit A une P-I-algèbre, $\alpha\in P$, $a\in I$, $\mathfrak{a}\in J$:

$\exists a\alpha = \exists i(i/a)\alpha$ pour tout $i\notin I_\alpha$

$\mathfrak{a}\exists a\alpha = \exists i\mathfrak{a}(i/a)\alpha$ pour tout $i\notin I_\alpha$, $i \neq \mathfrak{a}$.

Si $a \neq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\exists a\alpha = \exists a\mathfrak{a}\alpha$,

$\exists a\alpha = \bigvee_{b\in I_o}(b/a)\alpha$ où I_o est une partie infinie de I.

<u>Démonstration</u> :

$\bigvee_{b\in I}(b/a)\alpha = \bigvee_{b\in I}(b/i)(i/a)\alpha$ pour $i\notin I_\alpha$.

$\mathfrak{a}\bigvee_{b\in I}(b/a)\alpha = \bigvee_{b\in I}\mathfrak{a}(b/a)\alpha = \bigvee_{b\in I}(b/i)\mathfrak{a}(i/a)\alpha$ pour $i\notin I_\alpha$, $i \neq \mathfrak{a}$ d'après l'axiome 7 et P1.

Si $i \neq \mathfrak{a}$, $i\notin I_\alpha$, et si $a \neq \mathfrak{a}$, alors :

$\mathfrak{a}\exists a\alpha = \exists i\,\mathfrak{a}(i/a)\alpha = \exists i(i/a)\mathfrak{a}\alpha = \exists a\,\mathfrak{a}\alpha$.

P3. <u>Proposition</u> : Soit A une algèbre vérifiant l'axiome 6) pour un I-sous-ensemble P. Alors pour $\alpha\in P$, $a\in I$, $\mathfrak{a}\in J$ il y a équivalence entre :

"$\mathfrak{a}\exists a\alpha = \exists i\,\mathfrak{a}(i/a)\alpha$ pour $i\notin I_\alpha$, $i \neq \mathfrak{a}$"

et

"$\mathfrak{a}(\bigvee_{b\in I}(b/a)\alpha) = \bigvee_{b\in I}\mathfrak{a}(b/a)\alpha$ ".

Démonstration :

On applique P1 et P2.

Remarque : Si A vérifie les hypothèses de P1, alors l'axiome :

" $(c/d)\exists a\alpha = \exists a(c/d)$ pour tout a, α ; $c, d \neq a$ " entraîne :

$(c/d)\exists a\alpha = (c/d)\exists i\ (i/a)\alpha = \exists i\ (c/d)(i/a)\alpha$ pour $i \neq c, d$, $i \notin I_\alpha$ et

$\mathfrak{v}\exists a\alpha = \mathfrak{v}di(i/a)\alpha = \exists i\,\mathfrak{v}(i/a)\alpha$ pour $i \notin I_\alpha$, $i \neq \mathfrak{v}$.

Exemple : Soit L l'anneau booléien associé au calcul des prédicats du premier ordre. L est une Q-I-algèbre. En fait L est la Q-I-algèbre li re sur l'I-ensemble de ses énoncés élémentaires. (cf. [3] chapitre IV, § 2).

" La Q-I-algèbre A est libre sur l'I-ensemble E " signifie bien entendu que A est solution du problème universel suivant :

" Existe-t-il une I-application g de E dans A telle que pour toute I-application f de E dans une Q-I-algèbre B, il existe un et un seul Q-I-homomorphisme h de A dans B tel que $f = h_o g$? "

Où nous appelons Q-I-homomorphisme tout homomorphisme booléien entre Q-I-algèbres qui commute aux substitutions et aux quantificateurs.

Soit E un I-ensemble, LE l'algèbre de Boole libre sur l'ensemble E. On sait que L E s'identifie à l'algèbre des ofs B_o de l'espace 2^E. Par définition de B_o, chaque substitution $(b/a) : E \to E \subset L\,E$ se prolonge en un endomorphisme $(b/a) : B_o \to B_o$ et en fait B_o est pour ces substitutions une I-algèbre, à savoir l'I-algèbre libre sur l'I-ensemble E. Dans la suite B_o sera considérée comme sous-algèbre de $\mathcal{P}(2^E)$, muni de sa structure d'I-algèbre.

Rappelons que l'on identifie E avec une partie de B_o en identifiant $\varepsilon \in E$ et l'of (= clopen de Halmos) $\mathcal{U}_\varepsilon = \{h \in 2^E ; h_\varepsilon = 1\}$.

Par suite d'une modification de la rédaction de ce travail, nous supprimons à cet endroit différentes propositions et définitions ; certaines seront inserées plus loin. Il s'ensuit une solution de continuité dans la numérotation des résultats, qui n'a pu être evitée pour des impératifs matériels.

Nous citons également ici une définition que nous n'utiliserons qu'au § 3, proposition 34, mais dont la mise en page en un autre endroit aurait conduit à un bouleversement complet du travail matériel déjà réalisé.

D.2. Définition : Soit A une algèbre quantifiée sur I, $h : A \to 2$ un homomorphisme booléien, ou 2 est l'algèbre de Boole a deux éléments ; on dit que h est validant, si $h(\bigvee_{b\in I} (b/a)\alpha) = \bigvee_{b\in I} h((b/a)\alpha)$ pour tous $a \in I$ et $\alpha \in A$.

§ 2. Propriétes des catégories des algèbres individualisées, quantifiées, et partiellement quantifiees :

D6. Définition :

a) Notons P-I-A la catégorie des algèbres partiellement quantifiées sur l'ensemble I dont les objets sont des P-I-algèbres et dont les morphismes sont les homomorphismes booléiens

$$h : (A_1, P_1) \to (A_2, P_2)$$

de A_1 dans A_2 qui commutent aux substitutions, qui appliquant P_1 dans P_2 et qui conservent $\bigvee_{b\in I} (b/a)\alpha$ pour tout $a\in I$ $\alpha \in P_1$:

$h(\bigvee_{b\in I}(b/a)\alpha) = \bigvee_{b\in I} h((b/a)\alpha)$ ou encore :

$h(\exists a\alpha) = \exists a h(\alpha)$

b) Notons I-A la sous-catégorie pleine de P-I-A formée des I-algèbres c'est-à-dire des P-I-algèbres (A,P) avec $P = \emptyset$.

c) Notons Q-I-A la sous-catégorie pleine de P-I-A formée des Q-I-algèbres, c'est-à-dire des P-I-algèbres (A,P) avec P = A.

d) Notons $\mathbb{A}$ la sous-catégorie pleine de Q-I-A formée des algèbres de Boole munies de l'individualisation triviale.

P15. <u>Proposition</u> :

P-I-A possède des produits directs quelconques. Le produit de la famille vide, c'est-à-dire l'objet final, est 1, l'algèbre de Boole réduite à un seul élément, muni de l'individualisation et de la quantification triviale.

<u>Démonstration</u> :

Soit $(P_\lambda, A_\lambda)_{\lambda\in L}$ une famille de P-I-algèbres, B l'algèbre de Boole produit des A_λ et A la partie de B dont les éléments α vérifient "$\bigcup_{\lambda\in L} I_{\alpha_\lambda}$ est fini". A est un I-ensemble (cf. Chapitre I P4) et une sous-algèbre de B. De plus, soit P la partie de A formée des éléments $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in L}$ avec $\alpha_\lambda \in P_\lambda$. P est aussi un I-ensemble de A, si $\alpha\in P$ alors $\bigvee_{b\in I}(b/a)\alpha = \bigvee_{b\in I}(b/a)(\alpha_\lambda)_{\lambda\in L} = (\bigvee_{b\in I}(b/a)\alpha_\lambda)_{\lambda\in L} \in P$ et il est clair que les substitutions vérifient sur P l'axiome 7).

On vérifie aisément que les projections p_λ de A dans A_λ sont des P-I-morphismes et que $((A,P),(p_\lambda)_{\lambda\in L})$ est produit direct dans P-I-A de la famille $(A_\lambda, P_\lambda)_{\lambda\in L}$.

P16. <u>Corollaire</u> :

I-A possède des produits directs quelconques.

L'objet final de I-A étant $(1,\emptyset)$.

Démonstration :

Si (A_λ, P_λ) est dans I-A pour tout $\lambda \in L$, il en est de même pour (A,P).

P17. Corollaire :

Q-I-A possède des produits directs quelconques .

L'objet final de Q-I-A étant $(1,1)$.

Démonstration :

Si (A_λ, P_λ) est un objet de Q-I-A pour tout $\lambda \in L$, il en est de même pour (A,P)

P18. Proposition :

P-I-A possède des sommes directes quelconques.

La somme directe de la famille vide, c'est-à-dire l'objet initial, est l'algèbre de Boole 2, munie de l'individualisation triviale.

Démonstration :

Soit $(A,(q_\lambda)_{\lambda \in L})$ la somme directe booléienne de la famille $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ et P la réunion disjointe des P_λ . On peut identifier P avec une partie de A les q_λ étant injectifs. Montrons que $((A,P), (q_\lambda))_{\lambda \in L}$ est somme directe dans P-A de la famille $(A_\lambda,P_\lambda)_{\lambda \in L}$.

On définit l'endomorphisme (b/a) de A par :

$$(b/a)q_\lambda = q_\lambda(b/a) \quad \text{pour } \lambda \in L$$

et A est une I-algèbre pour ces substitutions. Soit X_λ l'espace dual de A_λ, X celui de A. Notons p_λ l'application duale de q_λ. Alors pour $\alpha \in P_\lambda$, " $\bigvee_{b \in I}(b/a)q_\lambda(\alpha)$ existe dans A " équivaut à :

" $\overline{\bigcup_{b \in I} \overset{-1}{p_\lambda} (\tau(b/a)\alpha)}$ est un of de X " (τ étant l'isomorphisme de Stone).

