PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

P. BETHOUX
A. DUSSAUCHOY

# Détection d'un signal certain noyé dans un bruit aléatoire, à l'aide d'un dispositif linéaire

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1966, tome 3, fascicule 4 , p. 75-81
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1966__3_4_75_0>

# DETECTION D'UN SIGNAL CERTAIN NOYE DANS UN BRUIT ALEATOIRE, A L'AIDE D'UN DISPOSITIF LINEAIRE

P. BETHOUX et A. DUSSAUCHOY

## INTRODUCTION - POSITION DU PROBLEME.

En traitement du signal, on rencontre le problème suivant [6] : on observe pendant un certain intervalle de temps une fonction aléatoire qui peut être soit la superposition d'un signal connu et certain, et d'un bruit aléatoire dont les caractéristiques peuvent être supposées connues, soit le bruit précédent tout seul. Et l'on cherche un critère pour décider s'il y a signal plus bruit ou bruit tout seul. Il s'agit d'un test entre 2 hypothèses sur le moyenne d'une fonction aléatoire dont on observe une trajectoire. (Nous ne restreignons pas la généralité du problème en supposant que la moyenne du bruit est nulle ; ce que nous ferons dans la suite).

Dans la pratique, la décision évoquée plus haut est effectuée au vu de la valeur numérique d'une quantité fonction de l'observation. Les spécialistes du traitement du signal utilisent souvent pour comparer des dispositifs élaborant diverses fonctions de l'observation, la quantité connue sous le nom de rapport signal sur bruit, c'est-à-dire le rapport de la puissance de la "réponse" du dispositif au signal seul sur celle de la réponse du dispositif au bruit seul.

Nous allons voir dans ce qui suit que si le signal appartient à une certaine famille, le dispositif linéaire qui rend maximum le rapport signal sur bruit élabore dans le cas de Laplace-Gauss une fonction linéaire du logarithme du rapport de vraisemblance. Ce dispositif permet donc dans ce cas de prendre une décision optimale car le rapport de vraisemblance constitue un résumé exhaustif pour le test considéré ([2] [4]).

Ce résultat souvent évoqué, n'est à notre connaissance* pas établi explicitement en dehors de cas particuliers (cas discret, cas stationnaire...).

## I - NOTATIONS - RAPPELS.

Soient :

un espace mesurable $(\Omega,B)$

un processus stochastique $\{x_t, t\ T\}$ défini sur cet espace

deux probabilités $P_0$ et $P_1$ définies sur $B$ et telles que

$$E_0(x_t) = 0 \quad \text{pour tout } t\in T$$

$$E_0(x_t x_s) = E_1\{[x_t - E_1(x_t)]\ [\overline{x_s - E_1(x_s)}]\} = R(t,s) \quad \text{pour } s \text{ et } t\in T$$

[$E_i(x)$ désigne l'espérance mathématique de la variable aléatoire $x$ par rapport à $P_i$].

Désignons par

$$P_2 = \frac{P_0+P_1}{2}$$

$H_i$ $(i = 0,1,2)$ l'espace de Hilbert des classes de variables aléatoires définies sur $(\Omega,B)$ (égales presque-sûrement $P_i$) qui ont un second moment fini par rapport à $P_i$ , muni du produit scalaire habituel : $\langle x,y\rangle_i = E_i(x\ \bar{y})$

* Monsieur le Professeur R. FORTET nous a signalé que Monsieur RICATTE pourrait avoir un résultat semblable dans une thèse de 3e cycle à soutenir sous peu.

$\mathfrak{X}_i$ le sous-espace de Hilbert de $H_i$ engendré par les $x_t$ pour $t\in T$.

$\Phi(R)$ l'espace de Hilbert des fonctions numériques, définies sur T et de la forme

$$t \to E_o(x_t\overline{v}) \text{ avec } v\in\mathfrak{X}_o$$

muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire ponctuelles et du produit scalaire défini par

$$<\phi_1,\phi_2> = E_o(v_2\overline{v}_1)$$

si

$$\phi_j(t) = E_o(x_t\overline{v}_j)$$

on peut constater assez facilement que cet espace ne dépend que de R, [5] .

