

G. MAURY

**Enveloppe quasi-injective d'un objet dans une catégorie abélienne de Grothendick à générateur**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1966, tome 3, fascicule 4, p. 67-74

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1966\\_\\_3\\_4\\_67\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1966__3_4_67_0)

© Université de Lyon, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ENVELOPPE QUASI-INJECTIVE D'UN OBJET DANS UNE  
CATEGORIE ABELIENNE DE GROTHENDICK A GENERATEUR.

G. MAURY

Introduction : La notion de module quasi-injectif a été introduite par Johnson [ 1 ]. Celui-ci a établi pour tout module l'existence d'une enveloppe quasi-injective [ 1 ] et [ 2 ]. L'existence d'une enveloppe injective pour un objet d'une catégorie abélienne  $\mathcal{C}$  à générateur, de Grothendick est prouvé dans [ 3 ] (on pourra aussi se reporter au chapitre 6 du cours [ 5 ]). Il est normal de se demander si dans la catégorie  $\mathcal{C}$  tout objet a une enveloppe quasi-injective, question qui ne parait pas avoir été résolue.

Remarquons que si  $\mathcal{C}$  est "équivalent" à une catégorie de modules, ce qui a lieu si et seulement si  $\mathcal{C}$  possède un petit générateur projectif [ 4 ] il est prévisible à coup sûr que le résultat escompté est vrai. Il est moins évident si la catégorie  $\mathcal{C}$  possède un générateur, sans autre hypothèse sur ce générateur.

On pourra se reporter à l'ouvrage [ 4 ] ou au cours [ 5 ] pour les propriétés classiques des catégories abéliennes de Grothendick à générateur. Dans la suite  $\mathcal{C}$  désignera une telle catégorie.

1 - Préliminaire :

Définition 1 : Un objet  $M$  de  $\mathcal{C}$  sera dit quasi-injectif si et seulement si pour tout sous-objet  $N$  de  $M$  (dont un représentant est le monomorphisme  $i : N \rightarrow M$ ) et pour tout morphisme  $f : N \rightarrow M$  il existe un morphisme  $h : M \rightarrow M$  tel que  $f = h.i$ .

Définition 2 : On appelle endomorphisme de  $M$  un morphisme  $h$  appartenant à  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M; M)$ ,  $M \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ .

Définition 3 : Soit  $h$  un endomorphisme de  $M$  et  $N$  un sous-objet de  $M$ , de représentant  $i : N \rightarrow M$ , on appelle restriction de  $h$  à  $N$  le morphisme  $hi = h'$ .  $N$  sera dit stable par  $h$  si  $\text{Im } h' = \text{Im } hi \leq \text{Im } i = i$  ou encore  $h(N) \leq N$ .

Démontrons d'abord les lemmes suivants que d'aucuns considéreront comme évidents :

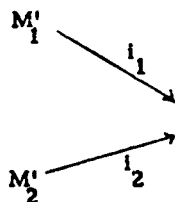
Lemme 1 : Soient  $M'_1$  et  $M'_2$  deux sous-objets de  $M$ , tels que  $M'_1 \cap M'_2 = 0$ .

Posons  $P = M'_1 \oplus M'_2$ . Alors  $P = M'_1 \vee M'_2$ .

Démonstration : Soient  $i_1 : M'_1 \rightarrow M$  et  $i_2 : M'_2 \rightarrow M$  des représentants des sous-objets  $M'_1$  et  $M'_2$  de  $M$ . On sait que si l'on a  $\varphi = i_1 p_1 + i_2 p_2$  ;  $\text{Im } \varphi = M'_1 \vee M'_2$ ,  $p_1, p_2$  représentant  $M'_1 \oplus M'_2$  comme produit direct de  $M'_1$  et  $M'_2$ , (voir par exemple le chapitre 2 du cours [5]). Montrons que  $\varphi$  est un monomorphisme si  $i_1 \cap i_2 = 0$  : soit  $u$  tel que  $\varphi u = 0$  c'est à dire tel que

