R. PUPIER

Sur les catégories complètes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1965, tome 2, fascicule 2
, p. 1-65
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1965__2_2_1_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1965 t.2-2

SUR LES CATEGORIES COMPLETES

R. Pupier

Introduction

L'origine de ce travail se trouve dans la nécessité de caractériser les images d'un morphisme dans une catégorie. A ce premier objectif s'est immédiatement ajoutée la recherche de théorèmes d'homomorphie dont on connait les écueils tant en théorie des demi-groupes qu'en topologie.

Devant l'extrême généralité des catégories quelconques et l'insuffisance de leurs propriétés, nous avons choisi d'utiliser comme outil fondamental les produits et sommes fibrés, ce qui nous entraine à en postuler l'existence, ou tout au moins à trouver des axiomes assez naturels qui impliquent cette existence.

Dans une première partie, il est donné certains critères d'existence de limites à gauche (ou à droite) d'un petit foncteur, puis des théorèmes de décomposition des morphismes, ainsi qu'un théorème d'équivalence entre l'existence des limites à gauche ou à droite et celle d'une image d'un morphisme. Les résultats importants de ce chapitre ont été résumés dans une note aux Compte-Rendus : ils se trouvent également dans [13], avec une terminologie différente et sans l'utilisation des produits fibrés.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude des propriétés fonctorielles des décompositions définies au chapitre 1. Ces propriétés fonctorielles permettent de montrer quelques résultats sur les produits directs (et sommes directes) de morphismes. On illustre ensuite ces résultats théoriques par l'étude très rapide de certaines catégories usuelles ; ces applications montrent entre autre que la vérification de propriétés catégoriques simples demande parfois l'utilisation de techniques "non triviales" dans la théorie particulière considérée. L'exemple des demi-groupes, un peu plus développé que les autres, est l'origine précise de ce travail.

Dans le troisième chapitre, on rappelle brièvement les propriétés des "structures algèbriques" simples sur les objets d'une catégorie (paragraphe (3,1), cf.[2],[11]). Puis on donne quelques applications des résultats établis dans les chapitre 1 et 2, en supposant que la catégorie de base est une catégorie complète. Nous nous bornons à la méthode élémentaire de [2], sans utiliser les définition fonctorielles de [11], les catégories envisagées possèdant des produits directs.

<u>Terminologie et notations</u>.

Il sera souvent fait usage du sigle "ssi" en place de "si et seulement si".

La terminologie utilisée est dans l'ensemble, celle de [8] et [15], à laquelle se sont ajoutées quelques expressions plus récentes (cf. [7] par exemple).

La notion de sous-objet (resp. objet quotient) est celle de [8]. Si f est un morphisme, on appelle <u>décomposition triangulaire</u> de f la donnée d'un monomorphisme i et d'un épimorphisme p, tels que f = i.p.

On dira, avec [9] qu'un monomorphisme i est <u>strict</u>, si pour tout morphisme f, tel que pour tout couple (u,v) avec u.i = v.i, on ait u.f = v.f, alors f est factorisé par i. La notion duale est celle d'épimorphisme strict.

Si dans la définition précédente, on suppose que la catégorie $\mathbb{C}$ possède un objet nul, on dira que i est <u>normal</u> si, pour tout f tel que u.i = o entraine u.f = o, f est factorisé par i. La notion duale est celle d'épimorphisme <u>conormal</u>.

On utilisera souvent la notion de produits directs (resp. sommes directes) ; sans précision de notre part, l'expression "catégorie possèdant des produits directs" signifie que pour toute famille <u>non vide</u>, indexée par un ensemble, d'objets de la catégorie, le produit direct existe. Rappelons que l'existence du produit direct pour une famille vide est équivalent à l'existence d'un objet final.

Soit maintenant V une petite catégorie (i.e. Ob(V) est un ensemble) ; pour un foncteur $F : V \longrightarrow C$, on appelle <u>cône projectif de base</u> F et de sommet M une famille de morphismes $(u_i)_{i\in V}$ telle que u_i soit un morphisme de M dans F(i) et que pour tout $\alpha \in \mathrm{Hom}_V(i,j)$, on ait $F(\alpha).u_i = u_j$. Les cônes projectifs de base F forment une catégorie où un morphisme de (M,u_i) dans (N,v_i) est un morphisme $f : M \longrightarrow N$ tel que $v_i.f = u_i$. On dit que F possède une <u>limite à gauche</u> si cette catégorie possède un <u>objet final</u>. Il est facile de voir que cette limite à gauche est définie à un isomorphisme près. On définit de façon évidente les <u>cônes inductifs</u> et les <u>limites à droite</u>.

Enfin on utilisera la notion de foncteur adjoint à gauche ou à droite (due à D.M.Kan[14]).

Les numéros entre [ ] renvoient à la bibliographie.

Ch. 1 Théorèmes d'homomorphie.

(1,1) Définition des produits fibrés (sommes fibrées).

Soient $\mathbb{C}$ une catégorie, I un ensemble, ω un élément n'appartenant pas à I, $\mathfrak{a} = \mathrm{Card}(I)$; on considère la catégorie V dont l'ensemble des objets est $I \cup \{\omega\}$, et dont les morphismes sont les identités, et pour tout $i \in I$, une flèche de "ω vers i". Soit enfin F un foncteur contravariant (resp. covariant) de V dans $\mathbb{C}$; on appelle produit fibré (resp. somme fibrée) de F la limite à gauche (resp. à droite) si elle existe, du foncteur F. Si tout foncteur contravariant (resp. covariant) de V dans $\mathbb{C}$ possède un produit fibré (resp. une somme fibrée), on dit que $\mathbb{C}$ possède des $\mathfrak{a}$-produits fibrés (resp. $\mathfrak{a}$-sommes fibrées). Il est évident que cette propriété ne dépend que de $\mathfrak{a}$. Si $\mathbb{C}$ possède des 2-produits fibrés, elle possède des n-produits fibrés, pour tout entier $n \geq 1$. Dans la suite, on se bornera à énoncer les propriétés des produits fibrés ou des sommes fibrées, négligeant souvent les inévitables (resp. ...). Enfin, on dira que $\mathbb{C}$ possède des produits fibrés quelconques si $\mathbb{C}$ possède des $\mathfrak{a}$-produits fibrés pour tout cardinal $\mathfrak{a}$; l'expression précédente ayant un sens aussi bien si l'on utilise la théorie des "Univers" ou la classe de tous les ensembles (Gödel).

Il est bon de noter une présentation et une terminologie pratiques dans les descriptions : un 2-produit fibré se représentera par un diagramme du type suivant :

(1,1,0,1)
$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & B \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "g"'] & A \end{tikzcd}$$

satisfaisant aux propriétés :

a) $f.g' = g.f'$;

b) quels que soient les morphismes x et y tels que $f.x = g.y$, il existe un unique morphisme z tel que $x = g'.z$ et $y = f'.z$. Le diagramme commutatif (1,1,o,1) représentant le produit fibré P, que l'on notera $B\pi_A C$, s'appelle encore <u>carré cartésien</u> (cf.[7]) ; dualement, pour une somme fibrée, notée $B\amalg_A C$, on aura un <u>carré co-cartésien</u>.

(1,1,1) <u>Proposition</u>. Soient $f : A \to B$ et $g : A \to C$ deux morphismes ; si la somme fibrée $S = B\amalg_A C$ existe et si le produit fibré $P = B\pi_S C$ existe, le diagramme suivant est stable (i.e. $S = B\amalg_P C$) :

(1,1,1,1)
$$\begin{tikzcd} & & B \arrow[dr, dash] & \\ A \arrow[urr, dotted, dash, "f"] \arrow[r, dash, "h"] \arrow[drr, dash, "g"'] & P \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & S \\ & & C \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

Soient $p : B \to S$, $q : C \to S$, $i : P \to B$, $j : P \to C$ les morphismes canoniques et soient x et y deux morphismes tels que $x.i = y.j$; alors $x.f = x.i.h = y.j.h = y.g$ et il existe z tel que $z.p = x$ et $z.q = y$; l'unicité est immédiate.

(1,1,1,2) <u>Corollaire</u>. Si $f = g$ et $P = A$, alors f est un monomorphisme strict.

En effet, $f.x = f.y$ entraine par unicité $x = y$; de plus, si h est un morphisme de but B tel que $x.h = y.h$ dès que $x.f = y.f$, on a en particulier $p.h = q.h$; donc h est factorisé par f.

Réciproquement :

(1,1,1,3) <u>Corollaire</u>. Si f est un monomorphisme strict, le carré cocartésien

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d] \\ B \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

est aussi un carré cartésien.

En effet, dans le diagramme (1,1,1,1), p et q possèdent une rétraction commune r ; donc $i = 1_B.i = r.p.i = r.q.j = 1_B.j = j$; si x et y sont tels que $x.f = y.f$, on a ainsi $x.i = y.i$ et i est factorisé par f ; h possède une section et c'est un isomorphisme.

Dualement, le diagramme suivant est stable :

(1,1,1,4)

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d] \arrow[drr] & & \\ P \arrow[ur] \arrow[dr] & S & & A \\ & C \arrow[u] \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

et l'on obtient des corollaires analogues pour les épimorphismes stricts.

(1,1,2) <u>Proposition</u>. Si $\mathbb{C}$ possède un objet final et des α-produits fibrés, alors $\mathbb{C}$ possède des α-produits directs.

Soit A l'objet final et soit $F : V \longrightarrow \mathbb{C}$ (cf.(1,1)) un foncteur contravariant tel que $F(\omega) = A$; F admet pour limite à gauche le produit direct des $F(i)$.

Remarquons cependant que, dans la pratique, l'existence des produits fibrés (resp. des sommes fibrées) est en général démontrée au moyen de l'existence des produits directs (resp. sommes directes).

(1,1,3) Proposition. Soit

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \\ \cdot \arrow[r, "f"'] & \cdot \end{tikzcd} \quad \text{(resp.} \quad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & \cdot \arrow[d, "g'"] \\ \cdot \arrow[r, "f'"'] & \cdot \end{tikzcd} \quad)$$

un carré cartésien (resp. cocartésien) ; si f est un monomorphisme (resp. un épimorphisme), f' est un monomorphisme (resp. un épimorphisme).

En effet, $f'.x = f'.y$ entraîne $f.g'.x = g.f'.x = g.f'.y = f.g'.y$ et $g'.x = g'.y$, donc $x = y$.

La proposition se généralise immédiatement à une famille de monomorphismes de même but (resp. d'épimorphismes de même source).

(1,1,4) Proposition. Soient f et g deux morphismes de M dans N ;

si dans le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "i"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[d, "{(f,g)}"] \\ N \arrow[r, "\Delta_N"'] & N\times N \end{tikzcd}$$

i est un épimorphisme , alors f = g et i est un isomorphisme.

On a, en désignant par p et p' les projections de $N\times N$ sur N,

$f.i = p.(f,g).i = p.\Delta_N.u = u = p'.\Delta_N.u = p'.(f,g).i = g.i$; d'où

$f = g$; mais alors,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "1_M"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[d, "(f,f)"] \\ N \arrow[r, "\Delta_N"'] & N \times N \end{tikzcd}$$

est un carré cartésien et i est un isomorphisme.

Enfin, pour terminer ces préliminaires, on remarquera que le produit fibré permet de construire la borne inférieure d'une famille de sous-objets d'un objet, pour la relation d'ordre classique entre ceux-ci. Ainsi :

(1,1,5) Proposition. Soit (P,i) et $Q(,j)$ deux sous-objets d'un objet M ;le produit fibré $P\pi_M Q$ est isomorphe à la borne inférieure de (P,i) et (Q,j).

Il suffit de remarquer que le morphisme canonique i' (resp. j') de $P\pi_M Q$ dans P (resp. dans Q) est un monomorphisme d'après (1,1,3).

(1,2) Critère d'existence des limites à gauche (à droite).

Ce critère est une généralisation de celui connu dans le cas fini (cf.[3]).

(1,2,1) Théorème. Si la catégorie $\mathbb{C}$ possède des produits directs quelconques et des 2-produits fibrés, tout foncteur F d'une petite catégorie V dans $\mathbb{C}$ possède une limite à gauche.

Soit $i, j, \ldots$ les objets de V et $\alpha, \beta, \ldots$ (ou α_{ji} lorsque c'est nécessaire) les orphismes de V ; $\mathrm{Hom}(V)$ est un ensemble. Le produit direct $A = \prod_{i \in V} F(i)$, (p_i) existe. Soit $j \in V$; pour tout

$\alpha \in Hom(V)$, on définit un morphisme de A dans $F(j)$ de la façon suivante : s'il existe $i \in V$ tel que $\alpha \in Hom(i,j)$, on pose $g_{\alpha j} = F(\alpha).p_i$; sinon, on pose $g_{\alpha j} = p_j$; on obtient ainsi, pour tout α, un morphisme $g_\alpha : A \longrightarrow A$ tel que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} & F(j) \\ A \arrow[ur, "g_{\alpha j}"] \arrow[r, "g_\alpha"'] & A \arrow[u, "p_j"'] \end{tikzcd}$$

Soit $B = A^{Hom(V)}$, (p_α) ; il existe un unique morphisme $g : A \longrightarrow B$ tel que $p_\alpha.g = g_\alpha$. On considère le carré cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "h"] \arrow[d, "h'"'] & A \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "\Delta_A"'] & B \end{tikzcd}$$

où Δ_A est le morphisme diagonal de A dans B.