Or $\overline{\bigcup_{b \in I} p_\lambda^{-1}(\tau(b/a)\alpha)} = p_\lambda^{-1} (\overline{\bigcup_{b \in I} \tau(b/a)\alpha})$ ce qui signifie que :

$\bigvee\limits_{b\in I} (b/a)q_\lambda(\alpha) = q_\lambda(\bigvee\limits_{b\in I} (b/a)\alpha)$ dans A. Le reste de la démonstration n'est plus qu'une question d'écriture.

P19. Corollaire :

I-A possède des sommes directes quelconques.

L'objet initial de I-A etant $(2,\emptyset)$.

Démonstration :

Si (A_λ, P_λ) est un objet de I-A pour tout $\lambda\in L$, il en est de même pour (A,P).

Remarque : Si (A_λ, P_λ) est une Q-I-algèbre pour tout $\lambda\in L$, alors en général la somme directe de la famille $(A_\lambda, P_\lambda)_{\lambda\in L}$ dans P-I-A n'est pas une Q-I-algèbre. Nous verrons plus loin que Q-I-A possède aussi des sommes directes quelconques. Notons déjà que (2,2) est objet initial de Q-I-A.

D7. Définition :

Soit I_o une partie infinie de I. Une Q-I-algèbre A est alors de manière canonique une Q-I_o-algèbre (Rappelons que $\bigvee\limits_{b\in I} (b/a)\alpha = \bigvee\limits_{b\in I_o} (b/a)\alpha$ dans B). Nous pourrons donc parler de I_o-sous-ensemble, de I_o-sous-algèbre, de Q-I_o-sous-algèbre de la Q-I-algèbre A.

a) Soit E une partie de la Q-I-algèbre A. La plus petite Q-I-sous-algèbre B de A contenant E (qui existe toujours) sera dite la Q-I-sous-algèbre engendrée par E.

Soit I_o une partie infinie de I, nous donnons une signification analogue à " la Q-I_o-sous-algèbre de A engendrée par la partie E ".

b) La plus petite sous-algèbre (booléienne) de A stable pour les quantificateurs contenant la partie E (cette sous-algèbre existe toujours) est dite la Q-sous-algèbre de A engendrée par E.

P 20. <u>Proposition</u> : Soit A une Q-I-algèbre, I_o une partie infinie de I, E_o un I_o-sous-ensemble de A. Si E_i est déjà défini pour $i\leq n$, alors E_{n+1} est par définition l'ensemble des $\alpha\in A$ qui vérifient l'une au moins des conditions suivantes :

1) Il existe $\beta\in E_n$ tel que $\alpha = \beta'$

2) Il existe $\beta\in E_n$, $a\in I_o$ tels que $\alpha = \exists a\beta$

3) Il existe k, $0\leq k\leq n$, $\beta\in E_{n-k}$, $\gamma\in E_k$ tels que $\alpha=\beta\wedge\gamma$

alors :

a) E_n est un I_o-sous-ensemble de A et $E_n\subset E_{n+1}$ pour tout n

b) $B = \bigcup_{n\in N} E_n$ est la Q-I_o-sous-algèbre de A engendrée par E_o.

c) La Q-sous-algèbre de A engendrée par E_o et la Q-I_o-sous-algèbre de A engendrée par E_o sont identiques.

d) Si C est une Q-I_o-algèbre et g et h deux Q-I_o-morphismes de B dans C tels que $g/E_o = h/E_o$, alors $g = h$.

<u>Démonstration</u> :

Montrons a) par récurrence sur n ; c'est vrai par hypothèse pour n = 0 ;

<u>cas n+1</u> : Il suffit de montrer que E_{n+1} est stable pour les substitutions :

$$(c/d)\alpha = \begin{cases} (c/d)\beta' = ((c/d)\beta)' \text{ où } \beta\in E_n \\ (c/d)\exists a\beta = \exists i(c/d)(i/a)\beta \text{ où } \beta\in E_n \\ (c/d)(\beta\wedge\gamma) = (c/d)\beta\wedge(c/d)\gamma \quad \text{où } \beta\in E_{n-k},\ \gamma\in E_k \end{cases}$$

Le membre à droite appartient dans chacun des trois cas, par hypothèse de récurrence, encore à E_{n+1}.

$E_n\subset E_{n+1}$, car si $\alpha\in E_n$ et $a\notin I_\alpha$ alors $\alpha = \exists a\alpha \in E_{n+1}$.

b) et c) : B est stable pour les substitutions de I_o et B est la plus petite sous-algèbre de A stable pour les quantificateurs.

d) On montre par récurrence que $g/e_n = h/E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

P21. <u>Proposition</u> : Soit E_o un I_o-sous-ensemble de la Q-I-algèbre A, B la Q-I_o-sous-algèbre de A engendrée par E_o et $\xi = \sup(\mathrm{card}.E_o, \mathrm{card}.I_o)$ alors : $\mathrm{card}.\, B \leqslant \xi$.

<u>Démonstration</u> :

Comme $\xi \geqslant \aleph_o$, il suffit de montrer que $\mathrm{card}.\, E_n \leqslant \xi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci est vrai pour n = 0.

<u>cas n+1</u> : $E_{n+1} = E'_n \cup \bigcup\limits_{a \in I_o} \exists a E_n \cup \bigcup\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} (E_{n-k} \cap E_k) \qquad (*)$

où $E'_n = \{ \alpha \in A \text{ ; il existe } \beta \in E_n\ \alpha = \beta' \}$

$\exists a E_n = \{ \alpha \in A \text{ ; il existe } \beta \in E_n\ \alpha = \exists a \beta \}$ etc...

D'après l'hypothèse de récurrence, $\mathrm{card}.\, E_n \leqslant \xi$, donc le cardinal du membre de droite de (*) est encore inférieur ou égal à ξ.

Pour établir l'existence des sommes idrectes dans Q-I-A et, plus loin, l'existence d'adjoints à gauche de différents foncteurs nous appliquerons un critère catégorique :

P22. <u>Proposition</u> : (critère de Rieger-Sikorski)

Soit S un foncteur de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{E}$.

a) <u>Définition</u> : Un objet B de $\mathbb{C}$ est dit S-engendré par $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}}(E, SA)$ s'il existe un morphisme $u : B \to A$ tel que :

1) f est factorisé par Su :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "j"'] & & SA \\ & SB \arrow[ur, "Su"'] & \end{tikzcd}$$

2) Pour tout $h, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(B,D)$, $Sh\circ j = Sg\circ j$ entraîne $h = g$. On dira que $\mathbb{C}$ possède des S-engendrés, si pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}}(E,SA)$, il existe un objet de $\mathbb{C}$ S-engendré par f.

b) <u>Critère</u> : Si $\mathbb{C}$ possède des produits directs et des S-engendrés, si S commute aux produits directs et si pour tout objet E de $\mathbb{E}$ il existe une famille $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ d'objets de $\mathbb{C}$ telle que pour tout $f\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}}(E,SA)$ il existe $\lambda\in L$ et $f_\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A_\lambda, A)$ tels que f soit factorisé par Sf_λ, alors S possède un adjoint à gauche T.

<u>Démonstration</u> :

Posons : $H_\lambda := \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}}(E,SA_\lambda)$

$A_{h_\lambda} := A_\lambda$ pour $h_\lambda \in H_\lambda$

$D_\lambda := \prod_{h_\lambda \in H_\lambda} A_{h_\lambda}$ avec pour projections p_{h_λ}

$D := \prod_{\lambda\in L} D_\lambda$ avec pour projections p_λ .

Alors $SD = \prod_{\lambda\in L} \prod_{h_\lambda\in H_\lambda} SA_{h_\lambda}$, par conséquent pour $\lambda\in L$ il existe g_λ, $g_\lambda \in \mathrm{Hom}_{E}(E, \prod_{h_\lambda\in H_\lambda} SA_h)$ tel que $Sp_{h_\lambda} \circ g_\lambda = h_\lambda$ pour tout $h_\lambda \in H_\lambda$. Et il existe $g\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}}(E, \prod_{\lambda\in L} SD_\lambda)$ tel que $Sp_\lambda \circ g = g_\lambda$ pour tout $\lambda\in L$. Soit TE S-engendré par g, il existe donc $u\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(TE,D)$ et ϕ_E, $\phi_E \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}}(E,STE)$ tels que $g = Su.\phi_E$ et que $Sf_1 .\phi_E = Sf_2.\phi_E$ entraîne $f_1 = f_2$ pour tout $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(TE,B)$.

Posons : $q_{h_\lambda} := p_{h_\lambda} .p_\lambda .u$ pour $h_\lambda\in H_\lambda, \lambda\in L$.

alors pour tout $h_\lambda \in \mathrm{Hom}(E,SA_\lambda)$ $Sq_{h_\lambda}.\phi_E = h_\lambda$ et q_{h_λ} est unique à vérifier cette équation.

Soit $f \in \mathrm{Hom}_E(E,SA)$, $\lambda \in L$ tel qu'il existe $f_\lambda \in \mathrm{Hom}_{\cdot}(A_\lambda, A)$ et $h_\lambda \in \mathrm{Hom}_E(E,SA_\lambda)$ avec $f = Sf_\lambda . h_\lambda$ alors $S(f_\lambda . q_{h_\lambda}) . \phi_E = f$ et vu la définition de TE et de ϕ_E, $f_\lambda . q_{h_\lambda}$ est encore unique.

Considérons les foncteurs suivants :

$$\begin{tikzcd}
Q\text{-}I\text{-}A \arrow[drrr, dashed, "S"] \arrow[dr, "I_Q"] \arrow[ddd, "S_{QI}"'] & & & \\
& P\text{-}I\text{-}A \arrow[rr, "Sp"] & & I\text{-}E \arrow[d, equal] \\
& P\text{-}I\text{-}A \arrow[rr, dashed, "Sp"] & & I\text{-}E \\
I\text{-}A \arrow[ur, "I_I"] \arrow[urrr, dashed, "S_I"'] & & &
\end{tikzcd}$$

où S, Sp, S_I et S_{QI} sont les foncteurs " oubli de structure " canoniques et I_Q, I_I les foncteurs injections canoniques.

