R. OUZILOU

Catégories équivalentes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1964, tome 1, fascicule 1
« Exposés sur les CATEGORIES », , exp. n° 21, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1964__1_1_A9_0>

SEMINAIRE
D'ALGEBRE
1963-1964

21.* CATEGORIES EQUIVALENTES

par R.Ouzilou

Cet exposé comporte essentiellement deux parties : une étude sommaire des équivalences de catégories, suivie d'un exemple qu'on trouvera, sous une forme différente, dans [3],p.13-17.

Dans la première partie, il sera souvent fait appel à [5].

(1,1). Etant données deux catégories $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}'$, une <u>pré-équivalence</u> entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}'$ est un quadruplet (S,T,α,β), où S (resp. T) est un foncteur covariant de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}'$ (resp. $\mathbb{C}'$ dans $\mathbb{C}$), α et β deux <u>isomorphismes fonctoriels</u> :

$$\alpha : 1_{\mathbb{C}} \longrightarrow TS \qquad \beta : ST \longrightarrow 1_{\mathbb{C}'}.$$

Il est alors évident que les foncteurs TS et ST sont complétement fidèles et, par conséquent, S et T le sont aussi. (Rappelons qu'un foncteur S de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}'$ est dit complétement fidèle si, pour tout couple (M,N) d'objets de $\mathbb{C}$, l'application induite par S : $S_{N,M} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(S(M),S(N))$ est bijective.)

(1,2) <u>Proposition</u>. Pour toute pré-équivalence (S,T,α,β) entre deux catégories $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}'$, on a :

$$S\alpha = \beta^{-1}S \iff T\beta^{-1} = \alpha T.$$

Il s'agit de montrer que, si pour tout objet X de $\mathbb{C}$, on a $S(\alpha_X) = \beta^{-1}_{S(X)}$, alors, pour tout objet Y de $\mathbb{C}'$, on a $T(\beta^{-1}_Y) = \alpha_{T(Y)}$ et réciproquement (ce qui se montre de la même manière).

Du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\beta^{-1}_Y"] \arrow[d, "\beta^{-1}_Y"'] & ST(Y) \arrow[d, "ST(\beta^{-1}_Y)"] \\
ST(Y) \arrow[r, "\beta^{-1}_{ST(Y)}"'] & STST(Y)
\end{tikzcd}$$

on déduit : $\beta^{-1}_{ST(Y)} = ST(\beta_Y^{-1})$, et de $S(\alpha_{T(Y)}) = \beta^{-1}_{ST(Y)}$, on déduit alors $S(\alpha_{T(Y)}) = S(T(\beta_Y^{-1}))$ d'où, compte tenu de la fidélité de S : $\alpha_{T(Y)} = T(\beta_Y^{-1})$.

(1,3) Si les conditions équivalentes de (1,2) sont satisfaites, on dit que (S,T,α,β) est une <u>équivalence</u> entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}'$, les morphismes fonctoriels composés :

$$S \xrightarrow{S\alpha} STS \xrightarrow{\beta S} S$$

$$T \xrightarrow{\alpha T} TST \xrightarrow{T\beta} T$$

$$T \xrightarrow{T\beta^{-1}} TST \xrightarrow{\alpha^{-1}T} T$$

$$S \xrightarrow{\beta^{-1}S} STS \xrightarrow{S\alpha^{-1}} S$$

sont alors des identités et, d'après [5], (α,β) (resp. (β^{-1},α^{-1})) fait de T un foncteur adjoint à S (resp. de S un foncteur adjoint à T).

Ainsi, pour une équivalence (S,T,α,β) de catégories :

(1,3,1) <u>Les foncteurs</u> T <u>et</u> S <u>sont exacts</u>.

De plus, le diagramme de [5],p.4, permet de montrer facilement, sous la seule hypothèse de S adjoint à T, que :

(1,3,2) Pour tout monomorphisme u de $\mathbb{C}$ et pour tout épimorphisme v de $\mathbb{C}'$, $S(u)$ est un monomorphisme et $T(v)$ un épimorphisme.

(1,3,3) T commute aux limites inductives et S aux limites projectives.

(1,3,4) Si S conserve les épimorphismes, T conserve les objets projectifs; si T conserve les monomorphismes, S conserve les objets injectifs.