De $g.h = \Delta_A.h'$, on déduit $g_\alpha.h = p_\alpha.g.h = p_\alpha.\Delta_A.h' = h'$, quel que soit $\alpha \in Hom(V)$. On pose $f_i = p_i.h : K \longrightarrow F(i)$; les f_i définissent un cône projectif de sommet K et de base F ; en effet, on a $F(\alpha_{ji}).f_i = F(\alpha_{ji}).p_i.h = g_{\alpha j}.h = p_j.g_\alpha.h$; or $g_\alpha.h$ est indépendant de α et il existe un $\beta \in Hom(V)$ tel que $p_j.g_\beta = p_j$; d'où $F(\alpha_{ji}).f_i = p_j.g_\alpha.h = p_j.g_\beta.h = p_j.h = f_j$.

Soit alors (X,u_i) un cône projectif de base F. Soit $u : X \longrightarrow A$ le morphisme de composantes u_i. Calculons $g.u$. Pour cela, comme $p_\alpha.g.u = g_\alpha.u$, on a $p_j.g_\alpha.u = F(\alpha).p_i.u = F(\alpha).u_i = u_j$ si $\alpha \in Hom(i,j)$

sinon, $p_j.g_\alpha = p_j$ et $p_j.g_\alpha.u = p_j.u = u_j$; ceci montre que $g_\alpha.u = u$ quel que soit $\alpha \in \mathrm{Hom}(V)$ (remarquons que $h = g_\alpha.h' = h'$) ; il existe donc $v : X \longrightarrow K$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& & A \arrow[dr, "g"] & \\
X \arrow[urr, "u"] \arrow[r, "v"] \arrow[drr, "u"'] & K \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "h"'] & & B \\
& & A \arrow[ur, "A"'] &
\end{tikzcd}$$

Enfin, soit v' tel que $u_i = f_i.v'$, quel que soit $i \in V$; de $p_i.h.v' = p_i.h.v$, il vient $h.v' = h.v$; d'où $v' = v$, car h est un monomorphisme d'après (1,1,3).

(K, f_i) est donc une limite à gauche du foncteur F.

(1,2,1,1) <u>Corollaire</u>. Dans une catégorie $\mathbb{C}$ qui possède des produits directs quelconques et des 2-produits fibrés, les produits fibrés quelconques existent également.

(1,3) <u>Générateurs et coséparateurs</u>

Nous donnons ici une forme faible de la notion de générateur (cf.[20]).

(1,3,1) <u>Définition.</u> Un objet U d'une catégorie $\mathbb{C}$ s'appelle un <u>générateur</u>, si pour tout monomorphisme $u : A \longrightarrow B$ non <u>épimorphique</u>, il existe un morphisme $f : U \longrightarrow B$ non relevable par u.

En d'autres termes, pour un monomorphisme u, "Hom(U,u) est surjective" entraine "u est un bimorphisme".

On dira qu'un générateur est <u>strict</u>, si, dans les mêmes conditions, "Hom(U,u) surjective" entraine "u est un isomorphisme".

A la notion de générateur est liée celle de coséparateur ([20]).

(1,3,2) <u>Définition</u>. Un objet U de $\mathbb{C}$ est appelé <u>coséparateur</u> si, quels que soient les morphismes u et v de même source et de même but, Hom(U,u) = Hom(U,v) entraine u = v.

Autrement dit, si $u \neq v$ ont même source et même but, il existe un morphisme f de source U tel que $u.f \neq v.f$.

(1,3,3) <u>Proposition.</u> Tout coséparateur est un générateur.

Réciproquement :

(1,3,4) <u>Proposition</u>. Soit $\mathbb{C}$ une catégorie possèdant des 2-produits directs et des 2-produits fibrés ; si U est un générateur, U est un coséparateur.

En effet, soit $u : M \longrightarrow N$ et $v : M \longrightarrow N$ deux morphismes tels que $u.f = v.f$, pour tout $f : U \longrightarrow M$; dans le carré cartésien suivant

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "i"] \arrow[d] & M \arrow[d, "(u,v)"] \\ N \arrow[r, "\Delta_N"'] & N \times N \end{tikzcd}$$

qui existe par hypothèse, on a $\Delta_N.u.f = (u,v).f$; il existe donc $g = U \longrightarrow P$ tel que $i.g = f$. Par conséquent i est un bimorphisme d'où le résultat, d'après (1,1,4).

Nous aurons souvent besoin dans la suite de deux propriétés duales concernant les objets d'une catégorie (cf.[1], [13]) ; nous les désignerons constamment par (E) et (E').

(E) Pour tout objet M de $\mathbf{C}$, les sous-objets de M forment un ensemble.

(E') Pour tout objet M de $\mathbf{C}$, les objets quotients de M forment un ensemble.

Ces deux propriétés se trouvent naturellement dans les catégories concrètes.

(1,3,5) <u>Proposition</u>. Soit $\mathbf{C}$ une catégorie possèdant des 2-produits fibrés et un générateur strict ; alors $\mathbf{C}$ satisfait à l'axiome (E).

Soit M un objet de $\mathbf{C}$, et soit (A, i_A) un sous-objet de M ; soit H_A l'ensemble des morphismes de U dans M, relevés par i_A. Si pour un sous-objet (B, i_B) de M, on a $H_A = H_B$ pour tout $f : U \longrightarrow A$, il existe $g : U \longrightarrow B$ tel que $i_A.f = i_B.g$. Donc f est factorisé par $A \wedge B$. Le monomorphisme canonique de $A \wedge B$ dans A est un isomorphisme et $A \wedge B = A$; on a de même $A \wedge B = B$. Les sous-objets de M sont en correspondance bijective avec une partie de $\mathcal{P}(\mathrm{Hom}(U,M))$ et forment donc un ensemble.

Le résultat précédent est un peu affaibli dans une catégorie possèdant un générateur. Nous aurons besoin de deux lemmes :

(1,3,6,1) <u>Lemme</u>. Dans une catégorie $\mathbf{C}$ possèdant des 2-produits fibrés, L'intersection de deux sous-objets stricts d'un objet M est un sous-objet strict de M.

Soit le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} A \wedge B \arrow[r, "e_A"] \arrow[d, "e_B"'] & A \arrow[d, "i_A"] \\ B \arrow[r, "i_B"'] & M \end{tikzcd}$$

et soit x un morphisme tel que, pour tout couple (u,v) de morphismes satisfaisant à $u.i_{A\wedge B} = v.i_{A\wedge B}$, on ait $u.x = v.x$. Pour tout couple (u',v') tel que $u'.i_A = v'.i_A$, on a donc $u'.x = v'.x$ et x est factorisé par i_A : $x = i_A.x_A$. De même $x = i_B.x_B$. Il existe donc x' tel que $x = i_{A\wedge B}.x'$.

(1,3,6,2) Lemme. Soient i et j deux monomorphismes stricts de même but M ; s'il existe un épimorphisme p tel que $i = j.p$, i et j sont équivalents.

Soient u et v deux morphismes tels que $u.i = v.i$. On a $u.j.p = v.j.p$, donc $u.j = v.j$ et j est factorisé par i : $j = i.q$; on en déduit immédiatement que p est un isomorphisme.

(1,3,7) Proposition. Soit $\mathbf{C}$ une catégorie possèdant des 2-produits fibrés et un générateur ; alors les sous-objets stricts d'un objet forment un ensemble.

La démonstration est analogue à celle de (1,3,5), compte tenu des deux lemmes précédents.

On désignera par (e) la propriété ensembliste de la proposition (1,3,7), et par (e') la propriété duale.

D'une façon générale, les définitions et propositions "duales" de celles énoncées ci-dessus seront désignées par (1,3,-)'.

(1,4) <u>Existence des noyaux et des conoyaux</u>.

On suppose ici que $\mathbb{C}$ est une catégorie qui possède un objet nul.

(1,4,1) <u>Proposition</u>. Si $\mathbb{C}$ possède des 2-produits fibrés, tout morphisme de $\mathbb{C}$ possède un noyau.

En effet, le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, dotted, "i"] \arrow[d, "o"'] & M \arrow[d, "f"] \\ 0 \arrow[r, dotted, "o"'] & N \end{tikzcd}$$

existe pour tout morphisme f et i est un monomorphisme.

(1,4,2) <u>Proposition</u>. Si de plus $\mathbb{C}$ satisfait à l'axiome (e) et possède des produits directs quelconques, tout sous-objet normal d'un objet M est un noyau.

Soient (A, i_A) un sous-objet normal de M et f un morphisme tel que $f.i_A = o$; f possède un noyau (H, i_H) et, comme $\mathbb{C}$ satisfait à (e), les (H, i_H) forment un ensemble ; de plus on a $i_A = i_H . j_H$. Soit (K, i_K) le produit fibré des (H, i_H) (i.e. leur intersection) qui existe, d'après (1,2,1). Pour chaque (H, i_H), soit $g_H : M \to N_H$ un morphisme ayant pour noyau (H, i_H) et soit $N = \prod N_H$. On a les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "j_K"] \arrow[d, equal] & K \arrow[r, "i_K"] \arrow[d, "i'_H"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & N \arrow[d, "p_H"] \\
A \arrow[r, "j_H"'] & H \arrow[r, "i_H"'] & M \arrow[r, "g_H"'] & N_H
\end{tikzcd}$$

On a ainsi $p_H.g.i_K = p_H.g.i_H.i'_H = o$ pour tout H, donc $g.i_K = o$. De plus, si $h : X \longrightarrow M$ est tel que $g.h = o$, on a $p_H.g.h = g_H.h = o$ quel que soit H, donc h est factorisé par i_H et, par suite, par i_K. Enfin, pour tout h tel que $h.i_A = o$, on a $h.i_K = o$ et, comme A est normal, on a $i_K \leq i_A$ donc l'égalité.

Dualement, on aura bien entendu :

(1,4,3) Proposition. Soit $\mathbb{C}$ une catégorie possèdant un objet nul, des sommes directes quelconques et des 2-sommes fibrées et satisfaisant à (e'). Alors tout objet quotient conormal est un conoyau.

(1,5) Existence des décompositions triangulaires.

Nous nous proposons dans cette section de montrer l'existence de décompositions triangulaires particulières pour les morphismes d'une catégorie possèdant des produits fibrés (resp. des sommes fibrées).

Soit $\mathbb{C}$ une catégorie possèdant des produits directs et des 2-produits fibrés, donc des limites à gauche. On suppose de plus que $\mathbb{C}$ satisfait à (E). Soit f un morphisme de M dans N ; on désigne par $\mathfrak{F}$ l'ensemble des sous-objets de N qui factorisent f ; on a $\mathfrak{F} \neq \emptyset$, car $(N, 1_N) \in \mathfrak{F}$. Soit (I,i) l'intersection des

$(S, i_S) \in \mathfrak{S}$. On a les diagrammes sommutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_S"] \arrow[ddr, dotted, "p"'] & & N \\
& S \arrow[ur, "i_S"'] & \\
& I \arrow[u, "j_S"] \arrow[uur, dotted, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

car la propriété "$f = i_S.p_S$ pour tout S" montre qu'il existe $p : M \longrightarrow I$ tel que $p_S = j_S.p$, et $f = i.p$. Comme les j_S sont des monomorphismes, i est un monomorphisme. On désignera par Im(f) le sous-objet de N équivalent à i. C'est le <u>plus petit sous-objet de</u> N <u>factorisant</u> f.

(1,5,1) <u>Proposition</u>. Im(f) est un bimorphisme, ssi f est un épimorphisme.

La condition est évidemment suffisante. Si maintenant Im(f) est un bimorphisme, soient g et h deux morphismes tels que $g.f = h.f$; considérons le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, dotted, "j"] \arrow[d] & N \arrow[d, "(g,h)"] \\
P \arrow[r, "\Delta_P"'] & P \times P
\end{tikzcd}$$

de $g.f = h.f$, il vient $(g,h).f = \Delta_P.g.f = \Delta_P.h.f$; il existe donc $q : M \longrightarrow K$ tel que $f = j.q$; comme j est un monomorphisme, Im(f) est factorisé par j, qui est ainsi un bimorphisme ; et on a $g = h$, d'après (1,1,4).

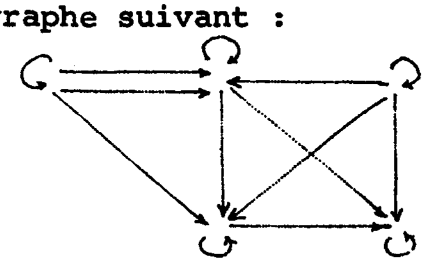
(1,5,2) <u>Proposition.</u> Dans la décomposition $f = \mathrm{Im}(f).p$, p est un épimorphisme.

Soit I la source de $\mathrm{Im}(f)$ (et le but de p). On peut décomposer p sous la forme $p = \mathrm{Im}(p).p'$; alors $f = \mathrm{Im}(f).\mathrm{Im}(p).p'$
$\mathrm{Im}(f).\mathrm{Im}(p) \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(f)$ entraine $\mathrm{Im}(p) = 1_I$; d'où le résultat d'après (1,5,1).

Remarquons que $\mathrm{Im}(p)$ n'est pas seulement un bimorphisme, mais aussi un isomorphisme.

(1,5,3) <u>Définition</u>. On appelle épimorphisme <u>fort</u> un épimorphisme $f : M \longrightarrow N$ tel que $\mathrm{Im}(f) = 1_N$.

Une rétraction, un épimorphisme strict, un épimorphisme conormal sont des épimorphismes forts ; je ne connais pas d'exemple naturel d'épimorphisme fort qui ne soit pas strict (cf.[13]).
Considérons le graphe suivant :



qui est une catégorie de façon évidente : p est un épimorphisme fort, mais non strict.