Nous établirons l'existence d'adjoints à gauche des foncteurs S_I, S_{QI}, Sp, I_Q, S. L'adjoint à gauche T_I de S_I a été indiqué page 104, nous en déduisons que $Tp = I_I . T_I$ est adjoint à gauche de Sp.

Remarquons ensuite que Q-I-A possède des I_Q-engendrés (cf.P20). Si A est une P-I-algèbre et h un P-I-morphisme de A dans une Q-I-algèbre B, alors le cardinal de la Q-I-algèbre A_h engendrée par h(A) est inférieur au plus grand des cardinaux de I et de A. Par conséquent il existe une famille de Q-I-algèbres $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ telle que pour tout $h \in \mathrm{Hom}_{P\text{-}I\text{-}A}(A, I_Q B)$, A_h soit isomorphe à un A_λ. Nous pouvons appliquer le critère de Rieger-Sikorski et nous obtenons :

P23. <u>Proposition</u> : Le foncteur I_Q possède un adjoint à gauche T_Q. Si A est une

Q-I-algèbre alors $I_Q A = A$.

En effet, la dernière assertion est une conséquence de ce que Q-I-A est une sous-catégorie pleine de P-I-A.

P.24. Proposition :

Le foncteur S possède un adjoint à gauche T. De plus $T = T_Q . T_P$.

P.25. Proposition :

Les monomorphismes de Q-I-A, de P-I-A et de I-A sont injectifs.

Démonstration :

Les foncteurs " oubli " possèdent des adjoints à gauche conservant les monomorphismes. Tout monomorphisme de I-E est une application injective.

P.26. Proposition :

Q-I-A possède des sommes directes quelconques.

Démonstration :

Soit $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille de Q-I-algèbres. Alors :

$T_Q(\coprod_{\lambda \in L} A_\lambda) = \coprod_{\lambda \in L} T_Q A_\lambda = \coprod_{\lambda \in L} A_\lambda$ où la première des sommes directes est prise dans P-I-A et la seconde dans Q-I-A.

P.27. Proposition :

Le foncteur S_{QI} possède un adjoint à gauche T_{QI}.

Démonstration :

C'est une conséquence du théorème de Rieger-Sikorski.

P.28. Proposition :

Les foncteurs T_I, T_P et T sont fidèles.

Démonstration :

Nous savons que les morphismes canoniques $\phi_E : E \to S_I T_I E$ ($E \to STE$, etc...) sont des injections, donc des monomorphismes (cf. § 1, page 104 et proposition 32).

P.29. Proposition :

Les catégories P-I-A, Q-I-A et I-A sont complètes.

Démonstration :

Nous appliquerons un critère de [5], chapitre I, sous une forme légèrement modifiée :

Soit C une catégorie, $\mathcal{S}$(resp. $\mathcal{I}$) une sous-classe des épimorphismes (resp. des monomorphismes) de C contenant les isomorphismes et stable pour la composition avec les isomorphismes.

On dira que B est un $\mathcal{S}$-quotient (resp. un $\mathcal{I}$-sous-objet) de A s'il existe $p : A \to B$, $p \in \mathcal{S}$(resp. $j : B \to A$, $j \in \mathcal{I}$). Tout objet-quotient de A équivalent à B est aussi un $\mathcal{S}$-quotient (resp. tout sous-objet de A équivalent à B est aussi un $\mathcal{I}$-sous-objet).

Si C possède des produits directs et des sommes directes quelconques, si tout morphisme f possède une décomposition triangulaire $f = jp$ avec $p \in \mathcal{S}$, $j \in \mathcal{I}$ et si :

E) Les objets $\mathcal{S}$-quotients d'un objet forment un ensemble.

E') Les $\mathcal{I}$-sous-objets d'un objet forment un ensemble.

Alors $\mathbb{C}$ possède des 2-produits et des 2-sommes fibrés.

(cf. [5] démonstration de la proposition (1,6,1) et théorème (1,6,2)).

Il reste à définir les classes S et I . En tenant compte de P25, nous prenons pour I la classe de tous les monomorphismes (de P-I-A, Q-I-A, etc...), la classe S de P-I-A (de Q-I-A, etc...) sera formée des épimorphismes qui sont des applications surjectives. Il est clair que les isomorphismes sont des " surjections " et que le composé de deux "surjections" en est encore une.

D'autre part, tout P-I-morphisme $f : (A_1, P_1) \to (A_2,P_2)$ (tout Q-I-morphisme, etc...) possède une décompsoition triangulaire $f = jp$ où p est une surjection. Il suffit de remarquer que $(f(A_1), f(P_1))$ est une P-I-sous-algèbre de (A_2,P_2).

§ 3 - Homomorphismes validants - Théorème de Lövenheim -Skolem :

P30. Proposition :

Soit E un I-ensemble, A une algèbre de Boole complète, h une application de E dans A. Notons $\overline{h}$ l'application de E dans A définie par :

$\overline{h}(\alpha)\ (\upsilon) = h(\upsilon\alpha)$ pour α E, $\upsilon \in J$

alors :

a) Il existe une et une seule structure de I-ensemble sur $K = \overline{h}(E)$, telle que $\overline{h}$ soit une I-application.

b) Il existe une sous-algèbre K_h de A^J contenant K et une structure de Q-I-algèbre sur K_h qui induit sur K la structure de I-ensemble définie en a).

De plus, K_n est Q-engendré par K.

Démonstration :

a) S'il existe une structure de I-ensemble sur K telle que $\overline{h}$ soit une I-application, alors :

$((a/b)\overline{h}(\alpha))\ (\upsilon) = \overline{h}((a/b)\alpha)\ (\alpha) = h(\upsilon(a/b)\alpha) = \overline{h}(\alpha)(\upsilon(a,b))$.

ce qui entraîne bien l'unicité de cette structure et qui oblige à poser pour $(a,b)\in I^2$:

$$((a/b)\varphi)(\vartheta) = \varphi(\vartheta(a,b))$$

pour tout $\varphi\in K$, $\vartheta\in J$.

Pour ces substitutions K est un I-ensemble car :

$\overline{h}((a/b)\alpha)\ (\vartheta) = h\ (\vartheta(a/b)\alpha) = \overline{h}(\alpha)\ (\vartheta(a,b)) = ((a/b)\overline{h}(\alpha))(\vartheta)$.

c'est-à-dire $\overline{h}$ commute aux substitutions. Comme h est surjective K vérifie bien les axiomes 1),...,5).

On remarque d'ailleurs que a) reste vrai si A est un ensemble quelconque.

b) Pour $(a,b)\in I^2$, définissons la "substitution" (a/b) dans A^J par :

$((a/b)\varphi)\ (\vartheta) = \varphi(\vartheta(a,b))$ pour $\varphi\in A^J$, $\vartheta\in J$.

L'application (a/b) est un endomorphisme de A^J, car :

$((a/b)(\varphi\wedge\psi))(\vartheta) = (\varphi\wedge\psi)(\vartheta(a,b)) = \varphi(\vartheta(a,b))\wedge\psi(\vartheta(a,b)) =$

$= ((a/b)\varphi)(\vartheta)\wedge((a/b)\psi)(\vartheta) = ((a/b)\varphi\wedge(a/b)\psi)\ (\vartheta)$.

on vérifie de même que : $((a/b)\varphi')\ (\vartheta) = ((a/b)\varphi)'\ (\vartheta)$.

Soit $\psi\in A^J$ avec I_ψ fini, $\vartheta\in J$, soit $i\in I$ tel que $i\neq\vartheta$ et $i\notin I_\psi$ (i est choisi et fixe pour chaque ψ et ϑ par l'axiome du choix), on posera avec un abus d'écriture :

$$(\exists a\psi)\ (\vartheta) = \bigvee_{b\in I} \psi((b,i)\vartheta(i,a))$$

donc $\exists a\psi\in A^J$.

Pour $n\in N$ soit K_n la partie de A définie comme dans la proposition P20.

Alors K_n est un I-ensemble : Ceci a été montré dans a) pour n = 0.

cas n+1 : Montrons d'abord que K_{n+1} est stable pour les substitutions. Soit $\varphi\in K_{n+1}$

- $\varphi=\psi'$ avec $\psi\in K_n$, alors

$(a/b)\varphi = (a/b)\ (\psi') = ((a/b)\psi)'\in K_{n+1}$ car $(a/b)\psi\in K_n$

- $\varphi = \psi \wedge \chi$ avec $\psi \in K_{n-k}$, $\chi \in K_k$, alors :

$(a/b)\varphi = (a/b)(\psi \wedge \chi) = (a/b)\psi \wedge (a/b)\chi \in K_{n+1}$

- $\varphi = \exists a \psi$ avec $\psi \in K_n$, alors :

$\varphi(\alpha) = \bigvee_{b \in I} \psi((b/i)\alpha(i/a))$ pour tout $i \neq \alpha$, $i \notin I_\psi$ (et non seulement

pour un seul tel i), car K_n est un I-ensemble et $((b/i)\alpha(i/a)\psi)(\emptyset) =$ $\psi((b,i)\alpha(i,a))$. Montrons maintenant que pour tout $\beta \in J$, $\beta\varphi \in K_{n+1}$.

$\beta\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha\beta) = \bigvee_{b \in I} \varphi((b/i)\alpha\beta(i/a))$ pour $i \neq \alpha$, $i \neq \beta$, $i \notin I_\varphi$.

