PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

ANDRÉ ROUX

Objet étalé et faisceau

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1966, tome 3, fascicule 3
, p. 42-56
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1966__3_3_42_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon, 1965 t. 3-3

OBJET ETALE ET FAISCEAU

par André ROUX

1. Rappel.

$\mathcal{O}$ étant une petite catégorie, soit $\mathcal{O}^{\circ}(\mathcal{E})$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{O}^{\circ}$ dans $\mathcal{E}$(*). $\mathcal{O}^{\circ}(\mathcal{E})$ est une catégorie complète et factorielle.

Soient : hom : $\mathcal{O}^{\circ}\times\mathcal{O} \to \mathcal{E}$ le bifoncteur canonique de $\mathcal{O}$; $h : \mathcal{O} \to \mathcal{O}^{\circ}(\mathcal{E})$ le foncteur défini par $h(U) = \hom(?,U)$;

$(h^{\circ}, 1_{\mathcal{O}^{\circ}(\mathcal{E})}) : \mathcal{O}^{\circ}\times\mathcal{O}^{\circ}(\mathcal{E}) \to \mathcal{O}^{\circ}(\mathcal{E})^{\circ}\times\mathcal{O}^{\circ}(\mathcal{E})$ le bifoncteur produit ;

$c : \mathcal{O}^{\circ}\times\mathcal{O}^{\circ}(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ le foncteur coévaluation de $\mathcal{O}$ défini par $c(U,\Phi) = \Phi(U)$;

$e_U : \mathcal{O}^{\circ}(\mathcal{E}) \to \mathcal{O}^{\circ}\times\mathcal{O}^{\circ}(\mathcal{E})$ le foncteur défini par $e_U(\Phi) = (U,\Phi)$;

Hom : $\mathcal{O}^{\circ}(\mathcal{E})^{\circ}\times\mathcal{O}^{\circ}(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ le bifoncteur canonique de $\mathcal{O}^{\circ}(\mathcal{E})$.

1.1 Théorème : Les bifoncteurs c et $\mathrm{Hom}.(h^{\circ}, 1_{\mathcal{O}^{\circ}(\mathcal{E})})$ de $\mathcal{O}^{\circ}\times\mathcal{O}^{\circ}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{E}$ sont canoniquement isomorphes.

1.2 Proposition . Pour tout objet U de $\mathcal{O}$:

a) le foncteur $c_U = c.e_U : \mathcal{O}^{\circ}(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ préserve les limites (droite et gauche) ;

b) pour qu'un morphisme $\Phi \overset{\alpha}{\to} \psi$ de $\mathcal{O}^{\circ}(\mathcal{E})$ soit un mono resp. épi-morphisme, il faut et il suffit qu'il en soit de même de $\alpha(U)$ dans $\mathcal{E}$.

(*) désigne la catégorie $\mathbb{E}$ns ou la catégorie $\mathcal{A}$b; dans ce dernier cas $\mathcal{O}$ sera une catégorie préadditive, et les foncteurs seront réputés additifs.

c) $h(U)$ est un objet projectif de $O^{o}(E)$, i.e.

Hom(h(U) ?) préserve les sommes fibrées finies.

1.3 Proposition : L'ensemble $(h(U))_{U \in Ob(O)}$ est un ensemble de générateur de $O^{o}(E)$.

Un petit foncteur $\phi : I \to O$ est appelé un $\varinjlim$-représentant de l'objet Φ de $O^{o}(E)$ si Φ est limite à droite du petit foncteur $h.\phi : I \to O^{o}(E)$.

1.4 Proposition : Soient Φ et Ψ des objets de $O^{o}(E)$, $\phi : I \to O$ resp. $\psi : J \to O$ - un $\varinjlim$-représentant de Φ - resp de Ψ - dans E, les objets Hom(Φ,Ψ), $\varinjlim_{I} \psi(\phi(i))$ et $\varprojlim_{I} \varinjlim_{J} \hom(\phi(i),\psi(j))$ sont canoniquement isomorphes.

Pour un objet Φ de $O^{o}(E)$, soit O_{Φ} la petite catégorie des objets de O pointés par Φ, et soit $\phi : O_{\Phi} \to O$ le petit foncteur canonique de O_{Φ} dans O.

1.5 Théorème : Pour tout objet Φ de $O^{o}(E)$, $\phi : O_{\Phi} \to O$ est un $\varinjlim$-représentant de Φ.

1.6 Corollaire : Le foncteur h préserve les limites à gauche.

$o : O \to T$ étant un foncteur, le foncteur H^{o}, préservant les limites à gauche, de T dans $O^{o}(E)$, défini par $H^{o}(E) = \hom_{T}(o(?);E)$, est appelé le foncteur o-section.

Si T est complète à droite, pour tout objet Φ de $O^{o}(E)$, l'objet $\underset{\to}{o}(\Phi) = \varinjlim_{O_{\Phi}} o.\phi$ est appelé l'objet de T étalé par o, défini par le foncteur Φ, et le foncteur $\underset{\to}{o} : \Phi \to \underset{\to}{o}(\Phi)$ est appelé le foncteur étalement par o dans T.