Soit p un épimorphisme fort ; si c'est un monomorphisme, c'est un isomorphisme : en effet, il est sectionnable.

(1,5,4) <u>Proposition</u>. La décomposition $f = \mathrm{Im}(f).p$ est l'unique décomposition triangulaire pour laquelle l'épimorphisme est fort.

Soit $f = j.q$ une décomposition triangulaire où q est fort. $\mathrm{Im}(f) \leq j$ entraine $\mathrm{Im}(f) = j.j'$, d'où $j.j'.p = j.q$ et $j'.p = q$. Donc j' est un isomorphisme.

A la place de la décomposition triangulaire $f = \mathrm{Im}(f).p$, on utilise souvent l'objet quotient de M équivalent à p, qu'on désigne par $\overline{\mathrm{Coim}}(f)$; on obtient ainsi la décomposition carrée :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\overline{\mathrm{Coim}}(f)"'] & N \\ \bar{P} \arrow[r, "\bar{f}"'] & I \arrow[u, "\mathrm{Im}(f)"'] \end{tikzcd}$$

où $\bar{f}$ est un isomorphisme.

Dans toute la suite, on dira que $\mathrm{Im}(f)$ est <u>l'image faible</u> de f et $\overline{\mathrm{Coim}}(f)$ la <u>coimage forte</u> de f.

Si nous supposons maintenant que **C** satisfait à des conditions duales de celles données au début de ce paragraphe (sommes directes, 2- sommes fibrées, axiome (E')), on obtient le résultat suivant :

(1,5,5) <u>Proposition</u>. Tout morphisme $f : M \longrightarrow N$ possède une décomposition $f = i.\mathrm{Coim}(f)$, où $(P, \mathrm{Coim}(f))$ est un objet quotient de M et i un monomorphisme tel que $\mathrm{Coim}(i) = 1$ (monomorphisme fort). Cette décomposition est l'unique décomposition triangulaire où le monomorphisme i est fort.

(1,5,6) <u>Définition</u>. On appellera catégorie complète (cf.[5]) une catégorie possédant des sommes et produits directs, et des 2-sommes et 2-produits fibrés. On désignera ces catégories dans la suite par F^*-catégories (F-catégories si elles possèdent en plus un objet nul).

On peut résumer ces résultats sous la forme suivante :

(1,5,7) Théorème. Soit $\mathbb{C}$ une F^*-catégorie satisfaisant à (E) et (E'). Tout morphisme f de $\mathbb{C}$ possède deux décompositions carrées $f = \mathrm{Im}(f).\bar{f}.\overline{\mathrm{Coim}}(f)$ et $f = \overline{\mathrm{Im}}(f).\underline{f}.\mathrm{Coim}(f)$, $\bar{f}$ et $\underline{f}$ sont des isomorphismes, $\overline{\mathrm{Coim}}(f)$ est un épimorphisme fort et $\overline{\mathrm{Im}}(f)$ un monomorphisme fort. De plus, si $f = i.p$ est une décomposition triangulaire, on a $\mathrm{Im}(f) \leq i \leq \overline{\mathrm{Im}}(f)$ et $\mathrm{Coim}(f) \leq p \leq \overline{\mathrm{Coim}}(f)$.

On appellera $\overline{\mathrm{Im}}(f)$ l'image forte de f et $\mathrm{Coim}(f)$ la coimage faible de f.

Montrons la dernière partie du théorème : on a $\mathrm{Im}(f) \leq i$, et par dualité $\mathrm{Coim}(f) \leq p$; alors $\mathrm{Coim}(f) = p'.p$, d'où

$$\begin{aligned} i.p = f &= \overline{\mathrm{Im}}(f).\underline{f}.\mathrm{Coim}(f) \\ &= \overline{\mathrm{Im}}(f).f.p'.p \end{aligned}$$

et $i = \overline{\mathrm{Im}}(f).f.p'$, ou $\overline{\mathrm{Im}}(f) \geq i$. On montre de même $p \leq \overline{\mathrm{Coim}}(f)$.

(1,5,7,1) Remarque. "f est un épimorphisme" est équivalent à "$\overline{\mathrm{Im}}(f)$ est une identité". Même résultat pour les monomorphismes.

(1,6) Réciproque.

Nous supposons maintenant que $\mathbb{C}$ est une catégorie qui possède des sommes et produits directs quelconques (y compris pour les familles vides). $\mathbb{C}$ possède donc un objet final et un objet initial.

De plus $\mathbb{C}$ satisfait à (E) et (E').

(1,6,1) <u>Proposition</u>. Si tout morphisme de $\mathbf{C}$ possède une décomposition triangulaire, $\mathbf{C}$ possède des 2-sommes et 2-produits fibrés.

Montrons-le pour les sommes fibrées.

Soient $f_i : A \longrightarrow M_i (i = 1,2)$ deux morphismes et soit $S = M_1 \amalg M_2$ (e_1, e_2) la somme directe de M_1 et M_2. Soit $(Q_\alpha, q_\alpha)_{\alpha \in I}$ l'ensemble des objets quotients de S tels que $q_\alpha.e_1.f_1 = q_\alpha.e_2.f_2$. Soient $Q = \prod Q_\alpha$, (p_α) le produit direct des Q_α, qui existe par hypothèse, et $q : S \longrightarrow Q$ le morphisme de composantès (q_α).
De $p_\alpha.q.e_1.f_1 = p_\alpha.q.e_2.f_2$, quel que soit α, il résulte que $q.e_1.f_1 = q.e_2.f_2$. Soit alors $q = j.p$ une décomposition triangulaire de q ; on a évidemment $p.e_1.f_1 = p.e_2 f_2$. Posons $p.e_i = j_i$; soient $g_i : M_i \longrightarrow X$ deux morphismes tels que $g_1.f_1 = g_2.f_2$, et soit soit $g : S \longrightarrow X$ le morphisme de composantes (g_1, g_2) ; on a $g.e_1.f_1 = g_1.f_1 = g_2.f_2 = g.e_2.f_2$. Par suite, si $j'.p'$ est une décomposition triangulaire de g, on a $p'.e_1.f_1 = p'.e_2.f_2$, dont le but P' de p' est isomorphe à l'un des Q_α. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & P' \\
S \arrow[r, "p"'] \arrow[urr, dotted, "p'"] & P \arrow[r] \arrow[ur, "h"] & Q \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

et $p' = h.p$. Comme $g_i = g.e_i = j'.p'.e_i = j.h.p.e_i$, en posant $j.h = g'$, on obtient $g_i = g.e_i = g'.j_i$. Soit maintenant $g'' : P \longrightarrow X$

tel que $g_i = g''.j_i$; on a $g.e_i = g''.p.e_i$, d'où $g = g''.p = g'.p$ et $g' = g''$, ce qui montre l'unicité ; (P, j_1, j_2) représente donc la somme fibrée $M_1 {}_A M_2$.

Remarque : dans la démonstration précédente le résultat ne dépend pas de la décomposition triangulaire choisie pour q, ceci montre que q ne possède qu'une décomposition triangulaire à un isomorphisme près).

On peut alors résumer les différents résultats :

(1,6,2) Théorème. Soit $\mathbb{C}$ une catégorie possédant des sommes et produits directs quelconques (y compris pour les familles vides) et satisfaisant à (E) et (E') ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\mathbb{C}$ est complète ;

b) Tout morphisme de $\mathbb{C}$ possède une décomposition triangulaire ;

c) $\mathbb{C}$ possède des 2-produits fibrés ;

d) $\mathbb{C}$ possède des 2-sommes fibrées.

(1,7) Propriétés des noyaux et des conoyaux dans les F-catégories.

Dans la suite de ce chapitre les catégories considérées sont des F-catégories ou des F^*-catégories ; la présence d'un objet nul ajoute quelques propriétés supplémentaires que nous étudions dans cette section. D'autre part, elles satisfont à (E) et (E').

Soit donc $\mathbb{C}$ une F-catégorie ; l'autodualité des axiomes entraine une première conséquence.

(1,7,1) <u>Proposition</u>. Dans une F-catégorie, tout sous-objet normal d'un objet M est un noyau, tout objet quotient conormal est un conoyau et il existe une correspondance bijective entre la classe des sous-objets normaux et celle des objets quotient conormaux de M.

Soient i un monomorphisme normal de but M et Coker(i) son conoyau ; si f est un morphisme tel que f.i = o, on a f = f'.Coker(i), d'où f.Ker(Coker(i)) = f'.Coker(i).Ker(Coker(i))=o et Ker(Coker(i)) $\leqslant$ i ; de plus Coker(i).i = o entraine i$\leqslant$Ker(Coker(i)).

Le procédé dual montre à la fois la deuxième et la troisième partie de la proposition.

On remarquera que l'on n'a pas besoin ici des axiomes (E) et (E'), contrairement à (1,4,2).

Soit maintenant f : M $\rightarrow$ N un morphisme ; on peut donner de f la décomposition suivante :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, dotted, "\mathrm{Coker(Ker}(f))"'] & N \\ Q \arrow[r, "\tilde{f}"'] & J \arrow[u, "\mathrm{Ker(Coker}(f))"'] \end{tikzcd}$$

dans laquelle $\tilde{f}$ est en général un morphisme quelconque.

De Coker(f).f = o, il vient Coker(f).$\overline{\mathrm{Im}}$(f) = o et, par conséquent, Im(f)$\leqslant$Ker(Coker(f)) ; on a de même $\overline{\mathrm{Coim}}$(f)$\leqslant$Coker(Ker(f))

L'égalité a lieu ssi $\tilde{f}$ est un épimorphisme (resp. un monomorphisme).

La décomposition du diagramme (1,7,1,1) sera souvent citée sous le nom de *décomposition normale*. On sait de reste que, dans une catégorie abélienne cette décomposition est la seule et que $\tilde{f}$ est un isomorphisme.

Rappelons la définition suivante de [9] :

(1,7,2) *Définition*. On dit qu'un morphisme $f : M \longrightarrow N$ est *universel* (resp. *fortement universel*) si, dans tout carré cartésien

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ K \arrow[u, "g'"] \arrow[r, "f'"'] & X \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

f' est un épimorphisme (resp. un épimorphisme fort).

Si f est universel (resp. fortement universel) f est un épimorphisme (resp. un épimorphisme fort). On définit dualement les morphismes couniversels qui sont des monomorphismes.

(1,7,3) *Proposition*. Soit $\mathbb{C}$ une catégorie dans laquelle tous les épimorphismes conormaux (resp. monomorphismes normaux) sont universels (resp. co-universels) ; soit $f : M \longrightarrow N$ un morphisme de $\mathbb{C}$; le morphisme $\tilde{f}$ de (1,7,1,1) est tel que $\mathrm{Ker}(\tilde{f}) = o$ (resp. $\mathrm{Coker}(\tilde{f}) = o$).

Cela résulte immédiatement du fait que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\mathrm{Ker}(f)"] \arrow[d, "o"'] & \cdot \arrow[d, "\mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f))"] \\ \cdot \arrow[r, "\mathrm{Ker}(\tilde{f})"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

est un carré cartésien et o est un épimorphisme donc $\mathrm{Ker}(\tilde{f}) = o$

Notons que cela n'entraine pas que f soit un monomorphisme (ou un épimorphisme), comme le montre l'exemple des demi-groupes avec élément neutre (cf.[16]) et ci-dessous (2,6,5)).

(1,7,4) <u>Proposition</u>. Soit $\mathbb{C}$ une F-catégorie ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) Tous les épimorphismes forts sont conormaux ;

b) Pour tout morphisme f, $\mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f)) = \overline{\mathrm{Coim}}(f)$.

a) entraine b) d'après (1,7,1).

b) entraine a) car, si p est un épimorphisme fort, p est équivalent à $\overline{\mathrm{Coim}}(p)$, donc à $\mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(p))$.

Ce fait se produit par exemple dans la catégorie des groupes topologiques.

(1,7,4,1) <u>Corollaire</u>. Si dans une F-catégorie $\mathbb{C}$ satisfaisant aux hypothèses de (1,7,3), $\mathrm{Ker}(x) = o$ caractérise les monomorphismes (resp. $\mathrm{Coker}(x) = o$ caractérise les épimorphismes) , alors tout épimorphisme (resp. monomorphisme) fort est conormal (resp. normal).

En effet, dans (1,7,1,1), $\tilde{f}$ est, par exemple, un monomorphisme et $\overline{\mathrm{Coim}}(f) = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f))$.

(1,7,5) Proposition. Si, dans une F-catégorie $\mathbb{C}$, tout épimorphisme fort est conormal, alors les monomorphismes sont caractérisés par $\mathrm{Ker}(x) = o$.

Soit $f : M \longrightarrow N$ tel que $\mathrm{Ker}(f) = o$; alors, on a $\overline{\mathrm{Coim}}(f) = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f)) = 1_M$ et $f = \mathrm{Im}(f).\bar{f}$ est un monomorphisme.

(1,8) Quelques propriétés des épimorphismes forts.

Le lecteur traduira facilement les propriétés qui vont suivre pour les monomorphismes forts.

Remarquons tout d'abord que, si tous les épimorphismes de $\mathbb{C}$ sont forts, un morphismes f possède une unique décomposition triangulaire (et réciproquement). On dit encore que $\mathbb{C}$ possède la propriété d'inversion (cf. [20]), i.e. tout bimorphisme est un isomorphisme.

(1,8,1) Définition. On dit qu'un objet P de $\mathbb{C}$ est un objet projectif si, pour tout épimorphisme fort $p : M \longrightarrow N$, tout morphisme $u : P \longrightarrow N$ est relevable par p (i.e. il existe $u' : P \longrightarrow M$ tel que $p.u' = u$).