(1,3,5) Si S est complétement fidèle, T conserve les générateurs; si T est complétement fidèle, S conserve les cogénérateurs.

Même propriété avec des générateurs ou cogénérateurs faibles.

Tout cela nous permet d'affirmer, en résumé, qu'une équivalence de catégories laisse invariantes les propriétés "catégoriques" usuelles (dites "homologiques" dans [4]).

(2,1) Il est proposé maintenant, à titre d'exemple, de montrer l'existence d'une équivalence entre deux catégories de modules.

Soient F un A-module à gauche, $C = \mathrm{End}_A(F)$ son commutant, $\mathcal{A}$ la catégorie des C-modules <u>à droite</u>, $\mathcal{B}$ la catégorie des A-modules <u>à gauche</u>.

Soit S le foncteur additif de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ défini de la façon suivante : pour tout objet V de $\mathcal{A}$, S(V) est le A-module $V\otimes_C F$, où F est le $(C,A°)$-bimodule associé à F; et, pour tout morphisme $f : V \longrightarrow V'$ de $\mathcal{A}$, S(f) est le $\mathcal{B}$-morphisme $f\otimes 1_F$.

Soit T le foncteur additif de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$ défini comme suit : pour tout objet M de $\mathcal{B}$, T(M) est le C-module $\mathrm{Hom}_A(F,M)$ et, pour tout morphisme $g : M \longrightarrow M'$ de $\mathcal{B}$, T(g) est le $\mathcal{A}$-morphisme $\mathrm{Hom}_A(F,g)$.

Pour tout objet V de $\mathcal{A}$, considérons l'application additive α_V de V dans ST(V) définie par : $\alpha_V(v) : x \longrightarrow v\otimes x$; c'est un $\mathcal{A}$-morphisme, car pour tout élément c de C, on a :

$\alpha_V(vc) = x \longrightarrow v\otimes c(x) = \alpha_V(v)\circ c = \alpha_V(v).c.$

Pour tout $\mathcal{A}$-morphisme $f : V \longrightarrow V'$, le diagramme :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\alpha_V"] \arrow[d, "f"'] & TS(V) \arrow[d, "TS(f)"] \\ V' \arrow[r, "\alpha_{V'}"'] & TS(V') \end{tikzcd}$$

est commutatif; on a en effet, pour tout élément v de V et tout élément x de F :

$$\begin{aligned}(TS(f)\circ\alpha_V)(v)(x) &= TS(f)(\alpha_V(v))(x) = S(f)(\alpha_V(v)(x)) = S(f)(v\otimes x)\\ &= f(v)\otimes x = \alpha_{V'}(f(v))(x) = (\alpha_{V'}\circ f)(v)(x),\end{aligned}$$

ce qui permet de définir un morphisme fonctoriel $\alpha : 1_{\mathcal{A}} \longrightarrow TS$.

Remarquons que pour tout élément c de C, $\alpha_C(c) : x \longrightarrow 1\otimes c(x) = \theta\circ c$, où θ est l'isomorphisme canonique $x \longrightarrow 1_F\otimes x$ de F sur $C\otimes_C F$, ainsi $\alpha_C = T(\theta)$ est un $\mathcal{A}$-isomorphisme.

Pour tout objet M de $\mathcal{B}$, considérons l'application A-bilinéaire de $T(M)\times F$ dans M : $(u,x) \longrightarrow u(x)$ dont la linéarisée β_M est le $\mathcal{B}$-morphisme défini par : $u\otimes x \longrightarrow u(x)$.

Pour tout $\mathcal{B}$-morphisme $g : M \longrightarrow M'$, le diagramme :

$$\begin{tikzcd} ST(M) \arrow[r, "\beta_M"] \arrow[d, "ST(g)"'] & M \arrow[d, "g"] \\ ST(M') \arrow[r, "\beta_{M'}"'] & M' \end{tikzcd}$$

est commutatif; on a, en effet, pour tout élément (u,x) de $T(M)\times F$:

$$(\beta_{M'}\circ ST(g))(u\otimes x) = \beta_{M'}(ST(g)(u\otimes x)) = \beta_{M'}(T(g)u\otimes x)$$
$$= \beta_{M'}((g\circ u)\otimes x) = g(u(x) = (g\circ\beta_M)(u\otimes x),$$

ce qui donne un morphisme fonctoriel $\beta : ST \longrightarrow 1_{\mathcal{B}}$.