$= \bigvee_{b \in I} ((b/i)\alpha\beta(i/a)\varphi)(\emptyset) =$

$= \bigvee_{b \in I} ((b/d)(d/i)\alpha\beta(i/a)\varphi)(\emptyset)$ pour $d \neq \alpha$

$d \notin I_{\beta(i/a)}$

$= \bigvee_{b \in I} ((b/d)\alpha(d/i)\beta(i/a)\varphi)(\emptyset) =$

$= \bigvee_{b \in I} (\beta(i/a)\varphi((b,d)\alpha(d,i)) =$

$= (\exists i \beta(i/a)\varphi)(\alpha)$.

et par hypothèse de récurrence $\exists i \beta(i/a)\varphi \in K_{n+1}$.

Il reste à montrer que les substitutions vérifient sur K_{n+1} les axiomes 1), ...,5). Nous ne le ferons que dans le cas où $\varphi = \exists a \psi$, $\psi \in K_n$.

1) pour $i \neq c$, $i \notin I_\psi$ $(c/c)\exists a\psi = \exists i(c/c)(i/a)\psi = \exists i(i/a)\psi = \exists a\psi$

car $(\exists i(i/a)\psi)(\alpha) = \bigvee_{b \in I} (i/a)\psi((b,d)\alpha(d,i)) =$

$= \bigvee_{b \in I} ((b/d)(d/i)(i/a)\psi)(\emptyset) = \bigvee_{b \in I} ((b/d)\alpha(d/a)\psi)(\emptyset) = (\exists a\psi)(\alpha)$.

2) Si $b \neq c$, alors $(d/b)(c/b)\exists a\psi = \exists i(d/b)(c/b)(i/a)\psi =$

$= \exists i(c/b)(i/a)\psi = (c/b)\exists i(i/a)\psi = (c/b)\exists a\psi$

3) $(b/c)(c/d)\exists a\psi = \dots\dots = (b/d)(b/c)\exists a\psi$

4) Si $c \neq d, e$; $d \neq b,c$, alors :

$(b/c)(d/e)\exists a\psi = \dots\dots = (d/e)(b/c)\exists a\psi$

5) $I_{\exists a\psi} \subset I_\psi \cap \{a\}$ en effet :

$(b/c)\exists a\psi = \exists i(b/c)(i/a)\psi$ pour $i \neq (b,c)$, $i \notin I_\psi$

si $c \notin I_\psi$, alors $c \notin I_{(i/a)\psi}$ et $\exists i(b/c)(i/a)\psi = \exists i(i/a)\psi = \exists a\psi$, donc $c \notin I_{\exists a\psi}$.

Si $c = a$, alors $i \neq a$ et :

$\exists i(b/a)(i/a)\psi = \exists i(i/a)\psi = \exists a\psi$, donc $a \notin I_{\exists a\psi}$.

Posons $K_h = \bigcup_{n\in N} K_n$.

Il est clair que K_h est une sous-algèbre booléienne de A^J et un ensemble individualisé, les substitutions sont des endomorphismes. Comme $\alpha\exists a\psi = \exists i\,\mathfrak{v}(i/a)\psi$ pour $i \neq \mathfrak{v}$, $i \notin I_\psi$, tout ce qu'il reste à montrer est que : $\exists a\psi = \bigvee_{b\in I}(b/a)\psi$ (où le supremum de la famille $((b/a)\psi)_{b\in I}$ est pris dans K_h et non dans A^J !).

Montrons d'abord que $\exists a\psi\,(\mathfrak{v}) \geqslant \psi(\mathfrak{v})$ pour tout $\mathfrak{v}\in J$ ou encore que $\bigvee_{b\in I}\psi\,((b,i)\mathfrak{v}(i,a)) \geqslant \psi(\mathfrak{v})$ pour $i \neq \mathfrak{v}$, $i \notin I_\psi$.

Or, il existe $e\in I$ tel que $(e/i)\mathfrak{v}(i/a)\psi = \mathfrak{v}\psi$, car si $a \neq b_1,\dots,b_m$ on peut prendre $e = a$, sinon on applique P5. Donc :

$\bigvee_{b\in I}\psi((b,i)\mathfrak{v}(i,a)) \geqslant \psi\,((e,i)\mathfrak{v}(i,a)) = ((e/i)\mathfrak{v}(i/a)\psi)(\emptyset) =$

$= (\mathfrak{v}\psi)(\emptyset) = \psi(\mathfrak{v})$.

Nous en déduisons que $\exists a\psi \geqslant (b/a)\psi$ pour tout $b\in I$, car pour $i\in I$, $i \neq \mathfrak{v}$, $i \neq a,b$, $i \notin I_\psi$ il existe $e\in I$ tel que :

$\mathfrak{v}(b/a)\psi = (e/i)\mathfrak{v}(b/a)(i/a)\psi = (e/i)\mathfrak{v}(i/a)\psi$

en particulier :

$\psi((e,i)\mathfrak{v}(i,a)) = (b/a)\psi(\mathfrak{v})$.

Supposons que $X \in K_h$ et $X \geq (b/a)\psi$ pour tout $b \in I$, c'est-à-dire $X(\mathfrak{v}) \geq ((b/a)\psi)(\mathfrak{v})$ pour tout $\mathfrak{v} \in J$, $b \in I$, alors si $i \notin I_\psi \cup I_X$ et $i \neq \mathfrak{v}$, $X(\mathfrak{v}) = (\mathfrak{v}X)(\emptyset) = (b/i)\mathfrak{v}X(\emptyset) = X((b,i)\mathfrak{v}) \geq (i/a)\psi((b,i)\mathfrak{v}) = \psi((b,i)\mathfrak{v}(i,a))$

pour tout $b \in I$. Ceci entraîne que :

$X(\mathfrak{v}) \geq \bigvee_{b \in I} \psi((b,i)\mathfrak{v}(i,a))$

c'est-à-dire $X \geq \exists a\, \psi$.

P31. Proposition :

Soit A une Q-I-algèbre et E un I-sous-ensemble de A qui engendre A, soit h une application de E dans 2 et K_h la Q-I-algèbre associée à h. Pour tout homomorphisme g de A dans 2 qui prolonge h, il y a équivalence entre :

a) g est validant.

b) L'homomorphisme $\overline{g} : A \to 2^J$ défini par :

$\overline{g}(\alpha)(\mathfrak{v}) = g(\mathfrak{v}\alpha)$ est un Q-I-morphisme de A dans K_h.

Démonstration :

a) entraîne b) : Soit $a \in I$, $\alpha \in A$, alors $\overline{g}(\exists a\alpha)(\mathfrak{v}) = g(\mathfrak{v}\exists a\alpha) =$
$= g(\bigvee_{b \in I} (d/i)\mathfrak{v}(i/a)\alpha)$ pour $i \neq \mathfrak{v}$, $i \notin I_\alpha$. Donc :
$\overline{g}(\exists a\alpha)(\mathfrak{v}) = \bigvee_{b \in I} g((d/i)\mathfrak{v}(i/a)\alpha) = \bigvee_{b \in I} \overline{g}(\alpha)\,(d,i)\mathfrak{v}(i,a)$
et $i \notin I_{\overline{g}(\alpha)}$. Pourvu que $\overline{g}(\alpha) \in K_h$, on en déduit que :

$\overline{g}(\exists a\alpha)(\mathfrak{v}) = \exists a\overline{g}(\alpha)(\mathfrak{v})$ pour tout $\mathfrak{v} \in J$.

Montrons que la restriction $\overline{g}_n$ de $\overline{g}$ à E_n est une I-application de E_n dans K_n.

Par hypothèse, c'est vrai pour n = 0. Cas n+1 : Soit $\alpha \in E_n$, $\upsilon \in J$, alors $\bar{g}(\upsilon(\alpha')) = \bar{g}((\upsilon\alpha)') = \bar{g}(\upsilon\alpha)' = (\upsilon\bar{g}(\alpha))' = \upsilon(\bar{g}(\alpha))' = (\upsilon\bar{g}(\alpha))'$. Par hypothèse de récurrence $\bar{g}(\alpha) \in K_n$, donc $(\upsilon\bar{g}(\alpha))' \in K_{n+1}$. Si $\alpha \in E_n$, alors :

$\bar{g}(\upsilon\exists a\alpha) = \bar{g}(\exists i\,\upsilon(i/a)\alpha) = \exists i\bar{g}(\upsilon(i/a)\alpha)$. Car $\bar{g}(\upsilon(i/a)\alpha) \in K_n$. Or $\exists i\ \bar{g}(\upsilon(i/a)\alpha) = \exists i\upsilon(i/a)\ \bar{g}(\alpha) = \exists a\ \bar{g}(\alpha) \in K_{n+1}$.

Si $\alpha \in E_{n-k}$, $\beta \in E_k$, on voit de la même manière que :

$\bar{g}(\upsilon(\alpha\wedge\beta)) = \upsilon\bar{g}(\alpha\wedge\beta) = \upsilon(\bar{g}(\alpha)\wedge\bar{g}(\beta)) \in K_{n+1}$.

b) entraîne a) : Notons f l'application de K_h dans 2 définie par $f(\varphi) = \varphi(\emptyset)$ pour tout $\varphi \in K_h$. f est un homomorphisme de K_h dans 2 et $f_o\bar{g} = g$. Donc :

$g(\bigvee_{b\in I}(b/a)\alpha) = f_o\bar{g}\,(\exists a\alpha) = f(\exists a\bar{g}(\alpha)) = \bigvee_{b\in I}\bar{g}(\alpha)(b/i)(i/a)) = \bigvee_{b\in I} g((b/i)(i/a)\alpha)$ $= \bigvee_{b\in I} g((b/a)\alpha)$. Car on peut supposer que $i \notin I_\alpha$.

P32. <u>Proposition</u> : Soit TE S-libre sur E. Alors pour toute application h de E dans 2, il existe un et un seul homomorphisme validant $\bar{h}$ de TE dans 2 qui prolonge h.