(1,8,2) Théorème. Soit $\mathbb{C}$ une F-catégorie possèdant un générateur strict (resp. générateur) projectif U ; tout épimorphisme fort est fortement universel (resp. universel).

Soit $p : M \longrightarrow N$ un épimorphisme fort, f un morphisme quelconque de X dans N ; considérons le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p"] & N \\ K \arrow[u] \arrow[r, "p'"'] & X \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

Si $\mathrm{Hom}(U,X) = \emptyset$, le résultat est trivial. Sinon, soit $u \in \mathrm{Hom}(U,X)$; $f.u$ peut être relevé par un morphisme $v : U \longrightarrow M$ tel que P $p.v = f.u$ et il existe $w : U \longrightarrow K$ tel que $p'.w = u$; autrement dit, u est relevable par $\mathrm{Im}(p')$, qui est ainsi un isomorphisme (resp. un bimorphisme).

(1,8,3) <u>Définition</u>. Etant donnés un sous-objet (A, i_A) de M et un morphisme $f : M \longrightarrow N$, on appelle <u>image</u> (<u>directe</u>) <u>faible</u> (resp. <u>forte</u>) de (A, i_A) par f, le sous-objet $\mathrm{Im}(f.i_A)$ (resp. $\overline{\mathrm{Im}}(f.i_A)$) de N. Etant donné un sous-objet (B, i_B) de N, on appelle <u>image réciproque</u> de (B, i_B) par f le sous-objet de M équivalent au produit fibré $M \sqcap_N B$.

La deuxième partie de la définition s'appuie sur la proposition(1,1,3). On notera souvent $f(A)$ (resp. $\overline{f(A)}$, $\overset{-1}{f}(B)$) les images définies ci-dessus. On notera que le morphisme canonique $p : A \longrightarrow f(A)$ est un épimorphisme <u>fort</u>.

Les applications $A \longrightarrow f(A)$, $A \longrightarrow \overline{f(A)}$, $B \longrightarrow \overset{-1}{f}(B)$ sont des applications croissantes pour les relations d'ordre définies sur les sous-objets de M et N. On aura donc, pour tout sous-objet (A, i_A) de M, $A \leqslant \overset{-1}{f}(f(A))$ et $f(\overset{-1}{f}(f(A))) = f(A)$ et, pour tout sous-objet (B, i_B) de N, $f(\overset{-1}{f}(B)) \leqslant B$ et $\overset{-1}{f}(f(\overset{-1}{f}(B))) = \overset{-1}{f}(B)$.

(1,8,4) <u>Proposition</u>. Si f est un monomorphisme , pour tout sous-objet (A,i_A) de M, $\bar{f}^1(f(A))$ est isomorphe à A.

Soit le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[dr, dotted, "p"'] & \bar{f}^1(f(A)) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f'"] & M \\
 & f(A) \arrow[r, "Im(f.i_A)"'] & N \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

f' est un monomorphisme et comme $j.h = i_A$, h est un monomorphisme, donc $f'.h = p$ est un monomorphisme et un épimorphisme fort ; c'est un isomorphisme et il en est de même de f' .

Pour les épimorphismes, la généralisation est moins aisée, il faut utiliser la définition (1,7,3) .

(1,8,5) <u>Proposition</u>. Si f est un épimorphisme fortement universel de M dans N et si (B,j) est un sous-objet de N, on a $f(\bar{f}^1(B) = B$.

Cela résulte de l'unique décomposition triangulaire de f.j' comportant un épimorphisme fort, dans le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd}
\bar{f}^1(B) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "j'"'] & B \arrow[d, "j"] \\
M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}$$

(1,9) <u>Décompositions strictes et effectives</u>.

Les résultats de ce paragraphe se trouvent dans [10] et [19] ; nous les rappelons et les établissons dans les cas particuliers qui nous intéressent. Les décompositions obtenues seront comparées avec les précédentes dans le chapitre 2.

(1,9,1) Définition. On appelle foncteur d'équivalence, sur un objet M d'une catégorie $\mathbb{C}$, un foncteur $X \to G(X,M)$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{E}\mathrm{ns}$, tel que $G(X,M)$ soit le graphe d'une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathrm{Hom}(X,M)$. Si G est représentable, on dit qu'il définit une relation d'équivalence sur M.

Une relation d'équivalence sur M peut-être définie par un couple (r_1,r_2) de morphismes de même source R et de but M. $G(X,M)$ est alors l'image de $\mathrm{Hom}(X,R)$ par l'injection de composantes $(\mathrm{Hom}(X,r_1),\mathrm{Hom}(X,r_2))$ de $\mathrm{Hom}(X,R)$ dans $\mathrm{Hom}(X,M)\times\mathrm{Hom}(X,M)$. Notons que les morphismes r_1 et r_2 doivent possèder une section commune. Si le produit $M\times M$ existe, soit $i : R \to M\times M$ le morphisme de composantes (r_1,r_2); il est facile de voir que i est un monomorphisme ; on appelle graphe de la relation d'équivalence $(R,r_1\ r_2)$ le sous-objet de $M\times M$ correspondant.

Supposons que la catégorie $\mathbb{C}$ possède des 2-produits fibrés ; à tout morphisme $f : M \to N$, on associe une relation d'équivalence notée $\overset{-1}{f}(-,M)$, définie par le produit fibré (R,r_1,r_2) du couple de morphismes $M \underset{f}{\overset{f}{\rightrightarrows}} N$. On dit qu'une relation d'équivalence est réalisable, si elle est définie par un morphisme f.

Soit Y un objet quelconque de $\mathbb{C}$, soit $Q(M,Y)$ l'ensemble des morphismes y de M dans Y tels que $y.x = y.x'$, quel que soit l'objet X de C et quels que soient les morphismes x et x' de X dans M tels que $(x,x')\in G(X,M)$. On définit ainsi un foncteur $Q(M,-)$ appelé <u>foncteur conoyau</u> associé au foncteur d'équivalence G. Si ce foncteur est représentable, on appelle conoyau de G un de ses représentants ; on l'identifie alors généralement à un objet quotient de M.

(1,9,2) <u>Proposition</u>. Si $q : M \longrightarrow Q$ est le conoyau d'une relation d'équivalence réalisable G sur M, q réalise G.

Dans les catégories qui nous intéressent (C possède au moins des 2-produits directs et fibrés), on a un certain nombre de résultats liés à la définition :

(1,9,3) <u>Définition</u>. Une relation d'équivalence est dite <u>effective</u> si son conoyau existe et si elle est réalisée par son conoyau.

Par exemple, dans une F^*-catégorie, toute relation d'équivalence est effective.

Un épimorphisme qui est le conoyau de sa relation d'équivalence associée est dit effectif. Dans le cas où l'on ne peut associer une relation d'équivalence à un morphisme (absence de produit fibré), on peut cependant lui associer un foncteur d'équivalence ; un épimorphisme conoyau de son foncteur d'équivalence associé est un épimorphisme <u>strict</u>. (et réciproquement).

On obtient alors le théorème suivant dont les hypothèses sont seulement suffisantes et correspondent aux cas étudiés dans ce travail

(1,9,4) <u>Théorème</u>. (A.Roux) . Soit $\mathbb{C}$ une catégorie qui possède des 2-produits fibrés et des 2-sommes fibrées ; pour tout morphisme f il existe une unique décomposition $f = i_f.\hat{f}.q_f$ où :

$q_f : M \longrightarrow Q_f$ est un objet quotient effectif de M, conoyau de la relation d'équivalence associée à f ;

$i_f : K_f \longrightarrow N$ est un sous-objet effectif de M, noyau de la relation de co-équivalence associée à f ;

$\hat{f}$ est un morphisme quelconque, déterminé de façon unique.

Dans ce théorème la notion de co-équivalence est la notion duale de celle d'équivalence.

Soit alors $f = i.f'$ (resp. $f = f''.p$) une décomposition de f, où i (resp. p) est un monomorphisme (resp. un épimorphisme). La définition des épimorphismes stricts montre que f' est factorisé par q_f (resp. f" est factorisé par i_f).

En particulier, on a le résultat suivant qui généralise une remarque de (1,7) :

(1,9,5) <u>Proposition</u>. Sous les hypothèses de (1,5,7), on a $\overline{\overline{\mathrm{Im}}}(f)<i_f$ et $\overline{\mathrm{Coim}}(f)<q_f$.

(1,9,6) <u>Proposition</u>. Soit $\mathbb{C}$ une F-catégorie satisfaisant aux axiomes (E) et (E') ; si $\hat{f}$ est un isomorphisme, f possède une unique décomposition triangulaire.

On dira parfois dans ce cas que f est un <u>morphisme strict</u>.

<u>Exemples</u>. 1. Dans la catégorie $\mathbb{T}$op des espaces topologiques, les deux décompositions du théorème (1,5,7) existent ; soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue, et soit $I = f(X)$ l'image par l'application f de l'ensemble X ; si l'on munit I de la topologie finale associée à f, on obtient l'image faible du morphisme f ; si l'on munit I de la topologie induite par celle de Y, on obtient l'image forte de f (image au sens habituel) ; par ailleurs dans $\mathbb{T}$op, les épimorphismes forts et stricts (effectifs) coïncident, de même que les monomorphismes forts et stricts ; donc $\overline{\mathrm{Im}}(f) = i_f$ et $\overline{\mathrm{Coim}}(f) = q_f$. Enfin on retrouve la définition classique des morphismes stricts, lorsque $\overline{\mathrm{Coim}}(f)$ est isomorphe à $\overline{\mathrm{Im}}(f)$.

2. Dans la catégorie $\mathbb{T}\mathrm{op}_s$ des espaces topologiques séparés, la notion d'épimorphismes stricts ne coïncide pas avec la notion topologique habituelle. f est un épimorphisme strict "catégorique" ssi f est strict au sens topologique et surjectif. L'injection canonique de Q dans $\mathbb{R}$ est un épimorphisme strict au sens topologique, mais non catégorique.

(1,9,7) <u>Proposition.</u> (Isbell-Roux). Soit $\mathbb{C}$ une F^*-catégorie, satisfaisant à l'axiome (E') ; tout épimorphisme fort est limite inductive d'une famille totalement ordonnée d'épimorphismes stricts.

Soit $f : M \longrightarrow N$ un épimorphisme fort. Soit $q_f : M \longrightarrow M_1$ l'épimorphisme strict définit dans (1,9,4). Si $f : f_1 . q_f$ et si f_1 est un monomorphisme, on a $f = q_f$. Sinon, soit $q_1 = q_{f_1} . q_f$.

On définit ainsi par induction une suite (q_α) d'épimorphismes: si α est un ordinal quelconque, et si $f = f_\alpha . q_\alpha$, on pose $q_{\alpha+1} = q_{f_\alpha} . q_\alpha$. Si β est un ordinal limite, et si M_α est le but de q_α, on pose $M_\beta = \varinjlim_{\alpha<\beta} (M_\alpha)$, et on note $q_\beta : M \longrightarrow M_\beta$ l'épimorphisme défini par cette limite à droite. Comme $\mathbb{C}$ satisfait à (E'), il existe un ordinal ν tel que f_ν soit un monomorphisme, d'où $q_\nu = f$.

On peut dire qu'un épimorphisme fort est un composé généralisé d'épimorphismes stricts.

Ch.2. Propriétés fonctorielles. Exemples.

(2,1) Catégories de morphismes.

Soit C une catégorie ; on désigne par $\mathbb{M}or(\mathbb{C})$ la catégorie définie de la façon suivante :

a) les objets de $\mathbb{M}or(\mathbb{C})$ sont les morphismes de $\mathbb{C}$;

b) soient, f et g deux objets de $\mathbb{M}or(\mathbb{C})$; un morphisme de f dans g est un couple (u,v) de morphismes de $\mathbb{C}$ tel que $v.f = g.u$; la composition des morphismes se définit de façon évidente.

On vérifie facilement que, si $\mathbb{C}$ possède des produits directs (resp. des sommes directes, des produits fibrés, des sommes fibrées, un objet nul, un objet initial, etc.), il en est de même de $\mathbb{M}or(\mathbb{C})$.

On démontre également qu'un monomorphisme (resp. un épimorphisme) de $\mathbb{M}or(\mathbb{C})$ est formé par un couple de monomorphismes (resp. d'épimorphismes) de $\mathbb{C}$, si $\mathbb{C}$ possède un objet initial (resp. final) ou, si pour tout couple (g,v) (resp. (f,u)) de morphismes de $\mathbb{C}$, il existe un couple (f,u) (resp. (g,v)) tel que $v.f = g.u$. C'est bien entendu le cas dans les F^*-catégories, qui seront utilisées dans toute la suite.

On utilisera constamment certaines sous-catégories pleines de $\mathbb{M}or(\mathbb{C})$: par exemple $\mathbb{M}(\mathbb{C})$ (resp. $\mathbb{E}(\mathbb{C})$ la sous-catégorie des monomorphismes (resp. épimorphismes).

(2,2) Foncteur Im et Foncteur Coim.

Ces deux foncteurs jouant un rôle dual, nous n'étudierons leurs propriétés que pour le foncteur Im et citerons les résultats pour l'autre.

(2,2,1) Proposition. $f \longrightarrow \mathrm{Im}(f)$ est un foncteur covariant de $\mathbb{M}\mathrm{or}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{M}(\mathbb{C})$.