1.7 Théorème : T étant complète à droite, pour tout foncteur $o : O \to T$, le couple de foncteurs $(\underset{\to}{o}, H^{o})$ est une adjonction entre $O^{o}(E)$ et T.

En particulier $\underset{\to}{o}$ préserve les limites à droite, et il existe des morphismes fonctoriels canoniques $\varepsilon : \backsim = \underset{\to}{o}.H^{o} \to 1_{T}$ et $3 : 1_{O^{o}(E)} \to H^{o}.\underset{\to}{o} = \backsim$ (*).

1.8 Proposition : $O^{o}(E)_{d}(T)$ étant la sous-catégorie pleine de $O^{o}(E)(T)$ des

---

(*) lire 3 = nolispe et $\backsim$ = adlit.

foncteurs de $\mathcal{O}^{o}(E)$ dans T préservant les limites à droite, les foncteurs $o \to \underset{\rightarrow}{o}$ de $\mathcal{O}(T)$ dans $\mathcal{O}^{o}(E)_d(T)$ et $\mu \to \mu.h$ de $\mathcal{O}^{o}(E)_d(T)$ dans $\mathcal{O}(T)$ sont réciproques l'un de l'autre.

Remarque : tous les résultats précédents sont maintenant classiques ; on en trouvera les démonstrations dans [1].

2. Extension au cas général : la catégorie d($\mathcal{O}$).

Une classe C satisfaisant à tous les axiomes d'une catégorie sauf (peut-être) à celui exprimant que pour tout couple (X,Y) d'objets de C, les morphismes de X dans Y forment un ensemble, est appelée une hypercatégorie (ou grosse catégorie). En se plaçant dans une classe suffisamment grande on a de même les notions d'hyperfoncteur, d'hypercatégories complètes, exacte, abélienne,...

$\mathcal{O}$ étant une catégorie, soit $\mathcal{O}^{o}(E)$ l'hypercatégorie complète et factorielle des foncteurs de $\mathcal{O}^{o}$ dans E, les définitions et propriétés données en 1, s'adaptant alors de façon évidente.

Pour tout petit foncteur $a : I \to \mathcal{O}$, le petit foncteur $h.a : I \to \mathcal{O}^{o}(E)$ admet une limite à droite $\underset{\rightarrow}{a} = \varinjlim_{I} h.a$ (i.e. pour tout objet U de $\mathcal{O}$, $a(U) = \varinjlim_{I} \hom_{\mathcal{O}}(U, a(i$

2.1 Définition : On appelle foncteur contravariant $\varinjlim$-représentable sur $\mathcal{O}$, un objet Φ de $\mathcal{O}^{o}(E)$ isomorphe à un objet $\underset{\rightarrow}{a}$ de $\mathcal{O}^{o}(E)$ où $a : I \to \mathcal{O}$ est un petit foncteur ; a est un $\varinjlim$-représentant du foncteur Φ.

2.2 Lemme : Soient $a : I \to \mathcal{O}$, et $B : J \to \mathcal{O}^{o}(E)$ des petits foncteurs ; l'ensemble $\varprojlim_{I} \varinjlim_{J} B(j)(a(i))$ est en bijection canonique avec $\mathrm{Hom}(\underset{\rightarrow}{a}, \varinjlim_{J} B)$ (qui est donc un ensemble).

2.3 Définition : On appelle catégorie droite d($\mathcal{O}$) de $\mathcal{O}$, la sous-catégorie pleine de $\mathcal{O}^{o}(E)$ dont les objets sont les foncteurs contravariants $\varinjlim$-représentables.

$a : I \to \mathcal{O}$ et $b : J \to \mathcal{O}$ étant des petits foncteurs, on a

$$\hom_{d(\mathcal{O})}(\underset{\to}{a},\underset{\to}{b}) = \varprojlim_{I} \varinjlim_{J} \hom(a(i),b(j))$$

(vu l'aspect de cette formule, on voit tout l'intérêt qu'il y a à considérer la composition des morphismes de $d(\mathcal{O})$ comme composition de morphismes fonctoriels). Le foncteur h est alors considéré à valeurs dans $d(\mathcal{O})$; il est pleinement fidèle et préserve les limites à gauche.

2.4 Théorème : $d(\mathcal{O})$ est une sous-catégorie complète à droite de l'hypercatégorie $\mathcal{O}^{o}(E)$.

2.5 Corollaire : Pour tout objet U de $\mathcal{O}$, $h(U)$ est un objet projectif de $d(\mathcal{O})$ (qui possède donc assez de projectifs). Les $h(U)$, où U parcourt les objets de $\mathcal{O}$, forment une classe de générateurs.

2.6 Lemme : Soit $o : \mathcal{O} \to \mathcal{T}$ un foncteur de $\mathcal{O}$ dans une catégorie $\mathcal{T}$ complète à droite. Si $a : I \to \mathcal{O}$ et $b : J \to \mathcal{O}$ sont des $\varinjlim$-représentants d'un objet Φ de $d(\mathcal{O})$, les objets de $\mathcal{T}$, $\varinjlim_{I} o.a$ et $\varinjlim_{J} o.b$ sont isomorphes.