Si la fonction $\phi : t \to E_1(x_t)$, appartient à $\Phi(R)$, alors il existe K tel que

$$|E_1(u)|^2 \leq K\, E_o(|u|^2) \text{ pour tout } u\in\mathfrak{X}_2$$

On peut facilement en déduire que, dans ce cas,

- $\mathfrak{X}_2$ est encore un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u,v) = E_o(u\,\overline{v})$$

- L'application U qui à tout $v\in\mathfrak{X}_2$ associe la fonction $t \to E_o(x_t\,\overline{v})$ est une application biunivoque de $\mathfrak{X}_2$ sur $\Phi(R)$ et

$$<\phi_1,\phi_2> = E_o(U^{-1}\phi_2\overline{U^{-1}\phi_1}) \text{ pour tous } \phi_1 \text{ et } \phi_2\in\Phi\ (R).$$

## II - OPTIMISATION DU RAPPORT SIGNAL SUR BRUIT.

Nous appellerons filtrée linéaire de $\{x_t, t\in T\}$ pour $P_o$ et $P_1$ , toute variable aléatoire qui est soit combinaison linéaire de $x_t$ avec $t\in T$, soit limite en moyenne quadratique $P_o$ et $P_1$ d'une suite de telles combinaisons linéaires. Alors en identifiant les variables aléatoires égales presque-sûrement $P_o$ et $P_1$ , l'espace des filtrées linéaires de $\{x_t, t\in T\}$ pour $P_o$ et $P_1$ est $\mathfrak{X}_2$.

Le rapport signal sur bruit pour le dispositif linéaire qui donne $\xi\in\mathfrak{X}_2$ est donné par

$$\rho = \frac{|E_1(\xi)|^2}{E_0(|\xi|^2)}$$

Si la fonction $\phi : t \to E_1(x_t)$ [signal] appartient à l'espace $\Phi(R)$, alors en désignant par $v = U^{-1}\phi$, on a

$$E_1(\xi) = E_0(\xi\,\bar{v}).$$

Par suite

$$\rho = \frac{|E_0(\xi\, v)|^2}{E_0(|\xi|^2)} \qquad \text{est maximum pour}$$

$$\xi = c\, v \text{ où } c \text{ est un scalaire quelconque.}$$

Et le rapport signal sur bruit maximum est alors

$$\rho \max = E_0(|v|^2) = ||U^{-1}\phi||^2$$

III - <u>CAS DE LAPLACE-GAUSS</u>.

Supposons que la loi temporelle de $\{x_t, t\in T\}$ soit de Laplace-Gauss pour $P_0$ et $P_1$.

Nous savons que les restrictions $P'_0$ et $P'_1$ de $P_0$ et $P_1$ à la plus petite des $\sigma$-algèbres de sous-ensembles de $\Omega$, par rapport auxquelles tous les $x_t$ pour $t\in T$ sont mesurables, sont soit absolument continues l'une par rapport à l'autre, soit singulières. Et une condition nécessaire et suffisante pour qu'elles soient absolument continues l'une par rapport à l'autre est qu'il existe un nombre K tel que

$$|E_1(\sum_\alpha c_\alpha x_{t_\alpha})|^2 \leq K\, E_0(|\sum_\alpha c_\alpha x_{t_\alpha}|^2)$$

quelle que soit la combinaison linéaire finie $\Sigma c_\alpha x_{t_\alpha}$ avec $t_\alpha \in T$,([3], [1])

Alors il est facile de constater qu'il en sera ainsi si et seulement si $\phi \in \Phi(R)$.

Alors le rapport de vraisemblance est donné par

$$\frac{P_1'(d\omega)}{P_o'(d\omega)} = \exp \{U^{-1}\phi - \frac{1}{2}<\phi,\phi>\} \quad ([5])$$

par suite dans le cas de Laplace-Gauss, le dispositif linéaire qui rend maximum le rapport signal sur bruit élabore une fonction linéaire du logarithme du rapport de vraisemblance.

IV - QUELQUES EXEMPLES.