Soient f et g deux morphismes de $\mathbb{C}$ et soit (u,v) un morphisme de f dans g. Soit (K,i,v_1) le produit fibré, dans $\mathbb{C}$, de v et Im(g) ; on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "p"] \arrow[dr, dotted] \arrow[dd, "u"'] & I \arrow[r, dotted, "\mathrm{Im}(f)"] \arrow[d, "j"'] & M' \arrow[dd, "v"] \\
 & K \arrow[ur, "i"] \arrow[d, "v_1"] & \\
N \arrow[r, dotted, "q"'] & J \arrow[r, "\mathrm{Im}(g)"'] & N'
\end{tikzcd}$$

dans lequel f et q.u sont diagonaux au-dessus de v et Im(g) ; i factorise donc f et c'est un monomorphisme ; il existe un morphisme j de I dans K tel que $i.j = \mathrm{Im}(f)$; en posant $u' = v_1.j$, on obtient un morphisme (u',v) de Im(f) dans Im(g) ; le monomorphisme Im(g) fournit l'unicité de u', ce qui permet de démontrer la propriété de composition.

Si l'on désigne par $\mathbb{E}f(\mathbb{C})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{M}\mathrm{or}(\mathbb{C})$ formée des épimorphismes forts, on obtient le corollaire suivant :

(2,2,1,2) Corollaire. $f \longrightarrow \overline{\mathrm{Coim}}(f)$ est un foncteur covariant de $\mathbb{M}\mathrm{or}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{E}f(\mathbb{C})$.

Cela revient à dire que, si $f : M \longrightarrow M'$ et $g : N \longrightarrow N'$ sont deux morphismes de $\mathbb{C}$ et si (u,v) est un morphisme de f dans g, il existe deux morphismes uniques u' et $\bar{v}'$ rendant commutatifs les carrés carrés du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\overline{\mathrm{Coim}}(f)"] \arrow[d, "u"'] & \bar{P} \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\bar{v}'"'] & I \arrow[r, "\mathrm{Im}(f)"] \arrow[d, "u'"] & M' \arrow[d, "v"] \\
N \arrow[r, "\overline{\mathrm{Coim}}(g)"'] & \bar{Q} \arrow[r, "\bar{g}"'] & J \arrow[r, "\mathrm{Im}(g)"'] & N'
\end{tikzcd}$$

(2,2,2) <u>Proposition</u>. $f \longrightarrow \mathrm{Coim}(f)$ est un foncteur covariant de $\mathbb{M}\mathrm{or}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{E}(\mathbb{C})$ et $f \longrightarrow \overline{\mathrm{Im}}(f)$ est un foncteur covariant de $\mathbb{M}\mathrm{or}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{M}\mathrm{f}(\mathbb{C})$.

<u>Remarque</u>. Il pourrait paraitre plus simple de considérer le foncteur (défini à un isomorphisme près) $f \longrightarrow I$, où I est la source de $\mathrm{Im}(f)$; ce foncteur covariant de $\mathbb{M}\mathrm{or}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ paie sa simplicité des défauts habituels des objets : ils ne précisent pas les morphismes; de plus on ne peut exprimer avec ce foncteur les propriétés d'adjonction que nous avons en vue.

(2,2,3) <u>Proposition</u>. Le composé de deux épimorphismes (resp. monomorphismes) forts est un épimorphisme (resp. monomorphisme) fort.

Soit p et q deux épimorphismes forts tels que $q.p$ existe; soit $(I, \mathrm{Im}(q.p))$ l'image faible de $q.p$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "1_M"'] & & N \arrow[dl] \arrow[d, "q"] \\
M \arrow[r] & I \arrow[r, "\mathrm{Im}(q.p)"'] & P
\end{tikzcd}$$

qui est un cas particulier du diagramme (2,2,1,1), car $\mathrm{Im}(p) = 1_N$. Donc $\mathrm{Im}(q.p)$ factorise q, ce qui entraine $\mathrm{Im}(q.p) = 1_P$.

(2,2,4) <u>Proposition</u>. La borne inférieure de deux sous-objets forts de M est un sous-objet fort.

Soient (A, i_A) et (B, i_B) deux sous-objets forts de M, et $(A\wedge B, i_{A\wedge B})$ leur borne inférieure ; on a le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} A\wedge B \arrow[r, "j_A"] \arrow[d, "j_B"'] & A \arrow[d, "i_A"] \\ B \arrow[r, "i_B"'] & M \end{tikzcd}$$

Soit $i_{A\wedge B} = i_A.j_A = i_B.j_B = k.\mathrm{Coim}(i_{A\wedge B})$, en décomposant $j_A = h_A.\mathrm{Coim}(j_A)$, il vient $k.\mathrm{Coim}(i_{A\wedge B}) = i_A.h_A.\mathrm{Coim}(j_A)$; comme $i_A.h_A$ est un monomorphisme fort, on a $i_A.h_A = k$ et de même $i_B.h_B = k$; on a donc $k \leq i_{A\wedge B}$ et l'égalité, i.e. $\mathrm{Coim}(i_{A\wedge B}) = 1_{A\wedge B}$.

(2,3) <u>Foncteurs</u> $f \rightarrow q_f$ <u>et</u> $f \rightarrow i_f$.

Nous emploierons l'expression épimorphisme strict dans la suite, bien que, dans le cas qui nous intéresse, nous utilisons des épimorphismes effectifs ; il suffit de se rappeler que tout épimorphisme strict est effectif dans une catégorie qui possède des 2-produits fibrés. On peut faire la remarque duale pour les monomorphismes.

(2,3,1) <u>Proposition</u>. $f \longrightarrow q_f$ est un foncteur covariant de $\mathbb{M}or(\mathbb{C})$ dans la sous-catégorie pleine $\mathbb{E}s(\mathbb{C})$ de $\mathbb{M}or(\mathbb{C})$, formée des épimorphismes stricts.

Soient $f : M \longrightarrow N$ et $f' : M' \longrightarrow N'$ deux morphismes de $\mathbb{C}$; soit (u,v) un morphisme de f dans f' ; enfin, soient q_f et $q_{f'}$ les conoyaux des foncteurs d'équivalence associés à f et à f'. Si x et x' sont deux morphismes de $\mathbb{C}$ tels que $q_f.x = q_f.x'$, on a $f.x = f.x'$ d'où $f'.u.x = v.f.x = v.f.x' = f'.u.x'$ et, en définitive, $q_{f'}.u.x = q_{f'}.u.x'$; il existe donc un unique morphisme h tel que $q_{f'}.u = h.q_f$.

Là encore l'unicité de h entraine la propriété de composition.

Dualement :

(2,3,2) <u>Proposition</u>. $f \longrightarrow i_f$ est un foncteur covariant de $\mathbb{M}or(C)$ dans la sous-catégorie pleine $\mathbb{M}s(C)$ de $\mathbb{M}or(\mathbb{C})$, formée des monomorphismes stricts.

Ces propriétés sont valables dans les catégories possèdant des décompositions strictes à droite (ou à gauche) (cf.[19]).

(2,4) <u>Décomposition normale</u>.

Dans une catégorie possèdant un objet nul et possèdant des décompositions normales, les propriétés (2,3,1) et (2,3,2) peuvent se transcrire pour ces décompositions. Les démonstrations ne diffèrent pas essentiellement des précédentes : il suffit de remplacer dans celle de (2,3,1) le couple (x,x') par le couple (x,o).

Dans le cas où toutes les décompositions précédentes existent (par exemple dans les F-catégories satisfaisant aux axiomes (E) et (E')), on obtient les foncteurs suivants :

Epimorphismes	Monomorphismes
$f \to \mathrm{Coim}(f)$	$f \to \overline{\mathrm{Im}}(f)$
$f \to \overline{\mathrm{Coim}}(f)$	$f \to \mathrm{Im}(f)$
$f \to q_f$	$f \to i_f$
$f \to \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f))$	$f \to \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f))$.

Ces foncteurs peuvent être distincts, mais dans les catégories usuelles, certains d'entre eux sont confondus (cf. ci-dessous (2,6)).

(2,5) Propriétés d'adjonction.

Les foncteurs définis ci-dessus possèdent une propriété commune : les foncteurs donnant un monomorphisme possèdent un adjoint à droite et ceux donnant un épimorphisme possèdent un adjoint à gauche.

Pour les propriétés des foncteurs adjoints, on se reportera à l'article de Kan ([14]), ainsi qu'au résultat cité par Gabriel (prop. 10, ch. 1 de [6]).

(2,5,1) Proposition. Les foncteurs Im et $\overline{\mathrm{Im}}$((resp. Coim et $\overline{\mathrm{Coim}}$) possèdent des adjoints à droite (resp. des adjoints à gauche), qui sont les injections canoniques des catégories $\mathbb{M}(\mathbb{C})$, $\mathbb{M}f(\mathbb{C})$ (resp. $\mathbb{E}(\mathbb{C})$, $\mathbb{E}f(\mathbb{C})$) dans $\mathbb{M}or(\mathbb{C})$.

Nous faisons la démonstration pour Im. Il nous suffit de montrer, suivant le résultat cité, que $f \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{M}(\mathbb{C})}(\mathrm{Im}(f), i)$ est un foncteur représentable pour tout monomorphisme i de $\mathbb{C}$. Pour cela, soit (u,v) un morphisme de f dans i, i.e, $v.f = i.u$; on sait que la décomposition $i = \mathrm{Im}(i).a$ fait de a un isomorphisme ; d'autre part, au couple(u,v) le foncteur Im associe le couple(u',v) (cf. (2,2,1)) ; on pose alors $u_1 = \overset{-1}{a}.u'$ et $\varphi_f(u,v) = (u_1,v)$; φ_f est une bijection de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{M}or(\mathbb{C})}(f,i)$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{M}(\mathbb{C})}(\mathrm{Im}(f),i)$; en effet, $\varphi_f(u,v) = \varphi_f(s,t)$ entraine $v = t$ et $u = u_1.p = s$ (voir le diagramme ci-dessous). D'autre part, si $(u_1,v) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{M}(\mathbb{C})}(\mathrm{Im}(f),i)$, on a $(u_1.p,v) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{M}or(\mathbb{C})}(f,i)$, et $\varphi_f(u_1.p,v) = (u_1,v)$. Enfin φ définit un morphisme fonctoriel de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{M}or(C)}(-,i)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{M}(C)}(\mathrm{Im}(-),i)$: soient (u,v) un morphisme de f dans g et (x,y) un morphisme de g dans i ; avec les notations précédentes, $(\overset{-1}{a}.(x'.u'), y.v) = ((\overset{-1}{a}.x').u', y.v)$, ce qui exprime que φ est un morphisme fonctoriel :

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "p"] \arrow[d, "u"'] & \cdot \arrow[r, "\mathrm{Im}(f)"] \arrow[d, "u'"] \arrow[dl, "u_1"] & \cdot \arrow[d, "v"] \\
\cdot \arrow[r, "a"'] & \cdot \arrow[r, "\mathrm{Im}(i)"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

Les autres assertions se démontrent par dualité ou au moyen des isomorphismes $\bar{f}$ et $\underline{f}$.

Ces propriétés d'adjonction permettent d'utiliser les résultats maintenant classiques de Kan :

(2,5,2) <u>Proposition</u>. Les foncteurs Im et $\overline{\mathrm{Im}}$ (resp. Coim et $\overline{\mathrm{Coim}}$) commutent aux sommes directes (resp. aux produits directs).

On peut démontrer comme dans la proposition (2,5,1) les résultats suivants :

(2,5,3) <u>Proposition</u>. Le foncteur $f \to i_f$ (resp. $f \to q_f$) possède un adjoint à droite (resp. un adjoint à gauche) qui est l'injection canonique de $\mathbb{M}s(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{M}or(\mathbb{C})$ (resp. de $\mathbb{E}s(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{M}or(\mathbb{C})$.

(2,5,4) <u>Proposition</u>. Le foncteur $f \longrightarrow \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f))$ (resp. $f \longrightarrow \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f))$) possède un adjoint à droite (resp. à gauche).

(2,6) Exemples.

(2,6,1) Nous citerons pour mémoire les catégories abéliennes dans lesquelles les foncteurs précédents sont tous confondus (dans leurs colonnes respectives).

(2,6,2) Catégorie des groupes quelconques.

Il est bien connu que les monomorphismes ne sont pas tous normaux. Pour les monomorphismes stricts, on a le résultat suivant :

(2,6,2,1) Proposition. Tout sous-groupe H d'un groupe G définit un monomorphisme strict.

C'est une conséquence de l'existence du produit libre amalgamé d'une famille de groupes au-dessous d'un sous-groupe commun. La démonstration de ce théorème, du à Schreier, montre en particulier que dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "i_H"] \arrow[d, "i_H"'] & G \arrow[d, "p_1"] \\ G \arrow[r, "p_2"'] & S \end{tikzcd}$$

où S est le produit libre amalgamé de G avec lui-même au-dessous de H et qui est un carré cocartésien, on a $p_1(x) \neq p_2(x)$ si $x \notin H$ (cf. [17]). Ceci montre que le carré est cartésien et le résultat s'ensuit, d'après (1,1,1,2).

Cette démonstration montre également que les épimorphismes sont surjectifs.

En conséquence tous les monomorphismes sont forts, ce qui assure l'unicité des décompositions triangulaires.

Enfin tous les épimorphismes sont conormaux (théorème d'homorphie).

(2,6,3) <u>Catégorie des groupes topologiques.</u>

Sans autre condition que l'adjonction d'une topologie compatible, la situation diffère peu du cas précédent.