2.7 Proposition : Avec les notations du lemme précédent, $\Phi \to \varinjlim_{I} o.a$ est un foncteur covariant $\underset{\to}{o}$ préservant les limites à droite, de $d(\mathcal{O})$ dans $\mathcal{T}$.

2.8 Théorème : $d(\mathcal{O})_d(\mathcal{T})$ étant la sous-catégorie pleine de $d(\mathcal{O})(\mathcal{T})$ des foncteurs préservant les limites à droite, de $d(\mathcal{O})$ dans une catégorie $\mathcal{T}$ complète à droite, les foncteurs $o \to \underset{\to}{o}$ de $\mathcal{O}(\mathcal{T})$ dans $d(\mathcal{O})_d(\mathcal{T})$ et $\mu \to \mu.h$ de $d(\mathcal{O})_d(\mathcal{T})$ dans $\mathcal{O}(\mathcal{T})$ sont réciproques l'un de l'autre.

Les conditions classiques pour l'existence d'un adjoint à droite à $\underset{\to}{o}$ paraissant imposer à $d(\mathcal{O})$ des conditions peu naturelles et très restrictives, on se limite ici à un cas particulier assez fréquent dans les applications.

Une triangulation sur la catégorie $\mathcal{T}$ est la donnée d'un triplet (I,q,j), où I est un foncteur de $Mor(\mathcal{T})$ dans $\mathcal{T}$, q un morphisme du foncteur source σ dans I, et j un morphisme de I dans la foncteur but β, tels que $j.q$ soit le morphisme canonique de σ dans β, et pour tout $\alpha \in Mor(\mathcal{T})$, q_α est un épimorphisme et j_α est un monomorphisme.

2.9 Théorème : On suppose que :

1. T possède une triangulation (I,q,j) ;

2. O est une sous-catégorie de T, telle que la restriction de I à la sous-catégorie de $Mor(T)$ dont les objets ont leur source dans O soit à valeur dans O (en particulier O est alors saturée par les isomorphismes de T) ;

3. Pour tout objet E de T, la sous-catégorie $SO(E)$ des sous-objets de E appartenant à O, et correspondant aux monomorphismes du type de la triangulation est une petite sous-catégorie (en particulier ceci a lieu lorsque T est localement petite).

Alors pour tout objet E de T, soit $H^o(E)$ le foncteur de O^o dans $\mathcal{E}$ défini par $U \mapsto \underset{\overrightarrow{SO(E)}}{\lim} \hom_T(U,V)$; le foncteur $H^o : E \mapsto H^o(E)$, de T dans $d(O)$ est adjoint à droite au foncteur $\underset{\to}{o}$.

2.10. Remarques :

1. Sous les hypothèses du théorème, l'adjonction définissant un morphisme $\varepsilon : \sim\ = \underset{\to}{o}.H^o \to 1_T$, pour que sur un objet E de T, ε_E soit un isomorphisme de $\tilde{E}$ sur E, il faut et il suffit que E soit limite à droite du foncteur inclusion de $SO(E)$ dans E. En particulier E est alors limite monique d'un petit foncteur à valeurs dans O. De plus si O est une sous-catégorie de T stable par sommes directes finies, pour tous $x : U \to E$, $y : V \to E$, de $SO(E)$, $I(x \amalg y)$ est un objet de $SO(E)$ majorant U et V, et par suite $SO(E)$ est en fait un système inductif au sens le plus ordinaire dans O.

2. Les hypothèses du théorème peuvent être modifiées de la façon suivante :

1) T est colocalement petite (car T étant complète à droite, il existe une triangulation sur T).

2) O est une sous-catégorie de T saturée par les épimorphismes de T;

3) T est localement petite.

3. Toutes les démonstrations de ces théorèmes sont élémentaires, mise à part celle, assez technique, du théorème 2.4.

3. Objets étalés et faisceaux.

3.1 Définition;: Une sous-catégorie O d'une catégorie T, complète à droite, est pré-ouverte (dans T) si elle satisfait à la condition suivante :

Pour tout petit foncteur $a : I \to O$ de limite à droite dans T, $a(i) \xrightarrow[a_i]{} E = \varinjlim_I a$, et pour tout morphisme $\alpha : V \to E$ de source un objet de O et de but E, il existe :

a) un petit foncteur $b: I \to O$ tel que dans O, V soit un objet placé sous $b(b(i) \xrightarrow[b_i]{} V)_{i \in I}$;

b) un morphisme $\vec{o}^{I} = (\alpha_i)_{i \in I} : b \to a$, tel que dans T, $b(i) \xrightarrow[b_i]{} V = \varinjlim_I b$, et pour tout i de I , $\alpha . b_i = a_i . \alpha_i$.

Il revient au même de dire que $\alpha : \varinjlim_I \alpha_i$.

