PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

R. HOFFMAN

Définition d'un point générique d'un processus stationnaire. Construction d'un point générique d'un processus de Poisson

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1965, tome 2, fascicule 2
, p. 66-83

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1965__2_2_66_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1965 t.2-2

DEFINITION D'UN POINT GENERIQUE D'UN PROCESSUS STATIONNAIRE. CONSTRUCTION D'UN POINT GENERIQUE D'UN PROCESSUS DE POISSON.

R. HOFFMAN

Enoncé du problème.

Soit $x = (x_n(\omega))$, n N, un processus stochastique stationnaire au sens strict de variables réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{a}, P)$. On appellera dans la suite trajectoire, aussi bien un point ω de Ω qu'une suite de nombres réels $\xi = (\xi_n)$ de la forme $\xi_n = x_n(\omega)$ pour un point ω de Ω.

On se propose d'étudier des trajectoires qui caractérisent à elles seules le processus. Une telle trajectoire, point ω de Ω, devra permettre à elle seule de reconstruire canoniquement le processus ; la seule donnée est la suite de nombres réels $\xi_n (= x_n(\omega))$ et on ne connait d'avance rien du processus $(\Omega, \mathfrak{a}, P, x_n)$.

Dans une première partie on exposera, dans les grandes lignes, la théorie construite par Fürstemberg pour résoudre ce problème dans le cas de valeurs bornées du processus.

Dans une deuxième partie on étudiera un exemple particulièrement simple de processus à valeurs non bornées, dépendant d'un paramètre continu, le processus de Poisson. On obtiendra un résultat sur cet exemple particulier qui permettra aussi de voir en quoi consistent les difficultés nouvelles (dues au fait que les valeurs ne sont pas bornées) et de suggérer les bases d'une généralisation possible.

I - On examinera en A un exemple intuitif qui permettra de donner en B des définitions dans le cas général et de poser le problème. Enfin en C on regroupera les théorèmes donnant les principales réponses au problème.

A. Exemples. $\Omega = ([o,1])^N$ est le tore infini muni de sa tribu bozélienne et de sa mesure de Haar P.T est l'opérateur de translations sur Ω qui transforme le point $\omega \in \Omega$ de coordonnées $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots)$ en le point $T\omega$ de coordonnées $(\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{n+1}, \ldots)$. Les variables du processus sont : $x_n(\omega) = \omega_n$ n- ième coordonnée de ω dans l'espace produit Ω . Elles sont équiréparties sur $[o;1]$ et indépendantes. Ce processus sera noté CER (complètement équiréparti.) Les x_n vérifient la relation :

$$x_n(\omega) = x_{n-1}(T\omega)$$

Comment définir une "bonne" trajectoire ξ (qui est un point de Ω : $\xi = (\xi_n)$.)?

a) Les ξ_n peuvent être considérés comme le résultat de N tirages successifs sur une variable aléatoire équirépartie, donc ils sont répartis "au hasard", ce qui s'exprime de façon précise par :

Quel que soit l'intervalle (α, β) de $[0,1]$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{N(n,\alpha,\beta)}{n} = \beta - \alpha$ où $N(n,\alpha,\beta)$ est le nombre de ξ_i, $i<n$, tels que $\xi_i \in (\alpha,\beta)$.
C'est la définition d'une suite équirépartie sur $[0,1]$, notée ER.

Une telle trajectoire caractérise seulement la répartition d'une variable x_n.

b) Les couples (ξ_1, ξ_2), (ξ_3, ξ_4), ..., (ξ_{2n+1}, ξ_{2n+2}), ... peuvent être considérés comme le résultat de N tirages successifs sur un couple de variables équiréparties indépendantes, donc pour une bonne trajectoire, ils sont équirépartis dans le carré $[0,1] \times [0,1]$. Il en est de même pour la suite des couples (ξ_{2n}, ξ_{2n+1}), donc pour la suite composée à partir des deux précédentes et de terme général (ξ_n, ξ_{n+1}). C'est la définition d'une suite ξ deux fois équirépartie (notée 2-ER).