Un monomorphisme est fort si le sous-objet correspondant est un sous-groupe topologique, i.e. muni de la topologie induite. De même un épimorphisme est fort si l'objet quotient correspondant est un groupe quotient topologique. Il y a donc de nouveau identité entre épimorphismes forts, stricts et conormaux ; pour les monomorphismes forts, le diagramme (2,6,2,1) donne encore le résultat en munissant S de la topologie grossière.

(2,6,4) <u>Catégorie des groupes topologiques séparés</u>.

C'est un fait bien connu que les "bons" sous-groupes topologiques d'un groupe topologique séparé (g.t.s) sont les sous-groupes fermés. De façon précise, si f est un morphisme d'un g.t.s. G dans un g.t.s. G', l'image forte de f est l'adhérence dans G' de f(G) (munie de la topologie induite). Les monomorphismes stricts sont, à une équivalence près, les injections canoniques des sous-groupes topologiques <u>fermés</u> et les monomorphismes normaux les injections canoniques des sous-groupes distingués fermés. Il y a donc deux types de monomorphismes "ordinaires" : les injections f d'un groupe G dans un groupe G', la topologie induite sur f(G) étant <u>strictement moins fine</u> que "celle de G", et, à un isomorphisme près, les injections canoniques d'un sous-groupe <u>non fermé</u> d'un groupe G.

Pour un épimorphisme f, on remarque d'abord que f(G) est un sous-groupe partout dense de G' (la topologie de G' étant complètement régulière). Les épimorphismes forts, stricts et conormaux sont encore confondus. Si $f : G \longrightarrow G'$ est surjectif sans être fort, il est cependant <u>universel</u>.

(2,6,5) <u>Catégorie des demi-groupes avec élément neutre</u>.

Dans cette catégorie, que l'on désigne par $\mathbb{D}n$, les morphismes sont les homomorphismes de demi-groupes qui conservent l'élément neutre ; celui-ci est un objet nul de la catégorie. Cette catégorie est intéressante à plus d'un titre ; en particulier c'est un exemple algèbrique de catégorie dans laquelle les morphismes possèdent plusieurs décompositions triangulaires.

(2,6,5,1) <u>Définition</u>. on dit qu'une partie A d'un demi-groupe D est un <u>sous-demi-groupe normal</u> si elle satisfait aux conditions suivantes :

(1) quels que soient $x\in D$, $y\in D$ et $t\in A$, on a $xty\in A$ ssi $xy\in A$.

(2) quels que soient $x\in D$, $t\in A$, on a $xt\in A$ et $tx\in A$ ssi $x\in A$.

On remarquera que la deuxième condition signifie que A est un sous-demi-groupe <u>unitaire</u>. Si D possède un élément neutre e, quel que soient $t\in A$, $ete = t\in A$ entraine $e\in A$, d'après (1). De plus, (2) est alors conséquence de (1).

(2,6,5,2) <u>Proposition</u>. Dans la catégorie $\mathbb{D}n$, les sous-demi-groupes normaux sont exactement les noyaux des morphismes.

Il est immédiat qu'un noyau de morphisme est normal.

Réciproquement, la relation suivante "il existe une suite $x = a_1, \dots, a_n = y$ d'éléments de D tels que, quel que soit $i \in [1, n-1]$, il existe a,b,c,d dans D et s, t dans A avec $a_i = ab$, $a_{i+1} = cd$ et asb = ctd" est une relation d'équivalence compatible dans D. En notant D/A le demi-groupe quotient défini par cette relation et $p : D \longrightarrow D/A$ l'épimorphisme canonique, on voit que A est le noyau de p. (cf. [16]).

On montre par ailleurs que la relation précédente est la plus fine relation d'équivalence compatible, admettant A comme noyau et que les épimorphismes conormaux sont exactement les morphismes $p : D \longrightarrow D/A$, où A est un sous-demi-groupe normal et D/A le demi-groupe quotient défini ci-dessus. Enfin, il y a bien entendu identité entre sous-demi-groupes normaux et sous-objets normaux de $\mathbb{D}n$.

Soit maintenant $f : D \longrightarrow D'$ un morphisme de la catégorie $\mathbb{D}n$. On appelle relation d'équivalence associée à f, ou équivalence d'homomorphisme, la relation " $f(x) = f(y)$" entre x et y de D. Il est classique que cette relation, notée $\mathcal{T}$, est compatible et que le morphisme $q_f : D \longrightarrow D/\mathcal{T}$ n'est autre que l'épimorphisme strict de (1,9,4) associé à f. Si A est le noyau de f, on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "q_f"] & \\ D/A \arrow[r, "q"'] & D/\mathcal{T} \end{tikzcd}$$

où q est un épimorphisme, en <u>général non monique</u>, tel que $\mathrm{Ker}(q) = 0$ (0 désignant le demi-groupe réduit à un élément). On a donc en général $p = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f)) > q_f$.

Dans le théorème classique relatif aux groupes, D/A est isomorphe à $f(D)$; dans le cas des demi-groupes, on sait seulement, comme il est bien connu que $D/\mathcal{F}$ est isomorphe à $f(D)$. On peut alors chercher à caractériser les catégories de demi-groupes (à élément neutre) qui satisfont au théorème d'homomorphie $D/A \simeq f(D)$. Pour cela, posons la définition suivante :

(2,6,5,3) <u>Définition</u>. Soit $\mathbb{D}$ une sous-catégorie d'une catégorie $\mathbb{C}$. On dit que $\mathbb{D}$ est <u>saturée à droite</u> si elle satisfait aux conditions suivantes pour tout objet M de $\mathbb{D}$:

(1) tout épimorphisme dans $\mathbb{D}$ de source M est un épimorphisme de $\mathbb{C}$;

(2) pour tout épimorphisme p dans $\mathbb{C}$ de source M, il existe un épimorphisme q dans $\mathbb{D}$, équivalent à p ;

(3) si deux épimorphismes de $\mathbb{D}$, de source M, sont équivalents dans $\mathbb{C}$, ils le sont dans $\mathbb{D}$.

Plus naïvement, cela signifie que tout objet M de $\mathbb{D}$ a les mêmes objets quotients dans $\mathbb{D}$ et dans $\mathbb{C}$. On pourra définir dualement des sous-catégories saturées à gauche (resp. saturées). La catégorie des groupes est une sous-catégorie saturée à droite de $\mathbb{D}n$, mais non saturée à gauche. On peut rapprocher cette définition de celle des variétés de demi-groupes (cf.[21]).

Nous avons le théorème suivant :

(2,6,5,4) Théorème. Soit $\mathbb{C}$ une sous-catégorie saturée à droite de la catégorie des demi-groupes abéliens à élément neutre ; les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

a) Les objets de $\mathbb{C}$ sont des groupes abéliens ou des pseudo-groupes abéliens ;

b) Tout morphisme f de $\mathbb{C}$ se décompose sous la forme $f = \mathrm{Im}(f).\bar{f}.\mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f))$, où $\bar{f}$ est un isomorphisme.

a) entraine b) de façon évidente ; la réciproque résulte du lemme suivant :

(2,6,5,5) Lemme. Soit D un objet de $\mathbb{D}$n, tel que la seule équivalence compatible, admettant l'élément neutre e comme noyau, soit l'égalité ; alors il existe au plus un élément $a \in D$, tel que $sat \neq e$, quels que soient $s \in D$ et $t \in D$; s'il existe, a est un élément permis de D.

Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence définie par la partition suivante de D : $C_x = \{x\}$, s'il existe deux éléments s et t tels que $sxt = e$; on rassemble tous les éléments de D ne satisfaisant pas à cette propriété dans une même classe P. $\mathcal{R}$ est évidemment l'égalité si $P = \emptyset$; sinon, c'est une relation d'équivalence compatible, car $sPt \subset P$, quels que soient s et t ; comme C_e est la classe unité dans $D/\mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ est encore l'égalité d'après l'hypothèse faite sur D ; on a donc $P = \{a\}$ et $xa = xae = a = eax = ax$, quel que soit $x \in D$.

La démonstration du théorème s'achève ainsi : la condition b) entraine pour tout objet de $\mathbb{C}$ la condition du lemme : si $x \in D - \{a\}$, il existe s et t tels que sxt = e, donc stx = xst = e et $D - \{a\}$ est un groupe abélien.

Jè n'ai pas trouvé de réponse dans le cas non-commutatif ; il serait intéressant de consulter la thèse de E.J.Tully Jr. ([21]) que je n'ai malheureusement pu me procurer.

Je dois à J.M.Howie quelques remarques concernant les monomorphismes stricts. Dans sa thèse (cf. [12]), il montre que, étant donnée une famille (D_i) de demi-groupes, et un sous-demi-groupe commun U des D_i , le <u>produit libré amalgamé</u> T des D_i au-dessous de U existe si U est un sous-demi-groupe quasi-unitaire des D_i. (cf. note page 49). Ce produit libre amalgamé est, dans notre terminologie, une somme fibrée satisfaisant aux conditions supplémentaires suivantes : a) les morphismes $f_i : D_i \rightarrow T$ sont des monomorphismes ;

b) $f_i(D_i) \cap f_j(D_j) = f_i(U) = f_j(U)$ pour tous i et j distincts.

Ce résultat, appliqué au cas très simple où $D_1 = D_2 = D$ et où U est un sous-demi-groupe quasi unitaire de D, montre que l'injection canonique de U dans D est un monomorphisme strict.

Dans le cas précis des demi-groupes avec élément neutre, il est facile de voir que les notions de sous-demi-groupe unitaire et quasi-unitaire sont confondues.

Par ailleurs certains sous-demi-groupes ne sont pas stricts, comme le montre l'injection canonique $i : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, qui est un épimorphisme. Une question reste alors ouverte : peut-on caractériser les sous-demi-groupes dont l'injection canonique est un monomorphisme strict ; J.M.Howie m'a communiqué une caractérisation (non encore publiée) dans le cas où le sous-demi-groupe est central, mais qualifie de "sans espoir" le cas non-commutatif. On remarquera que le problème se pose de la même façon pour les demi-groupes quelconques.

Note : Un sous-demi-groupe U quasi-unitaire d'un demi-groupe D satisfait aux conditions suivantes :

a) Il existe deux applications p et q de D dans lui-même, telles que $p^2 = p$, $q^2 = q$, et $p \circ q = q \circ p$;

b) pour tous x, y dans D, on a $p(xy) = p(x)y$, $q(xy) = xq(y)$ et $xp(y) = q(x)y$;

c) $p(u) = q(u) = u$ quel que soit $u \in U$;

d) U est unitaire dans $q_\circ p(D)$.

Ch.3. Structures algèbriques dans les F-catégories.

(3;1) Loi de composition sur un objet d'une catégorie. Propriétés élémentaires.

Soit $\mathbb{C}$ une catégorie possèdant des 2-produits directs ; soit M un objet de $\mathbb{C}$, et $m : M\times M \longrightarrow M$ un morphisme. On dit que m définit une "loi de composition" interne sur l'objet M de $\mathbb{C}$. Le couple (M,m) sera appelé un $\mathbb{C}$-groupoïde.

(3;1,1) Proposition. L'application $(f,g) \longrightarrow m.(f,g)$ définit un morphisme fonctoriel de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(-,M)\times\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(-,M)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(-,M)$.

Autrement dit, on obtient une loi de composition interne (notée +) sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,M)$, pour tout objet X de $\mathbb{C}$, telle que

(3,1,1,1) $$(f + g).h = f.h + g.h.$$

Remarquons que si p et p' sont les projections de $M\times M$ sur M, $p + p' = m$.

(3,1,2) Définition. Soient (M,m) et (N,n) deux $\mathbb{C}$-groupoïdes ; un morphisme $f : M \longrightarrow N$ s'appelle une représentation, si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
M\times M \arrow[r, "f\times f"] \arrow[d, "m"'] & N\times N \arrow[d, "n"] \\
M \arrow[r, dotted, "f"'] & N
\end{tikzcd}$$

(3,1,3) <u>Proposition</u>. Soit f un morphisme de M dans N ; f est une représentation de (M,m) dans (N,n), ssi pour tous morphismes $u : X \longrightarrow M$, $v : X \longrightarrow M$, on a :

$$f.(u + v) = f.u + f.v.$$

Cela résulte immédiatement du diagramme (3,1,2,1).

(3,1,4) <u>Définition</u> . On dit qu'un sous-objet (A,i_A) de M est <u>stable</u> pour m s'il existe un morphisme $m_A : A{\times}A \longrightarrow A$ tel que $m.(i_A{\times}i_A) = i_A.m_A$.

m_A est évidemment <u>unique</u> et s'appellera la "<u>loi induite</u>" sur (A,i_A) ; on vérifie facilement que cette définition est compatible avec la notion de sous-objet, à savoir : si deux monomorphismes de but M sont équivalents dans $\mathbb{C}$ et si 'l'un est une représentation, l'autre est également une représentation.

On désignera par $\mathcal{G}(\mathbb{C})$ la catégorie dont les objets sont les $\mathbb{C}$-groupoïdes et les morphismes les représentations (la composition de celles-ci étant trivialement vérifiée).

(3,1,5) <u>Proposition</u>. Soit $f : M \longrightarrow M'$, $g : M' \longrightarrow M''$ deux morphismes de $\mathbb{C}$; si (M,m) , (M',m') et (M",m") sont des $\mathbb{C}$-groupoïdes tels que g.f et g soient des représentations et si g est un monomorphisme dans $\mathbb{C}$, alors f est une représentation.

On sait que $g.f{\times}g.f = g{\times}g.f{\times}f$; alors $g.f.m = m''.g{\times}g.f{\times}f = g.m'.f{\times}f$, d'où $f.m = m'.f{\times}f$.