En dehors du cas immédiat où T est un ensemble fini, on connait $\Phi(R)$ et $U^{-1}$ dans plusieurs cas.

Citons

1°) le cas où T est un intervalle fini et $\{x_t, t \in T\}$ est, sous la loi $P_o$, un processus à accroissements orthogonaux. Voir([4].)

2°) le cas où T est un intervalle fini et $\{x_t, t \in T\}$ est, pour la loi $P_o$, la partie relative à T d'un processus stationnaire dont densité spectrale est une fraction rationnelle. Voir([5].)

Envisageons d'autre part le cas suivant :

- $\{x_t, -\infty<t<+\infty\}$ est, pour $P_o$, un processus stationnaire d'ordre 2, ayant une densité spectrale $f(\lambda)$.

- $\phi$ est une fonction de la forme

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\psi(\lambda)d\lambda \qquad -\infty<t<+\infty$$

avec $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\psi(\lambda)|^2}{f(\lambda)} d\lambda <+\infty$, ce qui en particulier implique que $\psi(\lambda)$ est de carré sommable sur $(-\infty,+\infty)$

Désignons par

$L_f^2$ l'espace de Hilbert des fonctions numériques mesurables $g$ telles que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2 f(\lambda) d\lambda < +\infty$$

muni du produit scalaire habituel

$L_f^2(T)$ le sous-espace du précédent engendré par les éléments de la forme :

$$\lambda \to e^{i\lambda t} \quad \text{avec } t \in T.$$

$\mathfrak{X}_o(T)$ le sous-espace de $H_o$ engendré par $x_t$ pour tous $t \in T$

$\Phi(R,T)$ l'espace de Hilbert des fonctions numériques définies sur $T$ et de la forme

$$t \to E_o(x_t \bar{v}) \text{ avec } v \in \mathfrak{X}_o(T)$$

muni du produit scalaire

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = E_o(v_2 \bar{v}_1)$$

si $\phi_j(t) = E_o(x_t \bar{v}_j)$.

En vertu de l'isométrie entre $\mathfrak{X}_o(-\infty,+\infty)$ et $L_f^2$ qui à $x_t$ fait correspondre la fonction $\lambda \to e^{i\lambda t}$, la restriction $\phi_T$ de $\phi$ à $T$, appartient à $\Phi(R,T)$ si et seulement si on peut écrire pour tout $t \in T$,

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}\, \overline{g(\lambda)}\, f(\lambda)\, d\lambda \quad \text{avec} \quad g \in L_f^2(T).$$

Sous les hypothèses faites $\phi_T \in \Phi(R,T)$ pour tout $T$ ; en effet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} \left[\frac{\psi(\lambda)}{f(\lambda)} - \overline{g(\lambda)}\right] f(\lambda) d\lambda = o \text{ pour tout } t \in T$$

si $g$ est la projection orthogonale dans $L_f^2$ de $\frac{\bar{\psi}}{f}$ sur $L_f^2(T)$.

Supposons que $T = \left[-H+t_o, t_o\right]$ ; $g$ est alors le gain complexe du filtre linéaire ayant une mémoire $H$ qui à l'instant $t_o$ donne le maximum du rapport signal sur bruit.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] J. FELDMAN : Equivalence and perpendicularity of Gaussian processes. Pacific Journal Math. 8 1958. P. 699-809.

[2] R. FORTET et E. MOURIER : Les fonctions aléatoires comme éléments aléatoires dans un espace de Banach. J. Math. Pures et Appl. t. 38, 1959. p. 347-364.

{3] J. HAJEK : On a property of normal distributions of arbitrary stochastic processes. Czechoslovak Mathematical Journal 8 1958. p. 610-619.

[4] J. HAJEK : On a ximple linear in Gaussian processes. Trans. Second Pragen Conf. Inf. Th. etc. 1960. p. 185-197.

[5] J. HAJEK : On linear statistical problems in stochastic processes. Czechoslovak Mathematical Journal 12 1962. p. 404-444.

[6] WAINSTEIN et ZUBAKOV : Extraction of signals form noise. Prentice-Hall 1962.