Une telle trajectoire caractérise seulement la répartition du couple (x_n, x_{n+1}).

c) Une trajectoire ξ caractérisant la répartition de $(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+p-1})$ devra être p fois équirépartie :

__Définition__. 1) On dit que $\vec{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n, \ldots)$ est équirépartie dans l'hypercube unité à p dimensions si, quel que soit C, parallélépipède à p dimensions contenu dans cet hypercube, $\lim_{n\to\infty} \frac{N(n,e)}{n}$ = volume de C, N(n,e) étant le nombre de points $\vec{u}_i, i\leq n$, contenus dans C.

2) On dit que la suite $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ est p-ER si la suite $\vec{u}_1 = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p), \vec{u}_2 = (\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{p+1})$, $\vec{u}_n = (\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+p-1})$ est une suite de points équi-répartie dans l'hypercube unité à p dimensions.

d) Une trajectoire caractérisant la loi temporelle tout entière devra être complètement équirépartie, notée CER, c'est-à-dire, par définition, une suite p-ER pour tout p , entier positif.

On va donner une définition équivalente d'une suite ER, p-ER, CER, qui permettra de passer facilement à la définition d'un point générique d'un processus stochastique stationnaire plus général.

<u>Une définition équivalente d'une suite ER est fournie par le théorème suivant</u> :

ξ est ER si et seulement si, quelle que soit f, fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ (corps des complexes),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\xi_1)+\ldots+f(\xi_n)}{n} = \int_0^1 f(x)\,dx$$

<u>Remarque :</u> Cette équivalence est encore vraie si l'on remplace l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$, noté $\mathcal{C}([0,1])$) par certains autres ensembles.

Ainsi, si ξ est ER, les moyennes existent aussi sur toutes les fonctions intégrables au sens de Riemann (Premier critère de H. Weyl).

Inversement, pour que ξ soit ER, il suffit que les moyennes existent sur un sous-ensemble de fonctions total dans $\mathcal{C}([o,1])$ pour la topologie de la convergence uniforme.

En prenant par exemple les caractères du torre $[o,1]$, on obtient le deuxième critère de H. Weyl :

ξ est ER si et seulement si, quelque soit ℓ entier de signe quelconque différent de O :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e^{2i\pi\ell\xi_1}+\dots+e^{2i\pi\ell\xi_n}}{n} = \int_o^1 e^{2i\pi\ell x}dx = o$$

<u>Théorème</u> : <u>définition équivalente d'une suite</u> p-ER.

ξ est p-ER si et seulement si, quelle que soit

$f \in \mathcal{C}([o,1]^p)$:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(\vec{u}_1)+\dots+f(\vec{u}_n)}{n} = \int_o^1\int_o^1 \dots \int_o^1 f(x_1,x_2,\dots,x_p)dx_1\dots dx_p$$

<u>Remarque</u> : ceci exprime que les suites $v_1 = (\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n,\dots)$, $v_2 = (\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_{n+1},\dots),\dots,v_p = (\xi_p,\dots,\xi_{p+n-1},\dots)$ sont p suites équiréparties indépendantes, définition un peu plus générale dont on n'a pas besoin ici.

<u>Théorème</u> : <u>définition équivalente d'une suite CER</u>.

ξ est CER si et seulement si, quelle que soit

$f \in \mathcal{C}([o,1]^N)$: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(\xi)+\dots+f(T^n\xi)}{n} = \int_{[o,1]^N} f(\omega)dP$

(En effet une suite p-ER, quel que soit p, a des moyennes sur la sous-algèbre de $\mathcal{C}([o,1]^N)$ constituée par les fonctions ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées, sous-algèbre dense dans $\mathcal{C}([o,1]^N)$.).

Passons maintenant à la définition d'un point générique d'un processus stationnaire plus général.