Par contre, si f est une représentation et un épimorphisme de $\mathbb{C}$, on ne peut rien conclure en général pour g ; cependant dans une

F^*-catégorie, $f\times f$ est un épimorphisme si f l'est (cor.(2,5,2,1)) ; g est alors une représentation.

Rappelons que le produit direct de deux $\mathbb{C}$-groupoïdes existe (cf.[2]). Soit (M_1,m_1), (M_2,m_2) deux $\mathbb{C}$-groupoïdes ; soient $(M_1\times M_2, q_1, q_2)$ et $(M_1\times M_2\times M_1\times M_2, p_1, p_2, p_1', p_2')$ des produits directs dans $\mathbb{C}$; alors $m = (m_1.(p_1,p'), m_2.(p_2,p_2')) : M_1\times M_2\times M_1\times M_2 \to M_1\times M_2$ définit une loi sur $M_1\times M_2$ et $(M_1\times M_2, m, q_1, q_2)$ est produit direct dans $\mathcal{G}(\mathbb{C})$.

En particulier les morphismes q_1 et q_2 sont des représentations pour cette loi.

Donnons enfin quelques définition :

(3,1,6) <u>Définition</u>. Soit (M,m) un $\mathbb{C}$-groupoïde et soit $\tau : (M\times M)\times M \longrightarrow M\times(M\times M)$ l'isomorphisme naturel. Si $m.(m\times 1_M) = m.(1_M\times m).\tau$, on dit que la loi m est <u>associative</u> et que (M,m) est un $\mathbb{C}$-<u>demi-groupe</u>.

(3,1,7) <u>Définition</u>. Soit (M,m) un $\mathbb{C}$-groupoïde et soit $\sigma : M\times M \longrightarrow M\times M$ le morphisme de composantes (p',p). On dit que la loi m est <u>commutative</u> si $m = m.\sigma$.

Supposons que $\mathbb{C}$ possède un objet final Ω et soit $e : \Omega \longrightarrow M$ un morphisme ; e est un monomorphisme . Si (E, i_E) est le sous-objet correspondant, E est également objet final dans $\mathbb{C}$; on désignera par ω_X l'unique morphisme de X dans E.

(3,1,8) <u>Définition</u>. On dit que le sous-objet (E,i_E) est un <u>élément neutre à droite</u> dans le $\mathbb{C}$-groupoïde (M,m) si

(3,1,8,1) $$m.(1_M, i_E.\omega_M) = 1_M.$$

On définit de la même manière un <u>élément neutre à gauche</u> et un élément neutre. Un $\mathbb{C}$-groupoïde possède au plus un élément neutre.

Il est bon de noter le résultat suivant (cf. [2])., pour une catégorie avec objet final :

(3,1,9) <u>Théorème</u>. Pour qu'une loi m sur un objet M de $\mathbb{C}$ satisfasse aux propriétés précédentes (associativité, commutativité, existence d'élément neutre), il faut et il suffit que la loi $(f,g) \rightarrow f + g$ sur Hom(X,M) satisfasse aux mêmes propriétés pour tout objet X de $\mathbb{C}$.

Ce théorème ne peut malheureusement pas s'étendre aux propriétés des sous-objets ou des objets-quotients, par défaut de représentabilité.

(3,2) <u>Monomorphismes</u>, <u>épimorphismes et relations d'équivalence dans $\mathcal{G}(\mathbb{C})$</u>.

Nous supposons dans la suite que $\mathbb{C}$ possède des produits directs quelconques (y compris pour une famille vide) et des 2-produits fibrés.

(3,2,1) <u>Lemme</u>. Un morphisme $f : M \rightarrow N$ est un monomorphisme, ssi le diagramme

$$\begin{tikzcd}
M \times M \arrow[r, "f \times f"] & N \times N \\
M \arrow[u, "\Delta_M"] \arrow[r, "f"'] & N \arrow[u, "\Delta_N"']
\end{tikzcd}$$

est un carré cartésien.

Si f est un monomorphisme, $f \times f$ en est un. Soient $u : X \longrightarrow M \times M$ et $v : X \longrightarrow N$ tels que $\Delta_N . v = f \times f . u$; on a

$$f \times f . u = (f.p.u, f.p'.u) = \Delta_N . v = (v,v),$$

d'où $f.p.u = v = f.p'.u$ et $p.u = p'.u$. En posant $h = p.u$, il vient $\Delta_M . h = \Delta_M . p.u = u$ et $f.h = f.p.u = v$; l'unicité de h est immédiate.

Réciproquement, soient u et v tels que $f.u = f.v$; et soit (u,v) le morphisme de composantes u et v, on a $(f \times f).(u,v)) = (f.u, f.v) = \Delta_N . f.u$; il existe donc w tel que $\Delta_M . w = (u,v)$, i.e. $w = u = v$.

Le lemme précédent exprime encore que le graphe de la relation d'équivalence associée à un monomorphisme est Δ_M.

(3,2,2) <u>Proposition</u>. Soit $\mathbb{C}$ une catégorie possèdant des 2-produits fibrés. Alors tout monomorphisme de $\mathcal{G}(C)$ est induit par un monomorphisme de $\mathbb{C}$.

En effet, Δ_M est un morphisme de $\mathcal{G}(C)$; le carré cartésien précédent, dans $\mathcal{G}(\mathbb{C})$, est aussi un carré cartésien dans $\mathbb{C}$.

Soit maintenant $\mathbb{C}$ une F^*-catégorie satisfaisant aux axiomes (E) et (E').

(3,2,3) <u>Proposition</u>. Soient (M,m) et (N,n) deux $\mathbb{C}$-groupoïdes et $f : M \longrightarrow N$ une représentation. Alors les sous-objets $\mathrm{Im}(f)$ et $\overline{\mathrm{Im}}(f)$ de N dans $\mathbb{C}$ sont des sous-objets stables.

Autrement dit, $\mathrm{Im}(f)$ et $\overline{\mathrm{Im}}(f)$ sont des sous-objets de (N,n) dans $\mathcal{G}(C)$. En particulier, l'image faible de f dans $\mathcal{G}(C)$ est identique à l'image faible de f dans $\mathbb{C}$. Il n'en est pas de même de $\overline{\mathrm{Im}}(f)$, comme le montre l'exemple cité à la fin de (2,6,5). Ceci provient du fait qu'un épimorphisme dans $\mathcal{G}(\mathbb{C})$ n'est pas nécessairement induit par un épimorphisme de $\mathbb{C}$. On a cependant :

(3,2,3,1) Corollaire. Tout épimorphisme fort dans $\mathcal{G}(\mathbb{C})$ est induit par un épimorphisme fort dans $\mathbb{C}$.

(3,2,4) Définition. Soit (R,r,r') une relation d'équivalence sur un objet M de $\mathbb{C}$; soit $i : R \longrightarrow M\times M$ son graphe, et soit $m : M\times M \longrightarrow M$ une loi sur M. On dit que R est compatible avec m si i est une représentation pour la loi produit sur $M\times M$.

En particulier la plus fine relation d'équivalence sur M, ayant Δ_M pour graphe, est compatible avec toute loi m.

(3,2,5) Théorème. Soit $\mathbb{C}$ une F^*-catégorie; une relation d'équivalence réalisable sur M est compatible avec une loi m sur M, ssi son conoyau est une représentation.

Soit f une représentation de (M,m) dans (N,n); le conoyau q_f de $\bar{f}^{1}(-,M)$ est une représentation d'après (2,5,3); cette propriété montre également que, si q est un épimorphisme strict, $q\ q$ est un épimorphisme strict.

Comme dans une F^*-catégorie, toute relation d'équivalence réalisable est effective, il suffit de montrer dans un premier stade, que toute relation d'équivalence associée à une représentation est compatible. Cela résulte du lemme suivant :

(3,2,5,1) <u>Lemme</u>. Soit $f : M \longrightarrow N$ un morphisme de $\mathbb{C}$; les deux diagrammes suivants sont simultanément des carrés cartésiens :

$$
(A)\quad
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "r"] \arrow[d, "r'"'] & M \arrow[d, "f"] \\
M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
(B)\quad
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f.p.i = j"'] & M\times M \arrow[d, "f\times f"] \\
N \arrow[r, "\Delta_N"'] & N\times N
\end{tikzcd}
$$

où $i = (r,r')$.

Supposons que A soit un carré cartésien et soit $u : X \longrightarrow M\times M$ $v : X \longrightarrow N$ tels que $(f\times f).u = \Delta_N.v$. On a : $(f\times f).u = (f.p.u, f.p'.u) = (v,v)$, d'où $f.p.u = f.p'.u$. Il existe donc $w : X \longrightarrow R$ tel que $r.w = p.u$ et $r'.w = p'.u$; comme $r = p.i$ et $r' = p'.i$, il vient $p.i.w = u$ et $f.p.i.w = f.p.u = w$. B est ainsi un carré cartésien (l'unicité étant immédiate).

Réciproquement, soient $u : X \longrightarrow M$ tels que $f.u = f.v$. On a $(f\times f).(u,v) = (f.u,f.v) = (f.u,f.u) = \Delta_N.f.u$; il existe donc $w : X \longrightarrow R$ tel que $(u,v) = i.w$ et $f.u = f.p.i.w$, d'où $p.(u,v) = p.i.w = r.w$ et $p'.(u,v) = p'.i.w = r'.w$.

Soit alors $\overset{-1}{f}(-,M)$ la relation d'équivalence associée à une représentation $f : (M,m) \longrightarrow (N,n)$. Soit m' (resp. n') la loi produit sur $M\times M$ (resp. sur $N\times N$) ; $f\times f$ est une représentation. On a :

$$\begin{aligned}(f\times f).m'.(i\times i) &= n'.((f\times f)\times(f\times f)).(i\times i)\\ &= n'.((f\times f).i\times(f\times f).i)\\ &= n'.(\Delta_N.j\times\Delta_N.j)\\ &= n'.(\Delta_N\times\Delta_N).(j\times j)\\ &= \Delta_N.n.(j\times j)\ ;\end{aligned}$$

Par conséquent, $m'.(i\times i)$ et $n.(j\times j)$ sont diagonaux au dessus de $f\times f$ et Δ_N. Il existe donc un unique morphisme $m_R : R\times R \longrightarrow R$ tel que $m'.(i\times i) = i.m_R$.

Considérons maintenant une relation d'équivalence compatible, définie par le couple (r,r') de morphismes de R dans M. Les morphismes i, p et p' sont des représentations pour la loi produit sur $M\times M$. Soit le carré cocartésien :

(C)
$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "r"] \arrow[d, "r'"'] & M \arrow[d, "q"] \\ M \arrow[r, "q"'] & Q \end{tikzcd}$$

dans $\mathbb{C}$. On sait que r et r' possèdent une section commune, d'où l'égalité des morphismes q ; de plus (C) est un carré cartésien. Le morphisme q est un épimorphisme strict, conoyau de la relation d'équivalence (R,r,r'). Le morphisme $q\times q : M\times M \longrightarrow Q\times Q$ est aussi un épimorphisme strict. Soient alors deux morphismes $u : X \longrightarrow M\times M$, $v : X \longrightarrow M\times M$, tels que $(q\times q).u = (q\times q).v$. On a $(q.p.u, q.p'.u) = (q\times q).u = (q\times q).v = (q.p.v, q.p'.v)$, d'où $q.p.u = q.p.v$ et $q.p'.u = q.p'.v$; il existe donc un morphisme $w : X \longrightarrow R$ tel que $r.w = p.u$, $r'.w = p.v$ et un morphisme $w' : X \longrightarrow R$ tel que

$r.w' = p'.u$ et $r'.w' = p'.v$. On a donc les égalités :

$$p.i.(w + w') = p.i.w + p.i.w' = p.u + p'.u = (p + p').u = m.u$$

$$p'.i.(w + w') = p'.i.w + p'.i.w' = p.v + p'.v = (p + p').v = m.v,$$

car $p.i$ et $p'.i$ sont des représentations (3;1,3) ; en définitive, il vient $q.m.u = q.p.i.(w + w') = q.p'.i(w + w') = q.m.v$; par conséquent, il existe un morphisme $m_Q : Q \times Q \longrightarrow Q$ tel que $m_Q.(q \times q) = q.m$, ce qui achève la démonstration.

(3,3) Les $\mathbb{C}$-demi-groupes.

Nous étudions ici brièvement les $\mathbb{C}$-demi-groupes avec élément neutre. On désigne par $\mathbb{H}(C)$ la catégorie ainsi définie. On suppose de plus que la catégorie $\mathbb{C}$ possède un objet nul.

Soit $f : (M,m) \longrightarrow (N,n)$ un morphisme de $\mathbb{H}(C)$; on a $f.O_M = O_N$, donc f' transporte' l'élément neutre de M sur celui de N ; ce n'est pas en général le cas si l'on suppose seulement que $\mathbb{C}$ possède un objet final (cf. prop. (3,4,3)).

(3,3,1) Proposition. Soit $f : (M,m) \longrightarrow (N,n)$ un morphisme de $\mathbb{H}(C)$; soit (E, i_E) l'élément neutre de N ; soit dans $\mathbb{C}$ le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\omega_K"'] & M \arrow[d, "f"] \\ E \arrow[r, "i_E"'] & N \end{tikzcd}$$

Alors (K,i) définit un sous-objet stable de (M,m).