P33. <u>Proposition</u> : Si f, g et h ont la même signification que dans P32 alors :

a) Pour que $\bar{g}(\exists a\alpha) = \exists a\bar{g}(\alpha)$ il suffit que $\bar{g}(\alpha) \in K_h$ et $g(\bigvee_{b\in I}(b/i)\upsilon\alpha) = \bigvee_{b\in I} g((b/i)\upsilon\alpha)$ pour tout $\upsilon \in J$, $i \in I_o$ où I_o est une partie infinie quelconque de I. (sans démonstration).

b) Si 1 est une I-application de A dans K_h, alors $\overline{f_o 1} = 1$.

<u>Démonstration</u> :

$(\overline{f_o 1}(\alpha))(\upsilon) = f_o 1(\upsilon\alpha) = 1(\upsilon\alpha)(\emptyset) = (\upsilon 1(\alpha))(\emptyset) = 1(\alpha)(\upsilon)$. Pour tout $\upsilon \in J$.

P34. <u>Lemme</u> :

Soit I_o une partie infinie de I, J_o l'ensemble des suites finies d'éléments de I_o, A une Q-I-algèbre et P la partie de A telle que

$\bigcup_{\alpha\in P} I_\alpha \subset I_o$. Si h est un homomorphisme de A dans 2 tel que :

$$h(\bigvee_{b\in I_o} (b/a)\mathfrak{N}\alpha) = \bigvee_{b\in I_o} h((b/a)\mathfrak{N}\alpha)$$

pour tout $a\in I_o, \mathfrak{N}\in J_o$, $\alpha\in P$;

alors il existe $g\in A^*$ tel que $g(\alpha) = h(\alpha)$ pour tout $\alpha\in P$ et

$$g(\bigvee_{b\in I} (b/a)\mathfrak{N}\alpha) = \bigvee_{b\in I} g((b/a)\mathfrak{N}\alpha)$$

pour tout $a\in I, \mathfrak{N}\in J$, $\alpha\in P$.

Démonstration :

Soit $a_o\in I_o, \alpha\in A$, posons :

$$s\alpha = (a_o/c_1)\dots(a_o/c_k)\alpha$$

où $\bigcup_{1\leqslant i\leqslant k} \{c_i\}$ est une partie de $\complement I_o$ contenant $I_\alpha \cap \complement I_o$.

s est bien définie car ces substitutions sont deux à deux permutables. Si $I_\alpha\cap\complement I_o = \emptyset$, alors $(a_o/c_1)\dots(a_o/c_k)\alpha = \alpha$. Si au contraire $I_\alpha\cap\complement I_o = \{c_1,\dots,c_n\}$ avec $c_i \neq c_j$ pour $i\neq j$, alors :

$$(a_o/c_1)\dots(a_o/c_k)\alpha = (a_o/c_1)\dots(a_o/c_n)\alpha$$

pour toute partie $\{c_1,\dots,c_k\}$ de $\complement I_o$ contenant $\{c_1,\dots,c_n\}$.

s est un homomorphisme : en effet, soit $\alpha,\beta\in A$, alors $I_{\alpha\wedge\beta}\subset I_\alpha\cup I_\beta$, donc si $(I_\alpha\cup I_\beta)\cap\complement I_o \subset \{c_1,\dots,c_k\}\subset\complement I_o$, alors :

$$\begin{aligned} s(\alpha\wedge\beta) &= (a_o/c_1)\dots(a_o/c_k)(\alpha\wedge\beta) = (a_o/c_1)\dots(a_o/c_k)\alpha\wedge(a_o/c_1)\dots(a_o/c_k)\beta \\ &= s\alpha \wedge s\beta \end{aligned}$$

Comme $I_\alpha = I_{\alpha'}$, il est clair que $s(\alpha') = (s\alpha)'$.

Posons $g = h_o s$. g est un homomorphisme de A dans 2 et $g(\alpha) = h(\alpha)$ pour $\alpha\in P$. Soit $\mathfrak{N}\in J$, $a\in I$, $\alpha\in P$. Comme $\exists a\mathfrak{N}\alpha = \exists i(i/a)\mathfrak{N}\alpha$ si $i\notin I_{\mathfrak{N}\alpha}$, mais ailleurs quelconque, il suffit de montrer que :

$g(\exists a \mathfrak{v}\alpha) = \bigvee_{b\in I} g((b/a)\mathfrak{v}\alpha)$ pour tout $a\in I_o - \{a_o\}$, $\mathfrak{v}\in J, \alpha\in P$. Or :

$g(\exists a\mathfrak{v}\alpha) = h((a_o/c_1)\ldots(a_o/c_k)\exists a\mathfrak{v}\alpha)$ où $\{c_1,\ldots,c_k\} \supset I_{\mathfrak{v}\alpha} \cap \complement I_o \supset I_{\exists a\mathfrak{v}\alpha} \cap \complement I_o$.

Donc : $g(\exists a\mathfrak{v}\alpha) = h(\exists a(a_o/c_1)\ldots(a_o/c_k)\mathfrak{v}\alpha) = h(\exists a \hat{\mathfrak{v}}\alpha)$

pour un $\hat{\mathfrak{v}}\in J_o$ convenable

$$= h(\bigvee_{b\in I_o} (b/a)\hat{\mathfrak{v}}\alpha) = \bigvee_{b\in I_o} h((b/a)\hat{\mathfrak{v}}\alpha) =$$

$$= \bigvee_{b\in I_o} h((b/a)(a_o/c_1)\ldots(a_o/c_k)\mathfrak{v}\alpha) =$$

$$= \bigvee_{b\in I_o} h((a_o/c_1)\ldots(a_o/c_k)(b/a)\mathfrak{v}\alpha)$$

car $a \neq (a_o, c_i)$ et $c_i \neq (b,a)$ si $b\in I_o$

$$= \bigvee_{b\in I_o} h_o s((b/a)\mathfrak{v}\alpha).$$

Il reste à montrer que : $\bigvee_{b\in I_o} g((b/a)\mathfrak{v}\alpha) = \bigvee_{b\in I} g((b/a)\mathfrak{v}\alpha)$

Si $b\notin I_o$, alors $h_o s((b/a)\mathfrak{v}\alpha) = h((a_o/c_1)\ldots(a_o/c_k)(a_o/b)(b/a)\mathfrak{v}\alpha) =$

$= h((a_o/c_1)\ldots(a_o/c_k)(a_o/b)(a_o/a)\mathfrak{v}\alpha) = h_o s((a_o/a)\mathfrak{v}\alpha)$.

Donc : $\bigvee_{b\in I_o} g((b/a)\mathfrak{v}\alpha) \geq \bigvee_{b\in I} g((b/a)\mathfrak{v}\alpha)$

et l'inégalité réciproque est évidente.

P35. <u>Proposition</u> : Soit A une Q-I-algèbre, K une partie dénombrable de A telle que la seule Q-I-sous-algèbre contenant K soit A. Alors, l'ensemble des homomorphismes validants est partout dense dans A .

<u>Démonstration</u> :

Soit $\alpha_o\in A$, $\alpha_o \neq 0$, I_o une partie dénombrable de I avec $I_{\alpha_o} \cup \bigcup_{\alpha\in K} I_\alpha \subset I_o$.

Posons $E_o = \{\mathfrak{v}\alpha\}_{\mathfrak{v}\in J_o, \alpha\in K}$. E_o est stable pour les substitutions de J_o.

Soit B_o la Q-I_o-sous-algèbre de A engendrée par E_o. On sait que card. $B_o = \aleph_o$ (cf. P21). Montrons que $B = \bigcup_{\mathfrak{v}\in J} \mathfrak{v} B_o$ est une Q-I-sous-algèbre de A conte-

nant K et par conséquent égale à A. Soit $\alpha \in B_o$, $\beta \in B_o$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G} \in J$, alors $\mathfrak{A}\alpha \wedge \mathfrak{G}\beta =$
$=(e_1/d_1)..(e_n/d_n)(d_1/c_1)..(d_n/c_n)\alpha \wedge (e'_1/d'_1)..(e'_n/d'_n)(d'_1/c'_1)..(d'_n/c'_n)\beta$
(forme simultanée) où $d_i \neq c_j$, e_j pour tout i,j, $d_i \neq d_j$ pour $i \neq j$ mais autrement quelconques. Choisissons donc d_i, $d'_i \in I_o$: tels que $d_j \neq d'_i$, e'_i pour tout i, j , alors :
$= (e_1/d_1)..(e_n/d_n)(e'_1/d'_1)..(e'_n/d'_n)((d_1/c_1)..(d_n/c_n)\alpha \wedge (d'_1/c'_1)..(d'_n/c'_n)\beta)=$
$= \mathfrak{T}\gamma$ où $\mathfrak{T} \in J$ et $\gamma \in B_o$.

D'autre part $(\mathfrak{A}\alpha)' = \mathfrak{A}\alpha'$ avec $\alpha' \in B_o$ si $\alpha \in B_o$ et $\exists a \mathfrak{A}\alpha = \exists i(i/a)\mathfrak{A}\alpha$ pour un $i \in I_o$ convenable.

Or, $(i/a)\mathfrak{A}\alpha = (e_1/d_1)...(e_n/d_n)(d_1/c_1)...(d_n/c_n)\alpha$ où l'on peut prendre $d_j \in I_o$, $d_j \neq i$ et vérifiant les conditions usuelles. Soit $(e_{j_1},...,e_{j_k})$ la sous-suite de $(e_1,...,e_n)$ telle que $e_{j_r} \notin I_o$ pour $1 \leq r \leq k$, mais $e_j \in I_o$ si $j \neq j_r$ alors
$\exists i(i/a)\mathfrak{A}\alpha = (e_{j_1}/d_{j_1})..(e_{j_k}/d_{j_k})\exists i(e_{n_1}/d_{n_1})..(e_{n_{n-k}}/d_{n_{n-k}})(d_1/c_1)..(d_n/c_n)\alpha =$
$= \mathfrak{T}\exists i\beta$ avec $\beta \in B_o$, $i \in I_o$, $\mathfrak{T} \in J$.