B - Utilisant l'équivalence, démontrée dans le livre de Doob, entre la notion de processus stochastique strictement stationnaire et la notion de transformation mesurable d'un espace de probabilité préservant la mesure, Fürstemberg se place dans le cadre suivant :

<u>Définition d'un processus strictement stationnaire discret</u>.

C'est la donnée

1) d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant les propriétés suivantes :

   a) Ω est un compact métrisable ;

   b) $\mathcal{A}$ est sa tribu borélienne ;

   c) la mesure de tout ouvert non vide est strictement positive.

2) d'une fonction continue T de Ω dans Ω préservant la mesure c'est-à-dire vérifiant $P(T^{-1}A) = P(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

3) de N fonctions continues de Ω dans un espace topologique compact Λ vérifiant $x_n(\omega) = x_{n-1}(T\omega)$.

L'exemple de A est bien un tel processus.

<u>Remarque</u> : a) les processus habituels à valeurs complexes bornées se ramènent au type ci-dessus.

b) par contre ne peuvent s'y ramener les processus à valeurs non bornées, ce qui est une restriction importante.

<u>Définition d'un point générique</u>. ω_0 est dit point générique du processus stationnaire $x = (x_n)$ si, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\Lambda^N)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f[x(\omega_0)] + \dots + f[x(T^n\omega_0)]}{n} = E\, f[x(\omega)] = \int_\Omega f[x(\omega)]\, dP$$

<u>Remarque</u> : les suites CER sont ainsi exactement les points génériques du processus CER.

<u>Définition d'une suite stochastique</u>

$\xi = (\xi_n) \in \Lambda^N$ est dite suite stochastique si, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\Lambda^N)$, $\dfrac{f(\xi) + \dots + f(T^n\xi)}{n}$ tend vers une limite quand n tend vers l'infini.

(T est ici l'opérateur de translation sur Λ^N).

Ainsi un point générique ω_0 fournit une suite stochastique $x(\omega_0) = (x_n(\omega_0))$ mais la définition de suite stochastique ne fait pas appel à la notion de processus stochastique. Le nom de suite stochastique sera justifié par le fait qu'à toute suite stochastique ξ on peut associer canoniquement un processus stochastique noté $PS(\xi)$. Deux problèmes se poseront alors :

Problème 1. ξ est-elle une trajectoire du processus PS(ξ) ?

Problème 2. Si ξ a été obtenue comme une trajectoire d'un processus "initial", le processus PS(ξ) est-il le processus "initial" ? Autrement dit, peut-on reconstruire canoniquement un processus connaissant seulement une de ces trajectoires ?

Avant de répondre à ces deux questions, donnons deux théorèmes affirmant l'existence de suites stochastiques et de points génériques

Théorème 1 : Etant donné un processus stochastique stationnaire, presque toute trajectoire ω fournit une suite stochastique $\xi = x_n(\omega)$.

Démonstration : l'espace compact Ω étant métrisable, $\mathcal{C}(\Omega)$ contient un sous-ensemble total dénombrable : (φ_p). D'après le théorème ergodique de Birkhoff, il existe $A_1 \in \mathcal{Q}$ de mesure 1, tel que pour tout $\omega \in A_1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_1(\omega) + \varphi_1(T\omega) + \ldots + {}_1(T^n\omega)}{n} = E^{\mathcal{J}} \varphi_1(\omega) \text{ où}$$

$E^{\mathcal{J}}\varphi_1(\omega)$ désigne la valeur en ω de l'espérance conditionnelle de $\varphi(\omega)$ par rapport à la tribu $\mathcal{J}$ des invariants I (les ensembles de $\mathcal{Q}$ tels que I et $T^{-1}(I)$ diffèrent d'un ensemble de mesure nulle).

De même si ω A_p $= \lim_{n\to\infty} \dfrac{\varphi_p(\omega) + \varphi_p(T\omega) + \ldots + \varphi_p(T^n\omega)}{n} = E^{\mathcal{J}} \varphi_p(\omega)$.