$$i_1 p_1 u = -i_2 p_2 u.$$

remarque que  $i_1 \cap i_2$  est le produit fibré du diagramme



il existe un morphisme unique  $\tau$

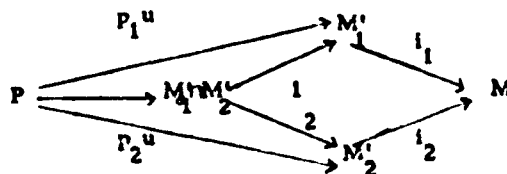
tel que  $p_1 u = \ell_1 \tau$ ,  $-p_2 u = \ell_2 \tau$ . Mais par

hypothèse  $M'_1 \cap M'_2 = 0$ , donc  $p_1 u = p_2 u = 0$

d'où  $u = 0$  car  $u = 0$  est le seul mor-

phisme tel que  $p_1 u = p_2 u = 0$ . Nous venons

de prouver que  $\varphi$  est un monomorphisme



donc  $\varphi = \text{Im}\varphi$  et les sources respectives de  $\varphi$  et  $\text{Im}\varphi$  c'est à dire  $M_1 \oplus M_2$  et  $M_1 \vee M_2$  sont isomorphes.

Lemme 2 : Soit  $N$  un sous-objet de  $M$  il existe un sous-objet maximal  $N'$  de  $M$  tel que  $N \cap N' = 0$  et alors  $M$  est extension essentielle de  $N \cap N'$ .

Démonstration : Soit la famille  $\mathcal{F}$  des sous-objets  $N'$  de  $M$  tels que  $N \cap N' = 0$ . Il y a déjà  $0$ . Elle est inductive car soit  $\{N_i\}_{i \in I}$ ,  $I$  ensemble d'indices une famille d'objets appartenant à  $\mathcal{F}$  et croissante, alors  $(\bigcup_{i \in I} N_i) \cap N = \bigcup_{i \in I} (N_i \cap N) = 0$  et ainsi  $\bigcup_{i \in I} N_i$  appartient à  $\mathcal{F}$ . Soit  $N'$  un élément maximal de  $\mathcal{F}$ . Montrons maintenant que  $M$  est extension essentielle de  $N \cap N'$  : ce résultat est cité sans démonstration à propos de la démonstration de la proposition 12 page 362 dans la thèse [3]:

Nous aurons besoin d'établir deux points :

1er point : Si  $M_1, M_2, M_3$  sont des objets d'une catégorie abélienne  $\mathcal{C}$  on a  $M_1 \oplus (M_2 \oplus M_3) = (M_1 \oplus M_2) \oplus M_3$ .

Il suffit de se reporter à la définition de la somme directe (voir par exemple [5] chapitre 1).

2ème point : Si  $M' = M_1 \vee M_2 = M_1 \oplus M_2$ ,  $M_1$  et  $M_2$  étant des sous-objets de  $M$  alors  $M_1 \cap M_2 = 0$ . Soient  $e_1$  et  $e_2$  les monomorphismes canoniques de  $M_1$  et  $M_2$  dans  $M'$  respectivement,  $p_1$  et  $p_2$  les surjections canoniques de  $M'$  sur  $M_1$  et  $M_2$  respectivement. On a  $1_{M'} = e_1 p_1 + e_2 p_2$  et  $p_1 e_2 = 0, p_2 e_1 = 0$  donc  $e_2 \in \text{Ker } p_1$ . De plus  $\text{Ker } p_1 = e_2 p_2 \text{ Ker } p_1$  donc  $\text{Ker } p_1 \leq e_2$  et  $e_2 = \text{Ker } p_1$  de même  $e_1 = \text{Ker } p_2$ . On a donc  $M_1' = M'/M_2 = M_1$  et  $M_2' = M/M_1 = M_2$  et  $M_1' \cap M_2' = M'/M_1 \vee M_2 = M'/M' = 0 = M_1' \cap M_2'$  (voir par exemple cours [5] chapitre 2).