On notera qu'une sous-catégorie pré-ouverte est une sous-catégorie pleine.

Dans la suite, O est une petite sous-catégorie préouverte d'une catégorie T complète à droite.

3.2 Théorème : Pour que le morphisme $\varepsilon : \sim \to 1_T$, pris pour un objet E de T, soit un isomorphisme de $\tilde{E}$ sur E, il faut et il suffit que E soit limite dans T d'un petit foncteur à valeurs dans O.

Soit $\phi: (U,x) \to U_x$ le foncteur canonique de $O_{H^o(E)}$ dans O, de limite à droite (dans T) $U_x \xrightarrow[x]{} E = \varinjlim_{O_{H^o(E)}} \phi$; si $\varepsilon_E : \tilde{E} \to E$ est un isomorphisme, E est limite à droite dans T de ϕ. Réciproquement, soit $a : I \to O$ un petit foncteur de limite à droite dans T , $a(i) \xrightarrow[a_i]{} E = \varinjlim_I a$, il suffit de démontrer que $E = \varinjlim_{O_{H^o(E)}} \phi$. Soit $U_x \xrightarrow[z_x]{} Z$ un objet de T placé sous ϕ; Z est canoniquement placé sous a par $a(i) \xrightarrow[z_{a_i}]{} Z$, donc il existe un unique morphisme $z : E \to Z$

tel que, pour tout i de $\mathcal{I}$, $z_{a_i} = z.a_i$; il reste donc à montrer que pour tout U_x on a $z_x = z.\overline{x}$; or il existe un petit foncteur $b : \mathcal{I} \to \mathcal{O}$, tel que dans $\mathcal{O}$ U_x soit placé sous $b(b(i) \xrightarrow[b_i]{} U_x)$ et un morphisme $\vec{o}^{\,\mathcal{I}} = (x_i) : b \to a$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
b(i) \arrow[r, "b_i"] \arrow[d, "x_i"'] & U_x \arrow[d, dashed, "x"] \arrow[dr, "z_x"] & \\
a(i) \arrow[r, "a_i"] \arrow[rr, bend right=15, "z_{a_i}"'] & E \arrow[r, "z"] & Z
\end{tikzcd}$$

Par suite $z_x.b_i = z_{\overline{x}.b_i} = z_{a_i.z_i} = z_{a_i}.x_i = z.a_i.x_i = z.\overline{x}.b_i$, d'où en passant à la limite suivant $\mathcal{I}$, $z_x = z.\overline{x}$.

Remarque : dans le cas général de 1., on ne sait rien sur ε, si ce n'est que $\mathcal{H}^o(\varepsilon)$ admet $\varepsilon_{\mathcal{H}^o}$ comme section (comme dans toute adjonction) ; il est facile de voir que dans la cas où E est limite d'un petit foncteur à valeurs dans $\mathcal{O}$, $\varepsilon_E : \tilde{E} \to E$ est sectionnable.

3.3 <u>Proposition</u> : $\mathcal{H}^o(\varepsilon)$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}^o.\sim$ sur $\mathcal{H}^o$ (et par suite

l'isomorphisme réciproque est $3_{\mathcal{H}^o}$).

E étant un objet de $\mathcal{T}$, pour tout $U_x = (U,x)$ on a $x = \varepsilon_E.\overline{x}$; il suffit de montrer que pour tout $U \xrightarrow[y]{} \tilde{E}$ on a $y = \overline{\varepsilon_E.y}$; or il existe un petit foncteur $b : \mathcal{O}_{\mathcal{H}^o}(E) \to \mathcal{O}$ tel que U soit placé sous $b\ (b(U_x,x) \xrightarrow[b_x]{} U)$ et un morphisme $\vec{o}^{\,\mathcal{O}_{\mathcal{H}^o}(E)} = (y_x) : b \to \phi$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
b(U_x,x) \arrow[r, dashed, "b_x"] \arrow[d, dashed, "y_x"'] & U \arrow[d, dashed, "y"] \arrow[dr, "\varepsilon_E.y"] & \\
U_x \arrow[r, dashed, "\overline{x}"] \arrow[rr, bend right=15, "x"'] & \tilde{E} \arrow[r, "\varepsilon_E"] & E
\end{tikzcd}$$

Par suite $\varepsilon_E.y.b_x = \varepsilon_E.\bar{x}.y_x = x.y_x$, d'où $\overline{\varepsilon_E.y}.b_x = \overline{\varepsilon_E.y.b_x} = \overline{x.y_x} = \bar{x}.y_x = y.b_x$, et en passant à la limite suivant I , $\overline{\varepsilon_E.y} = y$.

3.4 Définition : On appelle sous-catégorie des objets de T étalés au-dessus de O ,ù

> la sous-catégorie pleine $i_O : T_O \to T$ de T dont les objets sont les limites dans T des petits foncteurs à valeur dans O.

T_O est la sous-catégorie pleine de T dont les objets sont les images par ϱ des objets de $O^o(E)$. O est une sous-catégorie de T_O et le foncteur ϱ, donc a fortiori le foncteur $\sim$, est considéré comme à valeur dans T_O .