Si $\omega \in A = \bigwedge_p A_p$ les égalités du type ci-dessus sont valables pour tous les φ_p, donc pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$.

La conclusion résulte du fait que si $f \in \mathcal{C}(\Lambda^N)$, $f[x(\omega)]$ est une fonction de $\mathcal{C}(\Omega)$.

Remarquons que la limite obtenue n'est pas en général E_φ et que le point ω n'est pas générique. Cependant, on a immédiatement le théorème :

<u>Théorème 2</u>. Si (x_n) est ergodique (c'est-à-dire si $\mathfrak{J}$ est la tribu triviale) presque tout point de Ω est générique.

La réciproque est vraie aussi mais se démontre plus difficilement ainsi que les résultats suivants qu'on énoncera seulement et qui répondent aux deux questions posées ci-dessus.

<u>Processus stationnaire canoniquement associé à une suite stochastique</u> ξ .

Une suite stochastique ξ définit une fonctionnelle linéaire bornée sur $\mathcal{C}(\Lambda^N)$, la fonctionnelle $f \to \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(\xi)+\ldots+f(T^n\xi)}{n}$ c'est-à-dire une mesure de Radon sur le compact Λ^N qui est en fait une probabilité P.

On appelle Ω le support de cette mesure. L'opérateur T de Ω dans Ω n'est autre que la restriction à Ω de l'opérateur de translation sur Λ^N. Les variables $x_n(\omega)$ sont les applications coordonnées.

On vérifie que le triplet $[(\Omega, P), T, x_n]$ ainsi défini satisfait aux axiomes de définition d'un processus stochastique stationnaire qu'on appelle processus stationnaire canoniquement associé à ξ : PS (ξ) .

On peut donner une caractérisation simple des points du support de la mesure associée à ξ :

<u>Lemme :</u> un point ω de Λ^N appartient à Ω si et seulement si il est un "point de densité" de la suite $T^n \xi$, c'est-à-dire, si pour tout voisinage V de ω , $\limsup \frac{N(V,n)}{n} \to 0$, où $N(V,n)$ désigne le nombre des points $T^i \xi^n$, $i \leq n$, appartenant à V.

<u>Une difficulté se présente alors</u> : le point ξ n'appartient pas forcément à Ω, c'est-à-dire ξ n'est pas forcément une trajectoire de PS(ξ) . Ceci conduit à définir la notion de suite régulière.

<u>Définition</u> : on dit que ξ , suite stochastique, est régulière si ξ est une trajectoire de PS(ξ).

On démontre un théorème analogue au théorème 1 et plus précis :

<u>Théorème 1'</u> : étant donné un processus stochastique stationnaire, presque tout ω fournit une suite régulière $\xi = x_n(\omega)$.

Le problème 2 se pose alors sous la forme suivante : si ω est une trajectoire régulière d'un processus qu'on appellera initial, PS$[x(\omega)]$ est-il le processus initial ?

La réponse est donnée par le théorème suivant :

<u>Théorème 3</u> : le processus PS$[x(\omega)]$ construit sur un point ω régulier est le processus initial si et seulement si ω est générique.

Conclusion : 1) On est amené à définir les notions de point stochastique, de point régulier, de point générique d'un processus. (Un point générique est régulier, un point régulier est stochastique).

2) Un point stochastique permet de reconstruire un processus mais n'est pas forcément un point de l'espace Ω correspondant.

Un point régulier permet de reconstruire un processus et il est un point de l'espace Ω correspondant.

Un point générique d'un processus unitial permet de reconstruire ce processus initial.

3) la mesure de l'ensemble des point stochastiques (respectivement : réguliers) d'un processus est toujours 1.

Si le processus est ergodique, la mesure de l'ensemble des points génériques est 1.

Mais elle est égale à 0 pour un processus non ergodique, comme le montre le dernier théorème : étant donné un processus stationnaire, (ergodique ou non), presque tout point permet de reconstruire un processus qui est ergodique. On a donc bien une probabilité 0 de reconstruire un processus non ergodique, ce qui limite la portée de toute la théorie.