Ceci étant supposons qu'il existe un sous-objet  $\mathcal{Q}$  de  $M$   $\mathcal{Q} \neq 0$  tel que

$$(1) \mathcal{Q} \cap (N \cap N') = \mathcal{Q} \cap (N \vee N') = 0 \text{ (lemme 1).}$$

D'après le lemme 1 et le 1er point on a  $\mathcal{Q} \oplus (N \oplus N') = \mathcal{Q} \vee (N \vee N') = (\mathcal{Q} \oplus N') \oplus N =$   
 $= (\mathcal{Q} \vee N') \vee N$  ( $\mathcal{Q} \oplus N' = \mathcal{Q} \vee N'$  car  $\mathcal{Q} \cap N' = 0$  d'après (1)). Il en résulte  
 $(\mathcal{Q} \vee N') \cap N = 0$  d'après le 2ème point donc  $\mathcal{Q} \vee N' = N'$  d'après la maximalité  
de  $N'$  donc  $\mathcal{Q} \leq N' \leq N' \vee N$  et  $\mathcal{Q} \cap (N \vee N') = \mathcal{Q} \neq 0$  et ceci contredit (1).

## 2 - Les théorèmes :

Théorème 1 : Soit  $\mathcal{E}$  une catégorie abélienne de Grothendick à générateur.

Un objet  $M$  de  $\mathcal{E}$  est quasi-injectif si et seulement si tout morphisme d'un sous-objet  $N'$  de  $M$  dans  $M$  se prolonge en un endomorphisme de  $M$ , lorsque  $M$  est extension essentielle de  $N'$ .

Démonstration : La condition est évidemment nécessaire.

Démontrons qu'elle est suffisante. Soit  $N'$  un sous-objet de  $M$ ,  
 $i : N' \rightarrow M$  un représentant de  $N'$ . Soit  $f$  appartenant à  $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(N', M)$ . D'après  
le lemme 2 il existe un  $N''$  sous-objet de  $M$ , maximal parmi ceux dont l'intersection avec  $N'$  est nul. Alors d'après le lemme 2,  $M$  est extension maximale de  $N' \oplus N''$ . Soient  $e_1$  et  $e_2$  les morphismes  $N' \rightarrow N' \oplus N''$  et  $N'' \rightarrow N' \oplus N''$  canoniques, il existe  $\bar{f} : N' \oplus N'' \rightarrow M$  tel que  $\bar{f} \cdot e_1 = f$  et  $\bar{f} \cdot e_2 = 0$ ,  $\bar{f}$  par hypothèse se prolonge en un endomorphisme  $g$  de  $M$  : si  $n$  désigne un représentant du sous-objet  $N' \oplus N''$  de  $M$  on a :

$$\bar{f} = g \cdot n \quad \text{et} \quad \bar{f} \cdot e_1 = f = g \cdot n e_1$$

alors  $f$  est par définition la restriction de  $g$  à  $N'$  et par suite  $M$  est bien quasi-injectif.

Théorème 2 : Pour qu'un objet de  $\mathcal{E}$  soit quasi-injectif il faut et il suffit qu'il soit stable par tout endomorphisme de son enveloppe injective  $\hat{M}$ .

Démonstration : Etablissons d'abord une remarque, considérons le diagramme

suyvant à colonnes exactes. D'après la formule  $\text{Ker } v \cap \text{Im } u = u(\text{Ker}(vu))$  et d'après les définitions de  $u(M)$ ,  $u^{-1}(M)$  (se reporter au chapitre 3 du cours [5]) on peut écrire  $u(M) \cap M = \text{Im}(ui) \cap \text{Ker } q = \text{Im}(ui \text{ Ker}(qui))$ .