3.5. Théorème. a) Le couple de foncteurs $(i_O, \sim)$ est une adjonction entre T_O et

> T (ou encore $\sim$ est un réflecteur) ;
>
> b) la catégorie T_O est la sous-catégorie complète à droite engendrée par O.

Soient F un objet de T_O et E un objet de T, $\hom_T(i_O(F),E) =$

$$\varprojlim_{O_{H^o(F)}} \hom_T(U,E) = \varprojlim_{O_{H^o(F)}} \mathrm{Hom}(h(U),H^o(E)) = \varprojlim_{O_{H^o(F)}} \mathrm{Hom}(h(U),H^o(\tilde{E}))$$

$= \varprojlim_{O_{H^o(F)}} \hom_T(U,\tilde{E}) = \hom_{T_O}(F,\hat{E})$, ce qui démontre a), et b) s'en déduit canoniquement.

Remarques : 1. Soit O' une sous-catégorie de O, telle que O' soit pré-ouverte dans T et O soit une sous-catégorie de $T_{O'}$, alors $T_O = T_{O'}$.

2. Si O est la somme directe d'une famille de sous-catégories $(O_i)_{i\in I}$ de T, la limite dans T d'un petit foncteur à valeurs dans O est somme directe de limites de petits foncteurs (éventuellement vides) à valeurs dans chaque O_i ; de façon imagée on peut dire qu'un objet étalé au-dessus de O est somme directe d'objets étalés au-dessus de chaque O_i.

3.6. Définition : Un objet U de O est limite normale d'un petit foncteur

> $a : I \to O$, si U est limite à droite dans T (ou T_O).

3.7. Théorème . Pour que le morphisme $\zeta : 1_{\mathcal{O}^o(E)} \to \sim$ induise sur un objet Φ de $\mathcal{O}^o(E)$ un isomorphisme de Φ sur $\tilde{\Phi}$, il faut et il suffit que Φ préserve les limites à gauche normales de $\mathcal{O}^o$(i.e. renverse les limites à droite normales de $\mathcal{O}$ en limites à gauche de E).

Soit Φ un objet de $\mathcal{O}^o(E)$; $\tilde{\Phi}$ étant la restriction à $\mathcal{O}^o$ du foncteur $\hom_{T}(?, \underset{\rightarrow}{Q}.\Phi)$, $\tilde{\Phi}$ préserve les limites à gauche normales de $\mathcal{O}^o$, et par suite si ζ_Φ est un isomorphisme de Φ sur $\tilde{\Phi}$, il en est de même de Φ. Réciproquement, Φ étant un objet de $\mathcal{O}^o(E)$ préservant les limites à gauche normales de $\mathcal{O}^o$, soit :
$\phi : (U,X) \to U_x$ le foncteur de $\mathcal{O}_\Phi$ dans $\mathcal{O}$, de limite dans T, $U_x \xrightarrow[x]{} \underset{\rightarrow}{Q}(\Phi)$,
$U \xrightarrow[y]{} \underset{\rightarrow}{Q}(\Phi)$ étant un morphisme de T dont la source est un objet de $\mathcal{O}$, il existe un petit foncteur $b : \mathcal{O}_\Phi \to \mathcal{O}$ tel que dans $\mathcal{O}$, U soit placé sous $b(b(U,x) \xrightarrow[b_x]{} U)$ et un morphisme $\vec{o}^{\,\mathcal{O}_\Phi} = (y_x) : b \to \phi$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & b(U,x) \arrow[r, "b_x"] \arrow[d, "y_x"'] & U \arrow[d, "y"] \\
{} \arrow[r] & U_x \arrow[r, "x"'] & \underset{\rightarrow}{Q}(\Phi)
\end{tikzcd}$$

on a $U = \underset{\overrightarrow{\mathcal{O}_\Phi}}{\lim}\, b$, d'où $\dot{y} = \underset{\overleftarrow{\mathcal{O}_\Phi}}{\lim}\Phi(y_x)(x) \in \Phi(U)$; soit $y \to \dot{y}$, le morphisme de $\tilde{\Phi}$ dans Φ ainsi défini, on a $\bar{\dot{y}}.b_x = \bar{x}.y_x$ pour tout U_x, d'où par passage à la limite suivant $\mathcal{O}$, $\bar{\dot{y}} = y$.

D'autre part, si $y = \bar{x}'$, où $x' \in \Phi(U)$, on a $x' = \underset{\overleftarrow{\mathcal{O}_\Phi}}{\lim}\Phi(b_x)(x') = \dot{y} = \dot{\bar{x}}'$.
Par suite ζ_Φ est un isomorphisme de Φ sur $\tilde{\Phi}$.

Remarque : dans le cas général de 1., on ne sait rien sur ζ; si ce n'est que $\underset{\rightarrow}{Q}(\zeta)$ admet $\varepsilon_{\underset{\rightarrow}{Q}}$ comme rétraction (comme dans toute adjonction) ; il est facile de voir que dans le cas où Φ préserve les limites à gauche normales de $\mathcal{O}^o$, $\zeta_\Phi : \Phi \to \tilde{\Phi}$ est rétractable.