La définition d'une suite stochastique, qui ne fait pas intervenir la notion de processus stochastique, est utile en elle-même. Une telle suite admet des corrélations de tous ordres, elle est donc complètement stationnaire d'après la terminologie utilisée par VO-KHAC dans sa thèse.

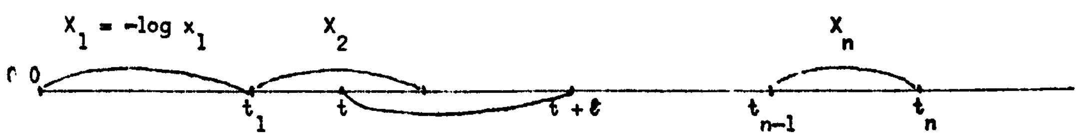
II - Construction d'un point générique d'un processus de Poisson

A. Définition du Processus de Poisson.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est le tore $[o,1]^N$, muni de la mesure de Haar P.

On se donne un premier processus CER : $x_i(\omega)$, $i \in N$. On en déduit un autre processus à variables indépendantes obéissant chacune à la loi exponentielle : $x_i(\omega) = -\log x_i(\omega)$, $i \in N$.

Portons sur l'axe des temps ($t \in R^+$) les points[1] $t_i(\omega)$, $i \in N$, vérifiant $t_i - t_{i-1} = x_i$. ℓ étant une longueur arbitraire donnée, soit $N_t(\omega)$ le nombre de points t_i tombant sur le segment $[t, t+\ell]$. $N_t(\omega)$, $t \in R^+$, est un processus de Poisson.



Question : si $\xi = (\xi_n)$ est un point générique de (x_n), la fonction $\nu(t) = N_t(\xi)$ est-elle un point générique du processus de Poisson ?

B. Généralisation de la notion de point générique.

Ici N(t) dépend de $t \in R^+$, ce qui n'est pas très gênant, et n'est pas bornée, puisqu'elle prend toutes les valeurs entières positives ou nulles, ce qui l'est plus.

---

(1) t_i désigne à la fois un point sur l'axe et son abscisse.

Car Λ est ici $R^+ (N \subset R^+)$, localement compact, Λ^{R^+} n'est même pas localement compact. Mais on peut espérer reconstruire la loi temporelle du processus par le théorème de Kolmogorov en construisant d'abord ses projections sur tous les produits $\Lambda^{\mathcal{J}}$ où $\mathcal{J}$ est un sous ensemble fini de R^+. D'où la définition suivante :

Définition : $\nu(t)$ est un point générique de $N_t(\omega)$ si, quels que soient n ; $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n (\in R^+)$, quelle que soit f continue à support compact de Λ^n dans $\mathbb{C}$,

$$\lim \frac{1}{T} \int_0^T f[\nu(\tau_1+t), \nu(\tau_2+t), \ldots, \nu(\tau_n+t)]\,dt$$

$$= E\, f[N_{\tau_1+\tau_0}(\omega), N_{\tau_2+\tau_0}(\omega), \ldots, N_{\tau_n+\tau_0}(\omega)]$$

C. Théorème. si ξ est un point générique de (x_n), processus CER, vérifiant la condition supplémentaire, notée condition C :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\log \xi_1 - \ldots - \log \xi_n}{n} = \int_0^1 (-\log x)\,dx ,$$

$\nu(t) = N_t(\xi)$ est un point générique du processus de Poisson.

Remarques :

1) Alors presque tout point de $[0,1]^N$ fournit une fonction générique du processus de Poisson, puisque d'après le théorème de Birkhoff la condition supplémentaire est encore vérifiée presque partout.

2) Mais les exemples de suites CER déjà très difficiles à construire effectivement. (voir Posnikov) et je ne connais pas d'exemple de suite CER vérifiant (1).

3) Les suites CER sont liées aux nombres absolument normaux. Korobov a établi que : si ξ_n est CER, la suite $[\xi_n g]$ (partie entière de $\xi_n g$) est une suite normale d'indices par rapport à l'entier g.