Il convient de remarquer que β_F est l'isomorphisme canonique de $C\otimes_C F$ sur F.

(2,1,1) Pour tout objet V de $\mathcal{A}$ et tout élément (v,x) de $V\times F$, on a : $(\beta_{S(V)}\circ S(\alpha_V))(v\otimes x) = \beta_{S(V)}(\alpha_V(v)\otimes x) = \alpha_V(v)(x) = v\otimes x$ d'où $\beta^{-1}S = S\alpha$.

(2,2) Soient $\mathcal{A}'$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$ constituée par les objets libres (i.e. de la forme $C^{(I)}$) et $\mathcal{B}'$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{B}$ constituée par les objets F-<u>isotypiques</u> (i.e. de la forme $F^{(J)}$) alors :

<u>Théorème</u>. Si F est de type fini, S (resp. T) induit un foncteur de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{B}'$ (resp. de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{A}'$) et (S,T,α,β) est une équivalence entre les catégories $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$.

Etablissons tout d'abord le :

(2,2,1) <u>Lemme</u>. Si F est de type fini, T commute aux sommes directes.

De façon précise, si $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, (e_i,p_i), alors :

$$T(M) = \bigoplus_{i\in I} T(M_i),\ (T(e_i),T(p_i)).$$

Pour cela, il suffit ([2],p.26) de montrer que la famille $T(e_i\circ p_i)$, $i\in I$, est à support fini, i.e. pour tout élément u de $T(M)$, le support J_u de $T(e_i\circ p_i)u = e_i\circ p_i\circ u$ est fini.

Pour tout élément x de F, désignons par $J_{u,x}$ le support fini de la famille $(e_i\circ p_i)(u(x))$, on a alors, pour une partie finie A engendrant F : $J_u \subset \bigcup_{x\in A} J_{u,x}$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Le produit tensoriel commutant aux sommes directes, pour tout objet libre $V = C^{(I)}$ (e_i) de $\mathcal{a}$, on a :

$$S(V) = S(C)^{(I)}, \ (S(e_i)).$$

Si F est de type fini, on a d'après (2,2,1), pour tout objet $M = F^{(J)}$ (u_i) :

$$T(M) = T(F)^{(J)}, \ (T(u_i)),$$

d'où la première assertion du théorème.

Pour achever la démonstration, il suffit, compte tenu de (2,2,1), de montrer que et sont bijectifs, ce qui résulte immédiatement des égalités :

$$\alpha_{C^{(I)}} = (\alpha_C)^{(I)} \text{ et } \beta_{F^{(J)}} = (\beta_F)^{(J)},$$

α_C et β_F étant, rappelons le, des isomorphismes.

(2,2,2) Corollaire. Etant donné un A-module à gauche F de type fini fini, si C est le commutant de F :

a) Pour tout couple (V,V') de C-modules à droite libres, l'application $f \longrightarrow f \otimes 1_F$ est un isomorphisme du groupe $\mathrm{Hom}_C(V,V')$ sur le groupe $\mathrm{Hom}_A(V \otimes_C F, V' \otimes_C F)$ et, si $V = V'$, c'est un isomorphisme d'anneaux.

b) Pour tout couple (M,M') de A-modules à gauche F-isotypiques, l'application $g \longrightarrow (u \longrightarrow g_{\circ}u)$ est un isomorphisme du groupe $\mathrm{Hom}_A(M,M')$ sur le groupe $\mathrm{Hom}_C(\mathrm{Hom}_A(F,M),\mathrm{Hom}_A(F,M'))$ et, si $M = M'$ c'est un isomorphisme d'anneaux.

Bibliographie.

[1]. Andreotti, Généralités sur les catégories abéliennes, Séminaire A.Grothendieck, 1956-57.

[2]. N.Bourbaki, Algèbre, ch.2, 3° édition, (Hermann 1962)

[3]. N.Bourbaki, Algèbre ch.8, (Hermann 1958)

[4]. P.Gabriel, Des catégories abéliennes, Bull. Soc. Math. de France, 1962)

[5]. R.Pupier, Foncteurs adjoints, Séminaire d'Algèbre, Lyon 1963-64, exposé 12.