3.8. Proposition : $\underset{\rightarrow}{Q}(\zeta)$ est un isomorphisme de $\underset{\rightarrow}{Q}$ sur $\underset{\rightarrow}{Q}.\sim$ (et par suite l'isomorphisme réciproque est $\varepsilon_{\underset{\rightarrow}{Q}}$).

En effet, $\underset{\to}{\varrho}(\Phi)$ étant un objet de T_0, $\varepsilon_{\underset{\to}{\varrho}(\Phi)}$ est un isomorphisme de $\widetilde{\underset{\to}{\varrho}(\Phi)} = \underset{\to}{\varrho}(\check{\Phi})$ sur $\underset{\to}{\varrho}(\Phi)$.

3.9. Définition. On appelle sous-catégorie des faisceaux sur la sous-catégorie pré-ouverte 0 de T, la sous-catégorie pleine $j_0 : F_0 \to 0^o(E)$ de $0^o(E)$ dont les objets sont les foncteurs de 0^o dans E préservant les limites à gauche normales de 0^o.

F_0 est la sous-catégorie pleine de $0^o(E)$ dont les objets sont les images par H^o des objets de T. 0 étant une sous-catégorie pleine de T, le foncteur h est à valeur dans F_0 et le foncteur H^o, donc a fortiori ω, est considéré comme à valeurs dans F_0.

3.10. Théorème. a) Le couple de foncteurs (ω, j_0) est une adjonction entre $0^o(E)$ et E_0 (ou encore, ω est un coréflecteur ;) ;

b) La catégorie F_0 est la sous-catégorie complète à gauche de $0^o(E)$ engendrée par $h(0)$; de plus $0^o(E)$ étant complète, il en est de même de F_0.

Soient Ψ un objet de $0^o(E)$ et Φ un objet de F_0 ; $\mathrm{Hom}(\Psi, j_0(\Phi)) = \mathrm{Hom}(\psi, \check{\Phi}) =$ $= \mathrm{hom}_T(\underset{\to}{\varrho}(\psi), \underset{\to}{\varrho}(\Phi)) = \mathrm{hom}_T(\underset{\to}{\varrho}(\check{\psi}), \underset{\to}{\varrho}(\Phi)) = \mathrm{hom}_{F_0}(\check{\psi}, \Phi)$ ce qui démontre a), et b) s'en déduit canoniquement.

3.11. Théorème. $(\underset{\to}{\varrho}.j_0,\ H^o.i_0, 3, \varepsilon)$ est une équivalence entre les catégorie F_0 et T_0.

Soient Φ et Ψ deux objets de F_0, $\underset{\to}{\varrho}$ sur $\mathrm{Hom}(\Phi,\psi)$ se décompose en les bijections canoniques : $\mathrm{Hom}(\Phi,\psi) \to \mathrm{Hom}(\Phi, H^o.\underset{\to}{\varrho}(\psi)) \to \mathrm{hom}_T(\underset{\to}{\varrho}(\Phi), \underset{\to}{\varrho}(\psi))$, par suite $\underset{\to}{\varrho}$ est pleinement fidèle sur F_0.

3.12. Remarques : 1) Les bonnes propriétés sous-catégoriques de F_0 dans $0^o(E)$ et T_0 dans T ne sont pas conservées par cette équivalence, mais dualisées.

2) F_0 étant une catégorie complète, il en est de même de T_0, même si T n'est pas complète à gauche (T_0 n'est évidemment pas une sous-catégorie complète de T lorsque T est complète).

4. Extension au cas général et exemples.

Les conditions dans lesquelles on se place sont celles du théorème 2.9. On suppose de plus que 0 est une sous-catégorie pré-ouverte de la catégorie complète à droite T.

Un petit foncteur à valeurs dans 0 est monique si les morphismes images sont des monomorphismes de T. On démontre alors par des procédés analogues à ceux du paragraphe 3, les théorèmes suivants :

4.1 Théorème . a) Pour que le morphisme $\varepsilon : \sim \to 1_T$ pris pour un objet E de T soit un isomorphisme de $\tilde{E}$ sur E, il faut et il suffit que E soit limite dans T d'un petit foncteur monique à valeurs dans 0.

b) $H^0(\varepsilon)$ est un isomorphisme de $H^0 . \sim$ sur H^0 (dont l'isomorphisme réciproque est 3_{H^0}).

c) T_0 étant la sous-catégorie pleine et complète à droite engendrée par 0, $(i_0, \sim)$ est une adjonction entre T_0 et T.