Avant Korobov, Wall avait établi l'équivalence suivante : α réel est normal par rapport à l'entier g si et seulement si la suite $u_n = \alpha g^n$, modulo 1, est une suite ER.

Démonstration : il faut étudier l'existence des moyennes temporelles

$$\mathfrak{M} f[\nu(\tau_1+t),\ldots,\nu(\tau_n+t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f[\nu(\tau_1+t),\ldots,\nu(\tau_n+t)]\,dt$$

$$= \mathfrak{M}\Big[\sum_{\substack{k_1 = 1 \text{ à } \infty \\ k_n = 1 \text{ à } \infty}} f(k_1,k_2,\ldots k_n)\,1_{k_1\ldots k_n}(t)\Big]$$ où $1_{k_1,\ldots,k_n}(t)$ est

égale à 1 si $\nu_{\tau_1+t} = k_1$ et $\nu_{\tau_2+t} = k_2\ldots$ et $\nu_{\tau_n+t} = k_n$ et à o dans le cas contraire, puisque ν peut prendre seulement toutes les valeurs entières positive ou nulle.

1) Comme f est nulle dès que l'un des k_i est assez grand, l'existence de $\mathfrak{M} f$ est ramenée à celle des $\mathfrak{M}\, 1_{k_1\ldots k_n}(t)$.

2) Pour $T \in (t_n, t_{n+1})$,

$$\frac{1}{T}\int_o^T 1_{k_1\ldots k_n}(t)\,dt = \frac{t_n}{T}\;\frac{1}{t_n}\int_o^{t_n} 1_{k_1\ldots k_n}(t)\,dt + \frac{1}{T}\int_{t_n}^T 1_{k_1\ldots k_n}(t)\,dt$$

$$= \frac{t_n}{T}\;\frac{\sum_1^n \pi_i/n}{\sum_1^n \Xi_i/n} + \frac{1}{T}\int_{t_n}^T 1_{k_1\ldots k_n}(t)\,dt,$$

où $\Xi_i = -\log \xi_i$ et où π_i est la mesure de l'ensemble des points de (t_{i-1}, t_i) où $1_{k_1\ldots k_n}(t) = 1$.

<u>Lemme 1</u> : si ξ est un point générique de (x_n) , Ξ est un point générique de X_n.

En effet pour toute fonction continue à support compact de $\mathbb{R}^{+N}$ dans $\mathbb{C}$:

$$f(X_1,\ldots X_n) = f\,(-\log x_1, \ldots, -\log x_n)$$
$$= f(-\log_{a_1} x_1, \ldots, -\log_{a_n} x_n)$$ où les fonctions $\log_{a_i}(x_i)$ sont les logarithmes tronqués à a_i, les a_i étant assez grands pour que $\prod_1^n [o, a_i]$ contienne le support de f. Les moyennes à calculer sur Ξ sont égales à des moyennes sur ξ relatives à des fonctions continues. Elles existent donc et ont bien la valeur attendue.

<u>Lemme 2</u> : si ξ est un point générique de (x_n), $\pi = (\pi_n)$ est un point générique du processus P_n déduit de (x_n) par la loi indiquée ci-dessus.

(en effet, pour tous les $(k_1, \dots k_n) \neq (o, o, \dots o)$ les fonctions P_i sont des fonctions bornées, continues des x_i, le cas $(o, o, \dots o)$ s'étudie par différence).

L'hypothèse (1) du théorème assure l'existence d'une moyenne associée à Ξ et à une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continue mais à support non compact (et même tendant vers l'infini à l'infini) la fonction $x \to x$.