Comme B_o est dénombrable il existe $h \in LE^*$ tel que :
$$h(\bigvee_{b \in I_o} (b/a)\mathfrak{A}\alpha) = \bigvee_{b \in I_o} h((b/a)\mathfrak{A}\alpha)$$
pour tout $a \in I_o$, $\mathfrak{A} \in J_o$, $\alpha \in B_o$ et $h(\alpha_o) = 1$.
En effet, $h(\bigvee_{b \in I_o} (b/a)\mathfrak{A}\alpha) = \bigvee_{b \in I_o} h((b/a)\mathfrak{A}\alpha)$ équivaut à :
$h \in \mathcal{V}_{\mathfrak{A},\alpha,a} = \bigcup_{b \in I_o} \tau((b/a)\mathfrak{A}\alpha) \cup \tau((\bigvee_{b \in I_o}(b/a)\mathfrak{A}\alpha)')$ où τ est l'isomorphisme de Stone. Comme $\mathcal{V}_{\mathfrak{A},\alpha,a}$ est un ouvert partout dense de A^*, $\mathcal{V}_o = \bigcap_{\substack{a \in I_o \\ \mathfrak{A} \in J_o \\ \alpha \in B_o}} \mathcal{V}_{\mathfrak{A},\alpha,a}$

est encore partout dense dans A^* (théorème de Baire).

D'après P34, il existe $g \in LE^*$ tel que :

$$g\left(\bigvee_{b \in I} (b/a)\varkappa\beta\right) = \bigvee_{b \in I} g((b/a)\varkappa\beta) \text{ et } g(\alpha) = h(\alpha) \text{ pour tout } \alpha \in B_o,$$

pour tout $a \in I, \varkappa \in J$, $\beta \in B_o$, donc pour tout $a \in I$ et tout $\alpha \in A$. Comme $I_{\alpha_o} \subset I_o$, $g(\alpha_o) = h(\alpha_o) = 1$

P.36. Proposition :

Soit E un I-ensemble, TE S-libre sur E. Alors l'ensemble V des homomorphismes validants (cf. P.20) de TE est partout dense dans l'espace dual TE^* de TE.

Démonstration :

Soit $\alpha_o \in TE$, $\alpha_o \neq 0$. Il existe une partie dénombrable (même finie, cf. P.9) E_o de E telle que α_o appartienne à la Q-I-algèbre B engendrée par E_o. Soit h un homomorphisme validant de B tel que $h(\alpha_o) = 1$. Nous prolongeons h en un homomorphisme validant g de TE en posant pour $\alpha \in E$:

$$g(\alpha) = \begin{cases} h(\alpha) & \text{s'il existe } \varkappa \in J,\ \beta \in E_o : \alpha = \varkappa\beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

P.37. Proposition :

Soit A une Q-I-algèbre quelconque, V l'ensemble des homomorphismes validants de A, alors $\bar{V} = A^*$ si et seulement si A est isomorphe à une Q-I-algèbre C, sous-algèbre d'une algèbre $P(X)$ et telle que :

$$\exists a\beta = \bigcup_{b \in I} (b/a)\beta \text{ pour tout } \beta \in C,\ a \in I$$

on peut supposer que $X = V$.

Démonstration :

A sera identifiée avec A^{**} (algèbre des ofs de A) ; comme $V \subset A^*$, on peut définir un homomorphisme ψ: $A \to P(V)$ en posant : $\psi(\alpha) = \alpha \cap V$

Les éléments de A formant une base de la topologie de $A^*\psi$ est injectif si et seulement si V est partout dense dans A^*.

Donc, si $\overline{V} = A^*$, on peut munir $C = \psi(A)$ d'une structure de Q-I-algèbre, isomorphe à celle de A et alors :

$\exists a\psi(\alpha) = \psi(\bigvee_{b\in I} (b/a)\alpha) = \bigvee_{b\in I} (b/a)\alpha\cap V$.

or " $h\in \bigvee_{b\in I} (b/a)\alpha\cap V$" équivaut à : " il existe $b\in I$ $h(b/a)\alpha = 1$ et $h\in V$ " ce qui équivaut encore à " il existe $b\in I$, $h\in(b/a)\alpha$ et $h\in V$ ". Donc, on a bien :

$\exists a\ \psi(\alpha) = \bigcup_{b\in I} (b/a)\alpha\cap V = \bigcup_{b\in I} (b/a)\psi\ (\alpha)$.

Si A est isomorphe à une telle Q-I-algèbre C, alors pour $x\in X$, l'application $f_x : C\to 2$ définie par " $f_x(\beta) = 1$ si et seulement si $x\in\beta$ ", est un homomorphisme validant et si $\beta \neq 0$, il existera toujours f_x tel que $f_x(\beta) = 1$, ce qui signifie que $\overline{V} = C^*$.

P.38. Proposition :

Soit E un I-ensemble. Alors il existe un isomorphisme de Q-I-algèbres f de TE sur une sous-algèbre de $P(2^E)$ tel que :

$f(\alpha) = \{h\in 2^E\ ;\ h(\alpha) = 1\}$ pour $\alpha\in E$

$\exists af(\alpha) = \bigcup_{b\in I} (b/a)f(\alpha)$ pour $\alpha\in TE$

Démonstration :

Avec les notations de la proposition P.37, TE est isomorphe par ψ à une sous-algèbre de $P(V)$ telle que $\exists a\ \psi(\alpha) = \bigcup_{b\in I} (b/a)\psi\ (\alpha)$.

Or, V est en bijection avec 2^E par l'application φ qui associe à un homomorphisme validant sa restriction à E, donc $P(V)$ est isomorphe à $P(2^E)$ par $\overline{\varphi}$, extension de φ à $P(V)$. Alors l'homomorphisme $f = \overline{\varphi}\circ\psi$ a les propriétés voulues.

P.39. Proposition :

Soit E un I-ensemble, TE S-libre sur E et φ l'application de V dans 2^E qui à $h\in V$ associe sa restriction à E. Alors il y a équivalence entre :

a) φ est bicontinue.

b) $V = 2^E$ (en tant qu'espace topologique).

c) $V =$ LE*

d) L'individualisation de E est triviale.

Démonstration :

Il est évident que a), b), c) sont équivalents. Montrons que a) entraîne d). Si l'individualisation de E est non triviale, il existe $\alpha\in E$ $I_\alpha \neq \emptyset$. Soit $a\in I_\alpha$, la famille $((b/a)\alpha)_{b\in I}$ a même cardinal que I. (cf. (3)).

Soit $h\in 2^E$ avec $h((b/a)\ ) = 0$ pour tout $b\in I$, alors : $\varphi^{-1}(h)((\exists a\alpha)') = 1$. Soit U un voisinage élémentaire de h (i.e. un ensemble élémentaire contenant h) ; $g\in U$ équivaut à $h(\beta_i) = g(\beta_i)$ $1\leq i\leq n$ pour une certaine suite $((\beta_i)_{1\leq i\leq n})$ d'éléments de E. Donc il existe $b\in I$, $(b/a)\alpha \neq \beta_i$ $1\leq i\leq n$ et par conséquent il existe $g\in U$ avec $g((b/a)\alpha) = 1$. Donc : $\varphi^{-1}(g)((\exists a\alpha)') = 0$, ce qui signifie que l'application φ^{-1}, réciproque de φ, n'est pas continue.

d) entraîne a) : en effet, TE est alors isomorphe à l'algèbre de Boole libre sur l'ensemble E.

P.40. Corollaire :

Soit $h\in 2^E$. S'il existe $\alpha\in E$, $a\in I_\alpha$ tels que $h((b/a)\alpha) = 0$ (ou 1) pour tout $b\in I$, alors h est un point de discontinuité de φ^{-1}.

P.41. Proposition :

Si $E = \coprod_{\lambda\in L} I^{n_\lambda}$ et s'il existe $n_\lambda \geq 2$, alors φ^{-1} est discontinue en tout point de 2^E. (Les notations sont celles de P.39).

Démonstration :

Compte tenu du corollaire P.40 nous montrerons que φ^{-1} est discontinu en un point $h\in 2^E$ qui véfifie $h((b/i)\alpha) \neq$ constant, pour tout $\alpha\in E$, $i\in I_\alpha$.

Par hypothèse, il existe a, $b\in I$, $a \neq b$, et $\alpha\in E$ tels que a, $b\in I_\alpha$. Soit $d\in I$ quelconque. Par hypothèse, $i\in I_{(d/b)(i/a)\alpha}$ pour $i \neq (d,b)$, $i\notin I_\alpha$, donc il existe $c\in I$ $h((c/i)(d/b)(i/a)\alpha) = 1$, c'est-à-dire $\varphi^{-1}(h)(d/b)\exists a\alpha) = 1$. d étant arbitraire, il s'en suit que $\varphi^{-1}(h)(\forall b\ \exists a\alpha) = 1$.

Soit maintenant $\mathcal{U}$ un voisinage élémentaire de h, montrons qu'il existe $g\in\mathcal{U}$ tel que $\varphi^{-1}(g)(\forall b\ \exists a\alpha) = 0$. Soit $\mathcal{U}$ déterminé par la suite $\beta_1,\dots,\beta_n$. Si $d\in I$ est tel que $d\notin\bigcup_{i=1}^{n} I_{\beta_i}$, alors pour tout $c\in I$ $(c/i)(d/b)(i/a)\alpha \neq \beta_i$ pour $1\leq i\leq n$, car alors $d\in I_{(c/i)(d/b)(i/a)\alpha}$. Nous en déduisons qu'il existe $g\in\mathcal{U}$ avec $g(c/i)(d/b)(i/a)\alpha = 0$ pour tout $c\in I$, c'est-à-dire : $\varphi^{-1}(g)(\forall b\exists a\alpha) = 0$.