Posons  $A = u^{-1}(M) \cap M$ ,

$A = \text{Ker}(qu) \cap i = u^{-1}(M) \cap M =$

$$\begin{aligned} & \text{Im}(i \cdot \text{ker}(qui)) \\ & = i \cdot \text{Ker}(qui) \end{aligned}$$

$u(A) = \text{Im}(ui \text{ Ker}(qui)) = u(M) \cap M$ .

On peut trouver  $A \leq M$  tel que

$u(A) \leq M$ . Il suffit de prendre en effet  $A = u^{-1}(M) \cap M$ , on a  $u(A) = u(M) \cap M$  et de plus si l'on suppose  $u(M) \cap M \neq 0$ , on a  $u(A) \neq 0$ .

Cette remarque nous servira ci-dessous.

Montrons d'abord que la condition énoncée par le théorème est suffisante. Si  $N \leq M \leq \hat{M}$ ,  $\hat{M}$  désignant l'enveloppe injective de  $M$  (voir chapitre 6 du cours [5]), et si  $f$  appartient à  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M)$ , on peut tracer le diagramme ci-dessous :  $f$  se prolonge en un endomorphisme  $h$  de  $\hat{M}$  puisque cet objet est injectif. Par hypothèse  $\text{Im}(hi) \leq i$ . Considérons la restriction de  $h$  à  $N$  soit  $h|_N$  on peut écrire  $hi = i \circ \zeta$  donc  $hij = i \circ \zeta j = if$  et  $\zeta j = f$ .

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{j} & M & \xrightarrow{i} & \hat{M} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ M & & & & \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \hat{M} & & & & \end{array}$$

$h$  (diagonal arrow from  $N$  to  $\hat{M}$ )

Or  $\zeta$  appartient à  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M)$  : on voit donc que  $f$  se prolonge en un endomorphisme de  $M$  (à savoir  $\zeta$ ) :  $M$  est bien quasi-injectif.

La condition est nécessaire : si  $M$  est quasi-injectif, soit  $f$  un endomorphisme de  $\hat{M}$  (diagramme ci-contre).

Posons  $N = M \cap \bar{f}^{-1}(M)$ ,  $j$  un représentant du sous-objet  $N$  de  $M$  :

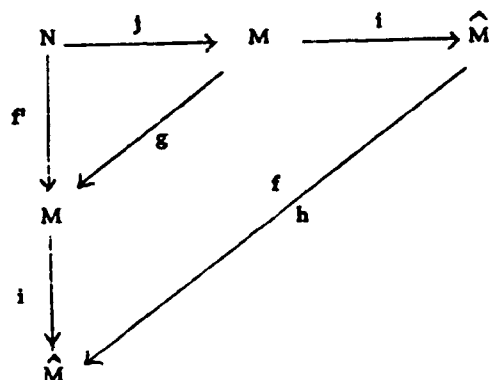
soit  $f' = f|_j$ ,  $f'$  se prolonge à son

tour en un endomorphisme  $g$  de  $M$  qui

se prolonge en un endomorphisme  $h$

de  $\hat{M}$  puisque  $M \triangleleft \hat{M}$  et que  $\hat{M}$  est

injectif :  $gj = f'$  et  $hi = ig$ .



Supposons que nous ayons montré que en posant  $u = h - f$ ,  $u(M) = 0$ , alors on peut écrire  $hi - fi = 0$  ou encore  $hi = fi = ig$  et  $\text{Im}(fi) \triangleleft \text{Im}(ig) \triangleleft i$ , ceci prouve que  $M$  est stable par  $f$ .