Cette hypothèse entraîne :

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sum^n \Xi i}{n} = E(X_1) = \int_\Omega X_1 \, dP$ (c'est l'hypothèse elle-même)

b) on montre facilement qu'alors, P_n étant inférieur à X_n,

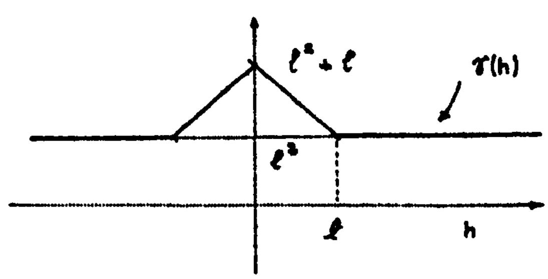
$$\lim_{\pi \to \infty} \frac{\sum_1^n \pi_i}{n} = E(P_1) .$$

c) $\lim\limits_{T \to P} \dfrac{t_n}{T} = 1$ et $\lim\limits_{T \to \infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{t_n}^{T} 1_{k_1 \dots k_n}(t)\,dt = o$

donc $\mathfrak{M}\, 1_{k_1 \dots k_n}(t)$ existe et a bien la valeur attendue.

D. Peut-on affirmer que la fonction $\nu(t)$ ainsi construite est stationnaire et a pour fonction de corrélation

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= \ell^2 + \ell - |h| && \text{pour } o \leqslant |h| \leqslant \ell \\ &= \ell^2 && \text{pour } h \geqslant \ell \end{aligned}$$



La fonction de corrélation de $\nu(t)$ est $\gamma'(h)$:

$$\gamma'(h) = \mathfrak{M}[\nu(t)\ \nu(t+h)]$$

Cette moyenne est bien de la forme des moyennes considérées plus haut mais la fonction f est ici la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: $f(x,y) = xy$ et n'est pas à support compact. On a :

$$\gamma'(h) = \mathfrak{M}\Big[\sum_{\substack{k_1=1 \text{ à } \infty \\ k_2=1 \text{ à } \infty}} k_1\ k_2\ 1_{k_1 k_2}(t)\Big]$$

et ici on ne peut intervertir le signe $\mathfrak{M}$ et le signe $\sum$ de sorte que $\gamma'(h)$ n'existe pas forcément; Pour assurer son existence il faut faire une hypothèse supplémentaire du genre de l'hypothèse C. L'hypothèse C traduisait le fait qu'il n'y a pas "trop" de points de la suite voisins de O. La nouvelle hypothèse devra traduire le fait qu'il n'y a pas "trop" de points de la suite voisins de 1.

Conclusion :

On voit sur cet exemple quelles sont les idées principales qui pourront conduire à la généralisation des notions de point générique et de suite stochastique. Cette généralisation est précisément adaptée à la difficulté supplémentaire due au fait que l'espace d'arrivée est localement compact.

Un point générique fournira une fonction qui aura "beaucoup" d de moyennes et en particulier toutes les fonctions de corrélation tronquées existeront et permettront de reconstruire indirectement les fonctions de corrélation (non tronquée) qui n'existeront pas forcément. Si on veut assurer l'existence, au sens habituel, de ces fonctions de corrélation, on devra faire des hypothèses supplémentaires sur la fonction stochastique.

BIBLIOGRAPHIE

BASS J. - suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudoaléatoires : Bull Soc. Math. Fr. 87 (1959), p. 1-64.

les fonctions pseudo-aléatoires Mémorial des Sciences Mathématiques fasc. 153 (1962)

BERTRANDIAS J.P. - suites pseudo-aléatoires et critères d'équirépartition modulo 1. Compositio mathematica 15 (1964) p. 23-28.

FURSTEMBERG H. - stationary processes and prediction theory Princeton university Press (1960).

MENDES-FRANCE M. - nombres normaux et fonctions pseudoaléatoires Ann. Inst. Fourier 13 (1963) p. 91-104.

POSTNIKOV A.G. - modèle arithmétique de processus stochastiques Travaux de l'Institut de Mathématiques V.A. STEKLOV Moscou 1960.

VO-KHAC - thèse (1965).

WAGNER - Séminaire d'analyse fonctionnelle de Grenoble (janvier-février 1965).