P.42. Corollaire :

Si E est un I-ensemble qui vérifie :

$a\in I_\alpha \Rightarrow I_{(b/a)\alpha} = (I_\alpha-\{a\})\cup\{b\}$ pour tout $b\in I$

et s'il existe $\alpha\in E$ avec card. $I_\alpha\geq 2$, alors φ^{-1} est discontinu en tout point de 2^E.

P.43. Proposition :

Si E = I; alors φ^{-1} est discontinue aux points 0 et 1 de 2^E et continue en tous les autres points de 2^E.

Démonstration :

Montrons que TE est le sous-anneau booléien C de $P(2^E)$ engendré par $E\cup\{\omega_o\}\cup\{\omega_1\}$ où

$$\omega_o = \bigcup_{b\in I} (b/a)a'$$
$$\omega_1 = \bigcup_{b\in I} (b/a)a$$

Remarquons d'abord que si $\alpha\in E\cup E'$ et si $a\in I_\alpha$, alors :

$$\bigcup_{b\in I}(b/a)\alpha = \begin{cases} \omega_0 \text{ si } \alpha\in E' \\ \omega_1 \text{ si } \alpha\in E \end{cases}$$

de plus, $I_{\omega_0} = I_{\omega_1} = \emptyset$. C étant stable pour les substitutions il nous reste à montrer que C est stable pour les quantificateurs :

Soit $\beta\in C$, $\bigcup_{b\in I}(b/a)\beta = \gamma\cup\bigcup_{b\in I}(b/a)((a\cap\alpha_1)\cup(a'\cap\alpha_0))$ où γ, α_1, $\alpha_0\in C$ et $a\notin I_\gamma \cup$ $\cup I_{\alpha_1} \cup I_{\alpha_0}$.

Soit $h\in\omega_1\cap\alpha_1$, il existe $b\in I$ $h((b/a)a) = 1$, donc $h\in(b/a)a\cap\alpha_1$. De même si $g\in\omega_0\cap\alpha_0$, il existe $c\in I$ $h\in(c/a)a'\cap\alpha_0$, par conséquent :

$(\omega_1\cap\alpha_1)\cup(\omega_0\cap\alpha_0)\subset\bigcup_{b\in I}(b/a)((a\cap\alpha_1)\cup(a'\cap\alpha_0))$. Comme nous avons aussi l'inclusion réciproque, nous en déduisons que :

$\bigcup_b(b/a)((a\cap\alpha_1)\cup(a'\cap\alpha_0)) = (\omega_1\cap\alpha_1)\cup(\omega_0\cap\alpha_0)$ et que $\bigcup_{b\in I}(b/a)\beta\in C$.

Si maintenant $h\in 2^E$ et $h\neq 0$ et $h\neq 1$, alors $h\in\omega_1\cap\omega_0$ et nous pouvons supposer qu'un voisinage $\mathcal{U}$ de $\varphi^{-1}(h)$ dans TE^* est de la forme :

$\mathcal{U} = \tau(\gamma_1\wedge\ldots\wedge\gamma_n\wedge\omega_0\wedge\omega_1)$ où $\gamma_i\in E\cup E'$ et où τ est l'isomorphisme de Stone.

Soit $\alpha_0\in E$ tel que $h(\alpha_0) = 0$ et $\alpha_1\in E$ tel que $h(\alpha_1) = 1$, alors $\mathcal{U}_0 = \alpha'_0\cap\alpha_1\cap\gamma_1\cap\ldots\cap\gamma_n$ est un voisinage élémentaire de h dans 2^E et $\varphi^{-1}(\mathcal{U}_0)\subset\mathcal{U}$ comme on le vérifie aisément.

Précisons la notion d' " homomorphisme validant " : un homomorphisme validant de la Q-I-algèbre A est un homomorphisme $h\in A^*$ qui vérifie :

$$h(\bigvee_{b\in I}(b/a)\alpha) = \bigvee_{b\in I}h((b/a)\alpha) \text{ pour tout } \alpha\in A,\ a\in I.$$

Un homomorphisme validant de la Q-I_0-algèbre A est un homomorphisme h A qui vérifie : $h(\bigvee_{b\in I_0}(b/a)\alpha) = \bigvee_{b\in I_0}h((b/a)\alpha)$ pour tout $\alpha\in A$, $a\in I_0$.

Nous aurons besoin des lemmes suivants :

P.44. <u>Lemme</u> :

Soit I_0 une partie infinie de I, E_0 un I_0-sous-ensemble de l'I-ensemble E

Alors TE_o est isomorphe à la Q-I_o-sous-algèbre de TE engendrée par E_o.

Démonstration :

La surjection $f : 2^E \to 2^{E_o}$ qui à $h \in 2^E$ fait correspondre sa restriction à E_o définit un homomorphisme injectif f^* de $P(2^{E_o})$ dans $P(2^E)$ par $f^*(p) = f^{-1}(p)$ pour tout $p \in P(2^{E_o})$. f^* est une bijection de E_o (identifié à une partie de $P(2^{E_o})$) sur E_o (identifié à une partie de $E \subset P(2^E)$). f commute aux substitutions sur E_o.

De plus, f^* commute à tous les supremums de $P(2^{E_o})$. Il reste à montrer que f^* commute aux substitutions sur TE_o et ceci n'est plus qu'une question d'écriture.

Soit P une partie d'un I-ensemble, nous noterons I_p la réunion des I_α pour α dans P et nous appelerons I_p la base de P.

P.45. Lemme :

Soit A une Q-I-algèbre, B une sous-algèbre (booléienne) de A, $\alpha \in A$, $c \in I$, $c \notin I_B \cup I_\alpha$, $\exists a\alpha \in B$, $g \in B^*$ et $g(\exists a\alpha) = 1$.

Si l'ensemble des homomorphismes validants V de A est partout dense dans A^*, alors il existe un prolongement h de g à A avec $g((c/a)\alpha) = 1$.

Démonstration :

Soit τ l'isomorphisme de Stone de A dans $P(A\ )$. Si :

$$(\bigcap_{\beta \in B} \tau_\beta) \cap \tau_{(c/a)\alpha} = \emptyset$$

$$g(\beta) = 1$$

alors il existe un nombre fini de $\beta_i \in B$ tels que :

$$\tau_{\beta_1} \cap \dots \cap \tau_{\beta_n} \cap \tau_{(c/a)\alpha} = \emptyset$$

donc $\tau_\beta \cap \tau_{(c/a)\alpha} = \emptyset$ où $\beta = \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n \in B$ et $g(\beta) = 1$

comme $c \notin I_\beta \cup I_\alpha$, nous en déduisons que $\tau_\beta \cap \tau_{(b/a)\alpha} = \emptyset$ pour tout $b \in I$.

Or, g possède un prolongement $\bar{g}$ à A ; $\bar{g}\in\tau_\beta\cap\tau_{\exists a\alpha}$. L'ensemble V étant dense dans A^*, il existe $h\in\tau_\beta\cap\tau_{\exists a\alpha}\cap V$ et par conséquent $h\in\tau_\beta\cap\tau_{(b/a)\alpha}$ pour un $b\in I$ au moins, contradiction.

P. 46. Proposition :

Soit ξ un cardinal, $\xi\geq\aleph_0$. Soit :

a) $A = TE$, E étant un I-ensemble.

b) A une Q-I-algèbre et $\xi = \aleph_0$.

Soit $I_0\subset I$, card. $I_0 = \xi$ et card. $(I-I_0)\geq\xi$. Soit B_0 une Q-I_0-sous-algèbre de A, card. $B_0 = \xi$, $I_{B_0}\subset I_0$ et dans le cas a), nous supposerons que B_0 est la Q-I_0-sous-algèbre de A engendrée par I_0-sous-ensemble E_0 de E.

Alors pour tout $h_0\in B_0$, il existe une partie $\tilde{I}$ de I, $I_0\subset\tilde{I}$, card. $\tilde{I} = \xi$ et un homomorphisme validant $\tilde{h}$ de $\tilde{B}$ ($\tilde{B}$ étant la Q-$\tilde{I}$-sous-algèbre engendrée par B_0) qui prolonge h_0.

Démonstration :

Nous montrerons par récurrence sur n qu'il existe $I_n\subset I$ tel que :

1) $I_{n-1}\subset I_n$.

2) card. $I_n = \xi$

3) card. $(I-I_n)\geq\xi$

4) Si B_n est la Q-I_n-sous-algèbre engendrée par B_0 alors card. $B_n = \xi$ et $I_{B_n}\subset I_n$; dans le cas a), B_n est engendrée par E_n lui-même I_n-ensemble engendré par E_0.

5) Il existe h_n et B_n^* prolongeant h_{n-1} et vérifiant :

$h_n(\exists a\alpha) = \bigvee_{b\in I_n} h_n((b/a)\alpha)$ pour tout $\alpha\in B_{n-1}$ et tout $a\in I$.

C'est vrai pour n = 0.

cas n+1 : Posons $I_{n_0} = I_n$, $B_{n_0} = B_n$, $h_{n_0} = h_n$. Soit $K \subset I - I_n$ tel que card. $K = \xi \leq$ card. $(I - I_n - K)$.

Considérons d'autre part l'ensemble C formé des couples (α, a) où $\alpha \in B_n$ et $a \in I_\alpha$. C et K ont même cardinal, munissons-les d'un bon ordre :

$C = \{(\alpha_1, a_1), \dots, (\alpha_i, a_i), \dots\}_{i<\gamma}$.

$K = \{c_1, \dots, c_i, \dots\}_{i<\gamma}$.