Tout revient donc à prouver que  $u(M) = 0$ . Si  $u(M) \neq 0$  comme  $\hat{M}$  est extension essentielle de  $M$ ,  $u(M) \cap M \neq 0$  alors d'après la remarque du début il existe  $A$  tel que  $A \triangleleft M$ ,  $u(A) \triangleleft M$  et  $u(A) \neq 0$  : soit  $a$  un représentant du sous-objet  $A$  de  $M$  :

$$u(A) = \text{Im}[(f-h)ia] \triangleleft i \text{ entraîne } (f-h)ia = i\zeta,$$

$$fia = i(\zeta - ga) = i\zeta'. \text{ Je dis que } ia \triangleleft ij = \bar{f}^{-1}(M) \cap M \text{ car}$$

$$\bar{f}^{-1}(M) = \text{Ker}(qf) \text{ et } qfia = qi\zeta' = 0 \text{ entraîne}$$

$$ia \triangleleft \bar{f}^{-1}(M) = \text{ker}(qf) \text{ et } ia \triangleleft i,$$

on a donc bien  $ia \triangleleft \bar{f}^{-1}(M) \cap M = ij$  et  $ia = ij\zeta'$ . Enfin on peut écrire :

$$fia = fij\zeta' = if'j' = igj\zeta' = hij\zeta' = hia$$

$(fi-hi)a = 0$  et  $u(A) = 0$  ce qui contredit  $u(A) \neq 0$ . Ceci prouve bien que  $u(M) = 0$ .

Corollaire : Dans une catégorie  $\mathcal{C}$  abélienne de Grothendick à générateur, tout objet admet une enveloppe quasi-injective.

Démonstration : Soit  $M$  un objet de  $\mathcal{C}$ ,  $\hat{M}$  son enveloppe injective. Soit  $\mathcal{F}$  la famille des sous-objets de  $\hat{M}$  contenant  $M$  et qui sont stables par les endomorphismes de  $\hat{M}$ ,  $\hat{M}$  appartient à  $\mathcal{F}$ .

L'intersection d'une famille finie ou non d'éléments de  $\mathcal{F}$  appartient encore à  $\mathcal{F}$  : en effet soit  $(M_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments appartenant à  $\mathcal{F}$  et soit  $M'$  leur intersection (elle existe puisque la catégorie est de Grothendick donc cocomplète) : soit  $f$  un endomorphisme de  $\hat{M}$  :

$$f\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(M_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} M_i$$

(voir chapitre 3 du cours [5])  $M'$  est la plus petite extension quasi-injective de  $M$  : en effet  $M'$  contient évidemment  $M$  et  $M$  extension essentielle de  $M'$  l'est de  $M'$  donc est l'enveloppe injective de  $M'$  : d'après le

théorème 2,  $M'$  est quasi-injectif. D'ailleurs  $M'$  est extension essentielle de  $M$  (on a  $M \leq M' \leq \hat{M}$  et  $\hat{M}$  est extension essentielle de  $M$ .) Soit maintenant  $P$

une extension essentielle de  $M$  quasi-injective,  $\hat{P}$  est extension essentielle de  $M$  donc  $\hat{P} = \hat{M}$  et  $P$  appartient à la famille  $\mathcal{F}$  donc contient  $M'$  :

$M'$  est donc la plus petite extension essentielle de  $M$  quasi-injective : on l'appelle l'enveloppe quasi-injective de  $M$ .

Remarque : Il est facile d'établir l'existence d'une enveloppe quasi-injective pour un objet  $M$  d'une catégorie de Grothendick localement petite (sans l'hypothèse d'un générateur) lorsque cet objet admet une enveloppe injective.



BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] JOHNSON : Quasi-injective moduls and irreduable rings.  
Journal of London Mathematical Society vol. 36 1961.
- [ 2 ] RAVEL J. : Article d'exposition : Modules quasi-injectifs  
(1965 Section de Documentation, Faculté des Sciences  
de LYON).
- [ 3 ] GABRIEL : Bul. Soc. Math. France 90 - 1962, 323 - 448.
- [ 4 ] MITCHELL : Theory of categories, Academic Press, 1965.
- [ 5 ] MAURY G. : Introduction à la théorie des catégories. 2ème partie  
du cours de 3ème cycle 1965-1966. Faculté des Sciences  
de Lyon.