4.2 Théorème. a) Pour que le morphisme $3 : 1_{d(0)} \to \backsim$ induise sur un objet Φ de $d(0)$ un isomorphisme de Φ sur $\overset{\backsim}{\Phi}$, il faut et il suffit que Φ préserve les limites à gauche normales de 0^o.

b) $\varrho(3)$ est un isomorphisme de ϱ sur $\varrho . \backsim$ (dont l'isomorphisme réciproque est ε_{ϱ}).

c) F_0 étant la sous-catégorie pleine de $d(0)$ dont les objets sont les images par H^o des objets de T, $(\backsim, j_0)$ est une adjonction entre $d(0)$ et F_0 , qui est une catégorie complète à droite mais non pas une sous-catégorie complète à droite de $d(0)$.

4.3. Théorème : $(\varrho . j_{\mathcal{O}}, H^{\circ} . i_{\mathcal{O}}, 3, \varepsilon)$ est une équivalence entre les catégories $F_{\mathcal{O}}$ et $T_{\mathcal{O}}$.

4.4. Remarque : Il est évident que dans le cas où $\mathcal{O}$ est une petite sous-catégorie de T (ou tout au moins dont le squelette est une petite catégorie) vérifiant les hypothèses du théorème 2.9. , on peut conjuguer les deux procédés décrits ci-dessus ; en particulier $T_{\mathcal{O}}$ est complète et tout objet de $T_{\mathcal{O}}$ est limite à droite (monique) de la catégorie de ses sous-objets appartenant à $\mathcal{O}$ (si de plus $\mathcal{O}$ est stable par sommes directes finies dans T , cette catégorie est simplement un système inductif monique).

4.5 Exemples et co-exemples.

1) X espace topologique, T catégorie des espaces fibrés sur X, $\mathcal{O}$ sous-catégorie des ouverts de X, $T_{\mathcal{O}}$ sous-catégorie des espaces étalés sur X, $\mathcal{O}^{\circ}(E)$ catégorie des préfaisceaux, $F_{\mathcal{O}}$ sous-catégorie des faisceaux ; le langage utilisé ici est tiré de cet exemple.

2) $T = Ab$, $\mathcal{O}$ sous-catégorie des groupes abéliens finis, $T_{\mathcal{O}}$ sous-catégorie des groupes abéliens de torsion ; si on prend $\mathcal{O}'$ la sous-catégorie de $\mathcal{O}$ dont les objets sont les $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^n$ ($p \in \mathbb{P}$, n $\mathbb{N}$), on a $T_{\mathcal{O}} = T_{\mathcal{O}'}$; soit$\mathcal{O}\mathcal{O}'_p$ ($p \in \mathbb{P}$) la sous-catégorie de $\mathcal{O}'$ dont les objets sont les $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^n$ ($n \in \mathbb{N}$), on a $\mathcal{O}' = \coprod_{p \in \mathbb{P}} \mathcal{O}'_p$ donc en utilisant la remarque fait en 3.5. on obtient la décomposition classique d'un groupe de torsion en ses composantes p-primaires.

3) Par dualité, T = catégorie des groupes topologiques, $\mathcal{O}$ sous-catégorie des groupes finis discrets, $T_{\mathcal{O}}$sous-catégorie des groupes compacts totalement discontinus, $F_{\mathcal{O}}$ catégorie des pro-groupes finis.

5. Sous-catégorie ouverte.

Soit T une catégorie complète à droite et à produits fibrés finis.

5.1 <u>Définition</u> : Une sous-catégorie $o : \mathcal{O} \to \mathcal{T}$ est <u>ouverte</u> dans $\mathcal{T}$ si elle vérifie les conditions suivantes :

a) Pour tout petit foncteur $a : \mathcal{I} \to \mathcal{O}$, de limite à droite $a(i) \xrightarrow[a_i]{} \varinjlim_{\mathcal{I}} a$ dans $\mathcal{T}$, et pour tout morphisme de $\mathcal{T}$, $\alpha : F \to \varinjlim_{\mathcal{I}} a$, si l'on construit les produits fibrés

$$\begin{tikzcd} \overset{+}{\alpha}(a)(i) \arrow[r, "a_i(\alpha)"] \arrow[d, "\overset{+}{\alpha}(a_i)"'] & F \arrow[d, "\alpha"] \\ a(i) \arrow[r, "a_i"'] & \varinjlim_{\mathcal{I}} a \end{tikzcd}$$

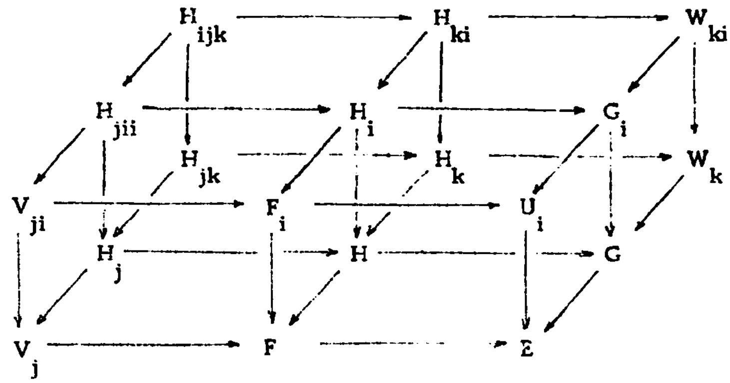
alors $F = \varinjlim_{\mathcal{I}} \overset{+}{\alpha}(a)$ et par suite $\alpha = \varinjlim_{\mathcal{I}} \overset{+}{\alpha}(a_i)$.

b) Si de plus F est un objet de $\mathcal{O}$, $\overset{+}{\alpha}(a)$ est à valeurs dans $\mathcal{O}$, ainsi que les morphismes $\overset{+}{\alpha}(a_i)$ et $\overset{+}{a_i}(\alpha)$, pour tout i de $\mathcal{I}$.