Posons maintenant $I_{n_i} = I_n \cup \{c_1, \dots, c_i\}$ et soit B_{n_i} la Q-I_{n_i}-sous-algèbre de A engendrée par B_n, ceci pour $i \geq 1$.

Alors card.$I_{n_i} = \xi =$ card.B_{n_i}, $I_{B_{n_i}} \subset I_{n_i}$ et dans le cas a), B_{n_i} est engendrée par le I_{n_i}-sous-ensemble de A E_{n_i} engendré par E_n. Montrons par récurrence sur i qu'il existe $h_{n_i} \in B^*_{n_i}$ prolongeant h_{n_j} pour $j<i$ et vérifiant :

$(*)$ $\quad h_{n_i}(\exists a_j\ \alpha_j) = \bigvee_{b \in I_{n_i}} h_{n_i}((b/a_j)\ \alpha_j)$ pour $1 \leq j \leq i$.

C'est vrai pour i = 0. Supposons le vrai pour tout $j<i$ et montrons-le pour i $(i \geq 1)$.

Posons $L = \bigcup_{j<i} I_{n_j}$, $D = \bigcup_{j<i} B_{n_j}$, $g(\alpha) = h_{n_j}(\alpha)$ pour $\alpha \in B_{n_j}$.

Alors $I_D \subset L$, D est la Q-L-sous-algèbre de A engendrée par B_o et $g \in D^*$. Par ailleurs g vérifie pour $j<i$:

$$g(\exists a_j\ \alpha_j) = h_{n_k}(\exists a_j\ \alpha_j) = \bigvee_{b \in I_{n_k}} h_{n_k}((b/a_j)\ \alpha_j) = \bigvee_{b \in I_{n_k}} g((b/a_j)\ \alpha_j)$$

pour tout k, $j \leq k < i$.

Par conséquent : $g(\exists a_j\ \alpha_j) = \bigvee_{b \in L} g((b/a_j)\alpha_j)$.

Si $g(\exists a_i\ \alpha_i) = \bigvee_{b \in L} g((b/a_i)\alpha_i)$, alors n'importe quel $h_{n_i} \in B^*_{n_i}$ prolongeant g (il en existe toujours) vérifie $(*)$ pour $1 \leq j \leq i$. Sinon, on a nécessairement

$g(\exists a_i \alpha_i) = 1$. Pour appliquer le lemme P.45, remarquons d'abord que l'ensemble des homomorphismes validants est partout dense dans B_{n_i}. Dans le cas b) puisque B_{n_i} est dénombrable et dans le cas a) puisque B_{n_i} est la Q-I_{n_i}-algèbre libre sur E_{n_i} (P.44). Ensuite $c_i \notin L$, donc $c_i \notin I_D$ et $c_i \notin I_{\alpha_i}$. Donc les hypothèses du lemme P.45 sont bien vérifiées. Ceci achève la récurrence sur i.

Posons $I_{n+1} = \bigcup_{0 \leq i < \gamma} I_{n_i}$, $B_{n+1} = \bigcup_{0 \leq i < \gamma} B_{n_i}$, $h_{n+1}(\alpha) = h_{n_i}(\alpha)$ pour $\alpha \in B_{n_i}$.

Alors $I_n \subset I_{n+1}$, card. $I_{n+1} = \xi$, card. $(I - I_{n+1})$ = card. $(I - I_n - K) \geq \xi$.

De plus, B_{n+1} est la Q-I_{n+1}-sous-algèbre de A engendrée par B_n donc par B_o.

Dans le cas a), B_{n+1} est Q-I_{n+1}-engendré par E_{n+1}, I_{n+1}-sous-ensemble de A engendré par E_o. Nous avons aussi card. $B_{n+1} = \xi$ et $I_{B_{n+1}} \subset I_{n+1}$, h_{n+1} prolonge h_n et vérifie :

$$h_{n+1}(\exists a\alpha) = \bigvee_{b \in I_{n+1}} h_{n+1}((b/a)\alpha) \quad \text{pour tout } \alpha \in B_n,\ a \in I.$$

Ceci achève la récurrence sur n.

Posons $\tilde{I} = \bigcup_{n \geq o} I_n$, $\tilde{B} = \bigcup_{n \geq o} B_n$, $h(\alpha) = h_n(\alpha)$ pour $\alpha \in B_n$, I, B et h ont les propriétés voulues et la proposition est démontrée.

Nous dirons qu'une partie P d'une Q-I-algèbre A est compatible avec h A si $h(\alpha) = 1$ pour tout $\alpha \in P$. P sera dite compatible, s'il existe $h \in A$ avec lequel P est compatible.

P.47. <u>Corollaire</u> :

Soit E un I-ensemble, P une partie compatible de TE telle que card. $I_P \leq$ card. $(I - I_P)$, alors il existe $\tilde{I} \subset I$ tel que card. $\tilde{I}$ = max(χ_o, card. P) et un $\tilde{I}$-sous-ensemble $\tilde{E}$ de E tel que $P \subset T\tilde{E}$ et un homomorphisme validant $\tilde{h}$ de $T\tilde{E}$ compatible avec P.

Démonstration :

Soit $\alpha \in TE$, il existe une suite finie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ d'éléments de TE vérifiant l'une des propriétés suivantes :

1) $\alpha_i \in E$

2) Il existe k $1 \leq k < i$ $\alpha_i = \alpha'_k$

3) Il existe k, l $1 \leq k, l < i$ $\alpha_i = \alpha_k \wedge \alpha_l$

4) Il existe k $1 \leq k < i$ et $a \in I_{\alpha_k}$ $\alpha_i = \exists a \alpha_k$

5) $\alpha_n = \alpha$

(cf. proposition P.20, § 2).

Choisissons pour chaque $\alpha \in \overline{P}$ une telle suite et soit $\overline{P}$ la réunion de ces suites. Alors card. $\overline{P} \leq \xi = \max(\chi_0, \text{card.}P)$, de même card. $I_{\overline{P}} \leq \xi$. Soit I_0 une partie de I telle que card. $I_0 = \xi \leq \text{card.}(I - I_0)$ et contenant $I_{\overline{P}}$. Posons $\overline{P}_0 = \overline{P} \cap E$, alors $\overline{P}$ est contenue dans la Q-I_0-algèbre B_0 engendrée par $\overline{P}_0$ et card. $B_0 = \xi$. On s'est ramené aux hypothèses de P.46.

P.48. Proposition : (Löwenheim-Skolem)

Soit P une partie compatible et infinie de TE, alors il existe $\tilde{I} \subset I$, card. $\tilde{I}$ = card. P et un endomorphisme $\overline{\rho}$ de TE injectif sur P tel que $I_{\overline{\rho}(P)} \subset \tilde{I}$. De plus, $\overline{\rho}(P) \subset T\tilde{E}$ où $\tilde{E}$ est un $\tilde{I}$-sous-ensemble de E et $\overline{\rho}(P)$ est compatible avec un homomorphisme validant de $T\tilde{E}$.

Démonstration :

Soit $\rho : I \to I$ une application injective sur I_P et vérifiant card. $(I - \rho(I_P)) \geq$ card.$(\rho(I_P))$; de ρ nous déduisons un endomorphisme $\overline{\rho}$ de TE par :

$\overline{\rho}(\alpha) = s(\rho(a)/a)$ où $a = (a_1, \ldots, a_m)$, $I_\alpha = \{a_1, \ldots, a_m\}$ et $\rho(a) = (\rho(a_1), \ldots, \rho(a_m))$.

Soit $\tau : I \to I$ tel que $\tau\rho(a) = a$ pour $a \in I_P$. Alors pour $\alpha \in P$:

$\bar{\tau}\bar{\rho}(\alpha) = s(a/\ \rho(a))s(\rho(a)/a)\alpha \ = (a_1/j_1)\dots(j_1/\rho(a_1))(\rho(a_1)/i_1)\dots(i_1/a_1)\alpha$

avec des i_k et des j_k convenables,

$$= (a_1/j_1)\dots(j_1/\rho(a_1)(j_1/i_1)\dots(i_1/a_1)\alpha =$$

$$= (a_1/j_1)\dots(a_m/j_m)(j_1/i_1)\dots(i_1/a_1)\alpha =$$

$$= (a_1/i_1)\dots(a_m/i_m)(i_m/a_m)\dots(i_1/a_1)\alpha = \alpha$$

Donc card. $(\bar{\rho}(P))$ = card.(P), card.$(I-I_{\bar{\rho}(P)}) \geq$ card.$I_{\bar{\rho}(P)}$ car $I_{\bar{\rho}(P)} \subset \rho(I_p)$.

$\bar{\rho}(P)$ est encore une partie compatible de TE, car si $h \in TE^*$ avec $h(\alpha) = 1$ pour tout $\alpha \in P$, alors $h_o\ \bar{\tau}(\beta) = 1$ pour tout $\beta \in \rho(P)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] - HALMOS : Lectures ou Boolean Algebras
Van Nostrand, Mathematical Studies, 1963.

[2] - HALMOS : Algebraic Logic
Chelsea Publishing Company, 1962.

[3] - PONASSE : Problèmes d'Universalité s'introduisant dans l'Algèbrisation de la Logique Mathématique.
Nagoya, Mathematical Journal, 1962.

[4] - PONASSE : Logique Mathématique.
O.C.D.L. France (en cours d'impression).

[5] - PUPIER : Les Catégories Complètes.
PUB. DEP. MATH. LYON, 2(1965) n° 2, p. 1 - 65.

[6] - PRELLER : La Liberté des Algèbres de Boole et des Espaces de Boole par rapport aux ensembles.
PUB. DEP. MATH. LYON, 3(1966) n° 1.

Manuscrit remis le 15 octobre 1966.

Anne PRELLER
Assistant Etranger
Département de Mathématiques
15, quai Claude Bernard, LYON