En effet, $f.m(i\times i) = n.(f\times f).(i\times i) = n.(f.i\times f.i) =$ $n.(i_E.\omega_K\times i_E.\omega_K)$; mais (E,i_E) est trivialement un sous-objet stable de N ; en désignant par n_E la loi "induite", on a = $n.(i_E.\omega_K\times i_E.\omega_K) = n.(i_E\times i_E).(\omega_K\times\omega_K) = i_E.n_E.(\omega_K\times\omega_K)$. Il existe donc un unique morphisme $m_K : K\times K \longrightarrow K$ tel que $i.m_K = m.(i\times i)$.

Remarquons que la démonstration précédente permet d'établir que $\mathcal{G}(C)$ possède des produits fibrés si $\mathbb{C}$ en possède, ce que nous avions admis précédemment.

(3,3,3) <u>Définition</u>. On dit qu'un sous-objet (A,i_A) d'un objet M de $\mathbb{C}$ est unitaire à droite, pour la loi m sur M, si pour tout sous-objet (B,i_B) de M tel que $m.(i_B\times i_A) = i_A.u$, on a $i_B\leq i_A$.

En particulier, un sous-objet stable unitaire à droite vérifie la condition suivante : $m.(i_B\times i_A) = i_A.u \Leftrightarrow i_B\leq i_A$.

(3,3,3) <u>Définition.</u> On dit qu'un sous-objet (A,i_A) d'un objet M de $\mathbb{C}$ satisfait à la <u>condition de Lyapin</u>, pour la loi associative m sur M, si pour tous sous-objets (B,i_B) et (C,i_C) de M, on a :

$$m.(m.(i_B\times i_A)\times i_C) = i_A\circ u \Leftrightarrow m.(i_B\times i_C) = i_A.v.$$

Il est facile de voir que, dans $\mathbb{H}(C)$, la condition de Lyapin pour un sous-objet (A,i_A) de M montre qu'il est unitaire.

(3,3,4) <u>Théorème</u> (Lyapin). Dans la catégorie $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, le noyau d'un morphisme f de (M,m) dans (N,n) est un sous-objet stable satisfaisant à la condition de Lyapin, donc unitaire.

Soit (K, i_K) le noyau de f. Nous utilisons les produits directs suivants : $(B\times K\; p_B, p_K)$, $(B\times C, p'_B, p'_C)$, $((B\times K)\times C, p''_{B\times K}, P''_C)$. D'autre part, le morphisme $(p_B . p''_{B\times K}, p''_C)$: $(B\times K)\times C \longrightarrow B\times C$ est un épimorphisme sectionnable. On a alors :

$$\begin{aligned}
f.m.(m.(i_B\times i_K)\times i_C) &= n.(f\times f).(m.(i_B\times i_K)\times i_C)\\
&= n.(n.m.(i_B\times i_K)\times f.i_C)\\
&= n.(n.(f.i_B\times f.i_K)\times f.i_C)\\
&= n.(n.(f.i_B.p_B, f.i_K.p_K)\times f.i_C)\\
&= n.(f.i_B.p_B\times f.i_C)\\
&= n.(f.i_B.p_B.p''_{B\times K}, f.i_C.p''_C)\\
&= n.(f.i_B.p'_{B'}, f.i_C.p'_C).(p_B.p''_{B\times K}, p''_C)\\
&= n.(f.i_B\times f.i_C).(p_B.p''_{B\times K}, p''_C)\\
&= f.m.(i_B\times i_C).(p_B.p''_{B\times K}, p''_C).
\end{aligned}$$

Comme $(p_B.p''_{B\times K}, p''_C)$ est un épimorphisme, on a :

$$f.m.(m.(i_B\times i_K)\times i_C) = 0 \iff f.m.(i_B\times i_C) = 0.$$

<u>Remarque</u>. Plus généralement, supposons que (M,m) soit un C-demi-groupe et (N,n) un $\mathbb{C}$-demi-groupe avec élément neutre. Si f est une représentation de (M,m) dans (N,n), le noyau de f, défini comme dans (3,3,1), satisfait à la condition de Lyapin ; de plus, il est unitaire, ce qui nécessite une démonstration nouvelle du type ci-dessus.

(3,4) <u>Catégorie des $\mathbb{C}$-groupes</u>.

Sans développer complètement l'étude des C-groupes qui commencent à être bien connus, nous donnons ici deux propriétés de la catégorie des objets de $\mathbb{C}$ munis d'une loi de groupe.

(3,4,1) <u>Définition</u>. On dit que la loi m d'un $\mathbb{C}$-groupoïde M est symétrisable à droite, par rapport à un élément neutre (E, i_E) s'il existe un morphisme $s : M \longrightarrow M$ dans $\mathbb{C}$ tel que $m.(1_M, s) = i_E.\omega_M$.

On définit de même une loi symétrisable. Si m est associative, et symétrisable à droite et à gauche, par s et s', on a s = s'. On dira alors que m est une <u>loi de groupe sur</u> M. On désigne par $G(\mathbb{C})$ la catégorie des objets de C munis d'un loi de groupe.

D'après le théorème (3,1,9), si (M,m) est un $\mathbb{C}$-groupe, alors $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,M)$ est un groupe pour la loi $(f,g) \longrightarrow f + g$.

On obtient un critère de commutativité pour (M,m) de la façon suivante :

(3,4,2) <u>Théorème</u>. Pour un objet (M,m) de $G(\mathbb{C})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) la loi m est commutative ;

b) pour tout objet (X,x) de $G(\mathbb{C})$, $\mathrm{Hom}_{G(\mathbb{C})}(X,M)$ est une partie stable de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,M)$ muni de la loi $(f,g) \longrightarrow f + g$;

c) m est une représentation.

a) $\Rightarrow$ b) : Soient f et g deux représentations de (X,x) dans (M,m). Si $m = m.\sigma$, on a $g.p_X + f.p'_X = f.p'_X + g.p_X$ et, par suite, $(f + g).x = (f.p_X + f.p'_X) + (g.p_X + g.p'_X) = (f.p_X + g.p_X) = (f.p'_X + g.p'_X) = (f + g)p_X + (f + g).p'_X$.

Soient alors u et v des morphismes de Y dans X ; il vient

$$\begin{aligned}(f+g).(u+v) &= (f+g).x.(u,v)\\ &= ((f+g).p_X + (f+g).p'_X).(u,v)\\ &= (f+g).p_X.(u,v) + (f+g).p'_X.(u,v)\\ &= (f+g).u + (f+g).v\ ,\end{aligned}$$

d'où le résultat d'après (3,1,3).

b) $\Rightarrow$ c) : c'est immédiat puisque $m = p + p'$.

c) $\Rightarrow$ a) : en effet, avec les notations du produit direct $M{\times}M{\times}M{\times}M$ de (3,1), on a

$$\begin{aligned}p_1 + p_2 + p_3 + p_4 &= m.(m.(p_1,p_2),m.(p_3,p_4))\\ &= m.(m\ m)\\ &= m.m'\\ &= m.(m.(p_1,p_3),m.(p_2,p_4))\\ &= p_1 + p_3 + p_2 + p_4 .\end{aligned}$$

Plus généralement, si f, g, h, k sont des morphismes de X dans M, on aura $f + h + g + k = f + g + h + k$; si $f = k$ est l'élément neutre de Hom(X,M), on a $h + g = g + h$, et Hom(X,M) est commutatif.

Notons que le résultat reste vrai pour les $\mathbb{C}$-demi-groupes à élément neutre, et pour les $\mathbb{C}$-semi-groupes (tout élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,M)$ est régulier pour la loi $(f,g) \to (f + g)$.

Si l'on considère dans $G(\mathbb{C})$ la sous-catégorie pleine des $\mathbb{C}$-groupes abéliens, on obtient une catégorie additive (grâce au théorème (3,1) de [4]) ; sur cette catégorie on peut alors appliquer les résultats de Yoneda [22], puisque $\mathbb{C}$ est une F-catégorie.

Remarquons enfin que pour construire $G(\mathbb{C})$, on peut toujours supposer que la catégorie $\mathbb{C}$ possède un objet nul ; pour cela rappelons que, si $\mathbb{C}$ est une catégorie possèdant un objet final Ω et, si $\mathbb{C}_\Omega$ désigne la catégorie des objets au-dessous de Ω (cf.[9]) , alors $\mathbb{C}_\Omega$ possède un objet nul.

(3,4,3) Proposition. Les catégories de $\mathbb{C}$-groupes et de $\mathbb{C}_\Omega$-groupes sont équivalentes (et même isomorphes).

Soit (M,m) un objet de $G(\mathbb{C})$; il existe un unique morphisme $\varphi_M : \Omega \to M$ tel que $m.(1_M, \varphi_M.\omega_M) = m.(\varphi_M.\omega_M, 1_M) = 1_M$. $M{\times}M$ est muni trivialement d'une structure de Ω-objet par $(\varphi_M, \varphi_M) : \Omega \longrightarrow M{\times}M$ et m vérifie : $m.(\varphi_M, \varphi_M) = m.(1_M, \varphi_M.\omega_M).\varphi_M = \varphi_M$, et peut donc être considéré comme un morphisme de $\mathbb{C}_\Omega$.
A tout $\mathbb{C}$-groupe (M,m), on peut donc associer un $\mathbb{C}_\Omega$-groupe (M,φ_M,m).
Soit alors $f : (M,m) \longrightarrow (N,n)$ un morphisme de $G(\mathbb{C})$; on vérifie de la façon habituelle (au moyen du foncteur $\mathrm{Hom}(-,N)$) que $f.\varphi_M = \varphi_N$; autrement dit f est un Ω-morphisme et peut donc être considéré comme une représentation du $\mathbb{C}_\Omega$-groupe (M,φ_M,m) dans le $\mathbb{C}_\Omega$-groupe (N,φ_N,n). Soit T le foncteur ainsi défini ; on a trivialement les propriétés suivantes :

a) $\mathrm{Hom}_{G(\mathbb{C})}((M,m),(N,n))$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{G(\mathbb{C}_\Omega)}(T(M,m),T(N,n))$

b) si (M,φ_M,m) est un $\mathbb{C}$ -groupe, (M,m) est un $\mathbb{C}$-groupe tel que $T(M,m) = (M,\varphi_M,m)$.

Remarque. La proposition n'est plus vraie pour les lois à élément neutre quelconques ; par exemple, dans la catégorie des demi-groupes à élément neutre construite sur $\mathbb{E}$ns, il existe des morphismes ne conservant pas l'élément neutre ; par contre, dans la même catégorie construite sur $\mathbb{E}ns^{\bullet}$; tous les morphismes conservent l'élément neutre, (c'est la catégorie $\mathbb{D}n$ de l'exemple (2,6,5)).

Bibliographie

1 . J. BENADOU , Critère de représentabilité des foncteurs, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 260 (1965), p. 752-755.

2 . B. ECKMANN et P.J. HILTON , Group-Like Structures in General Categories I, Multiplications and Comultiplications, Math. Ann. 145 (1962) p. 227-255.

3 . ---------------------, II, Equalizers, Limits, Lengths, Math. Ann. 151 (1963) p. 150-186.

4 . ---------------------, III, Primitive Catégories, Math. Ann. 150 (1963) p. 165-187.

5 . P. FREYD, Abelian Categories, New-York, 1964.

6 . P. GABRIEL, Des Catégories Abéliennes, Bull. Soc. Math. Fr. 90 (1ç62) p.323- 448.

7 . P. GABRIEL et M. ZISMAN, Fondment de la Topologie Simpliciale, Séminaires Homotopique, Strasbourg, 1963/64.

8. . A. GROTHENDIECK, Sur quelques points d'Algèbres Homologiques, Tohoku Math. J. 9 (1967) p. 119-221.

9 . ---------------------, Technique de descente et Théorèmes d'existence en Géométrie Algèbrique, Séminaire Bourbaki, 1959-60, exp. 190.

10 . ---------------------, idem, Séminaire Bourbaki, 1960-61; exp 212.

11 . ---------------------, Eléments de Géométrie Algèbrique, III, publ. Math. I.H.E.S. 1961, n° 11.

12 . J.M.HOWIE, Enbedding theorems with amalgamation for semi-groups, Proc. London Math. Soc. (3) 12 (1962) p. 511-534.

13 . J.R. ISBELL Subobjects, adquacy, completeness and categories of algebras, Rozprawy Mat. 38 (1964)

14 . D.M. KAN, Adjoint Functors, Trans. Am. Math. Soc. 87 (1958) p. 294-329.

15 . A.G. KUROSH, A.H. LIVISHITS, E.G. SHULGEIFER, Grundzüge der Theorie des Kategorien, Math. Forschungsberichte, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (1963).

16 . E.S. LYAPIN, The Kernel of Homomorphisms of associative Systems, Mat. Sbornik, 20 (1947) p. 497-515.

17 . B.H. NEUMANN, Lectures on Topics in the theory of infinite Groups, Tata Inst. Fund. Res. Bombay 1960.

18 . A. ROUX, Catégories à produits fibrés, Séminaire d'Algèbre Lyon, 1963-64, non publié.

19 . ------------, Foncteurs d'équivalence dans une catégorie, Publ. Dép. Math. Lyon, 1 (1964) exp. 16.

20 . Z. SEMADENI, Projectivity, injectivity and duality, Rozprawy Mat. 35 (1963) p. 1-47.

21 . E.J. TYLLY, JR, The equivalence for varieties of semi-groups of two properties concerning congruence relations, Bull. Am. Math. Soc. 70 (1964) 3, p. 399-400.

22 . N. YONEDA, On Ext and exact sequences, J. Fac. Sc. Tokyo, 8 (1960) 3, p. 507-576.

Les résultats du premier chapitre ont été exposés dans une note aux C.R. Acad. Sc. Paris, 258 (1964) p. 6317-6319.