D'après b), si $\mathcal{O}$ est une sous-catégorie ouverte de $\mathcal{T}$, $\mathcal{O}$ est pré-ouverte et à produits fibrés finis (dans $\mathcal{T}$).

5.2 <u>Théorème</u>. Si $\mathcal{O}$ est une petite sous-catégorie ouverte de $\mathcal{T}$, la catégorie $\mathcal{T}_{\mathcal{O}}$ des objets de $\mathcal{T}$ étalés au-dessus de $\mathcal{O}$ est une sous-catégorie à produits fibrés finis de $\mathcal{T}$.

Soient $a : \mathcal{I} \to \mathcal{O}$, $b : \mathcal{J} \to \mathcal{O}$, $c : \mathcal{K} \to \mathcal{O}$ des petits foncteurs à valeurs dans $\mathcal{O}$, de limites à droite dans $\mathcal{T}$: $(a(i) = U_i \to E$ $(b(j) = V_j \to F)$ et $(c(k) = W_k \to G)$, et soit $f : F \to E$ et $g : G \to E$. Dans le diagramme de carrés cartésiens ci-dessous, pour tout $(i,j,k) \in \mathcal{I}\times\mathcal{J}\times\mathcal{K}$, les objets U_i, V_j, W_k, V_{ji}, W_{ki}, H_{ijk} sont des objets de $\mathcal{O}$, et $(i,j,k) \mapsto H_{ijk}$ est un foncteur de $\mathcal{I}\times\mathcal{J}\times\mathcal{K}$ dans $\mathcal{O}$. De même on a des foncteurs évidents que l'on n'explicite pas ; en particulier, $\varinjlim_{\mathcal{I}\times\mathcal{J}\times\mathcal{K}} H_{ijk} = \varinjlim_{\mathcal{J}} \varinjlim_{\mathcal{I}} \varinjlim_{\mathcal{K}} H_{ijk} = \varinjlim_{\mathcal{J}} \varinjlim_{\mathcal{I}} H_{ji} = \varinjlim_{\mathcal{I}} H_i = H$, c.q. f. d.



<u>Remarque</u> : Le théorème ci-dessus se transcrit également dans le cas où $\mathcal{O}$ est une sous-catégorie ouverte d'une catégorie $\mathcal{T}$ vérifiant les hypothèses du théorème 2.9.

5.3 <u>Décomposition stricte et triangulation stable sur</u> $\mathcal{T}_{\mathcal{O}}$.

Soit $\mathcal{O}$ une sous-catégorie ouverte de $\mathcal{T}$ telle que $\mathcal{O}$ soit petite ou vérifie les hypothèses de 2.9. $\mathcal{T}_{\mathcal{O}}$ étant alors une sous-catégorie à sommes et produits fibrés finis de $\mathcal{T}$, est stable pour les décompositions strictes à gauche et à droite de $\mathcal{T}$.

Si de plus $\mathcal{T}$ est colocalement petite, $\mathcal{T}$ admet une triangulation par monomorphisme fort, pour laquelle (à ma connaissance tout au moins) $\mathcal{T}_{\mathcal{O}}$ n'est pas stable ; mais d'autre part, $\mathcal{T}$ admet une triangulation par épimorphisme fort , que l'on peut définir comme limite à droite de décompositions strictes à droites ; $\mathcal{T}_{\mathcal{O}}$ étant stable pour ces dernières et par limites à droite, est également stable pour la triangulation par épimorphisme fort. (cf.[2] et [3]).

<u>Remarques</u> : 1) On notera que la catégorie des groupes finis n'est pas une sous-catégorie ouverte de la catégorie $\mathcal{G}r$ des groupes ; cependant, l'unicité de la triangulation de $\mathcal{G}r$ entraine sa stabilité sur la sous-catégorie complète à gauche des groupes profinis.

2) Le cas des espaces étalés au-dessus d'un espace topologique relève directement de 5.3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] . P. GABRIEL et M. ZISMAN : Séminaire homotopique, Strasbourg 1963-64.

[2] . R. PUPIER : Sur les catégories complètes, Pub. Dép. Math. Lyon (1965) t.2 fasc. 2 p.1-65

[3] . A. ROUX : Foncteurs d'équivalence dans une catégorie, Pub. Dép. Math. Lyon (1964) (t.1 , exp. 16).

Manuscrit remis le 10 juillet 1966

A. ROUX
Maitre assistant
Département de Mathematiques
15 quai Claude Bernard
LYON