PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

R. OUZILOU

Limites inductives dans les catégories abéliennes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1964, tome 1, fascicule 1
« Exposés sur les CATEGORIES », , exp. nº 9, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1964__1_1_A5_0>

SEMINAIRE
D'ALGEBRE
1963-1964
2° niveau

9.

LIMITES INDUCTIVES dans les CATEGORIES ABELIENNES

par R.Ouzilou

Ce qui est développé dans cette étude, est entré dans les "moeurs" depuis quelque temps déjà, il s'agira donc de joindre quelques propriétés trouvées dans des ouvrages faisant autorité, à d'autres propriétés qui n'y sont que mentionnées, ou parfois même sous-entendues.

Malgré le cadre limitatif des catégories abéliennes, une grande partie de ces résultats reste encore applicable à des catégories plus générales.

1. Systèmes inductifs.

(1,1) Nous conviendrons d'appeler classe préordonnée toute catégorie $\mathbb{C}$ dont les ensembles de morphismes contiennent au plus un élément.

Cette terminologie se justifie par le fait que la relation binaire $\leq$ entre objets de $\mathbb{C}$ définie par :

$$A \leq B \iff \mathrm{Hom}(A,B) \neq \emptyset$$

est une relation de préordre.

Dans le cas d'une petite catégorie (les objets forment un ensemble) on retrouve bien la notion d'ensemble préordonné.

(1,2) Etant donnés un ensemble préordonné I (identifié à une catégorie d'après (1,1)) et une catégorie $\mathbb{C}$, on appelle I-système inductif d'objets de $\mathbb{C}$ tout foncteur covariant de I dans $\mathbb{C}$.

La catégorie des foncteurs ainsi définie, sera désignée par $\vec{\mathbb{C}}^{I}$, et les morphismes de $\vec{\mathbb{C}}^{I}$ (i.e. les morphismes naturels d'un I-système inductif d'objets de $\mathbb{C}$ dans un autre) seront appelés les I-systèmes inductifs de morphismes de $\mathbb{C}$.

Explicitement, un I-système inductif (A_i, a_{ji}) d'objets de $\mathbb{C}$ est constitué par la donnée :

1°) pour tout indice i de I, d'un objet A_i de $\mathbb{C}$;

2°) pour tout couple (i,j) d'indices de I, tel que $i \leqslant j$, d'un morphisme $a_{ji} : A_i \longrightarrow A_j$, ces morphismes satisfaisant de plus aux conditions :

a) pour tout indice i de I, $a_{ii} = 1_{A_i}$;

b) pour tout triplet (i,j,k) d'indices de I tel que $i \leqslant j \leqslant k$, on a $\qquad a_{ki} = a_{kj} . a_{ji}$.

(1,3) Un système inductif (A_i, a_{ji}) est dit <u>constant</u> si, pour tout couple d'indices (i,j), on a :

1°) $\qquad A_i = A_j \ (= A)$

2°) $\qquad i \leqslant j$ entraine $a_{ji} = 1_A$.

Il est alors convenable d'identifier ce système à l'objet A.

2. <u>Limites inductives</u>.

(2,1) Etant donnés un objet (A_i, a_{ji}) de $\vec{\mathbb{C}}^I$ et un objet A de $\mathbb{C}$, on dit qu'un système inductif de morphismes $(a_i) : (A_i, a_{ji}) \longrightarrow A$ (i.e. $i \leqslant j$ entraine $a_i = a_j . a_{ji}$) <u>représente</u> A <u>comme limite inductive de</u> (A_i, a_{ji}), si pour tout objet X de $\mathbb{C}$ et tout système inductif de morphismes $(x_i) : (A_i, a_{ji}) \longrightarrow X$, il existe un <u>morphisme</u> unique $x : A \longrightarrow X$ tel que, pour tout indice i, on ait :

$$x_i = x . a_i .$$

Dans ces conditions on écrira $\quad A = \varinjlim_{i \in I} A_i \ (a_i)$.

<u>Remarques</u> :

(2,2) Une limite inductive d'un objet de $\vec{\mathbb{C}}^I$ est solution d'un problème universel [2] où les "Σ-ensembles" sont les objets de $\mathbb{C}$, les "σ-morphismes" les morphismes de $\mathbb{C}$ et les "α-applications" sont les I-systèmes inductifs de morphismes de $\mathbb{C}$; il existe donc pour deux limites inductives (a_i, A) et (a'_i, A') d'un même système inductif, un isomorphisme naturel $u : A \longrightarrow A'$ (i.e. pour tout indice i : $a'_i = u . a_i$).

(2,3) Si (A_i, a_{ji}) est un objet de $\vec{\mathbb{C}}^I$, pour tout objet X de $\mathbb{C}$, $(\mathrm{Hom}(A_i, X), \mathrm{Hom}(a_{ji}, X))$ est un I-système projectif d'ensembles (notion duale, cf. [1]), tout I-systeme inductif de morphismes

$(x_i) : (A_i, a_{ji}) \to X$, X objet de $\mathbb{C}$, est un élément de $\varprojlim_{i \in I} \mathrm{Hom}(A_i, X)$ cf.[1], et si $A = \varinjlim_{i \in I} A_i\ (a_i)$ existe, l'application $x \dashrightarrow (x.a_i)_{i \in I}$ de Hom(A,X) dans $\varprojlim_{i \in I} \mathrm{Hom}(A_i, X)$ est bijective, ce qui résulte immédiatement de la définition (2,1).

Quelques exemples :

(2,4) Si l'on munit un ensemble non vide I de l'ordre grossier, i.e. deux éléments comparables sont égaux, on retrouve la notion de somme directe.

(2,5) Si l'on adjoint alors à I un plus petit élément α, on retrouve la notion de somme fibrée sur l'objet d'indice α.

(2,6) Si I possède un plus grand élément ω, $(a_{\omega i})$ représente A_ω comme limite inductive du I-système (A_i, a_{ji}).

(2,7) Si (A_i, a_{ji}) est un I-système inductif constant d'objet A il faut bien se garder de croire qu'en général $(1_A, A)$ est limite inductive de ce système (cf. (2,4)); cependant cela est lorsque I est filtrant à droite, car alors tout I-système inductif de morphismes $(A_i, a_{ji}) \to X$ est constant.

3. Quelques propriétés des limites inductives.

(3,1) Si (A_i, a_{ji}) et (B_i, b_{ji}) sont deux objets de $\vec{\mathcal{C}}^I$ ayant pour limites (a_i, A) et (b_i, B), pour tout I-système inductif de morphismes $u_i : A_i \to B_i$, il existe un morphisme unique $u : A \to B$ tel que pour tout indice i, on ait $u.a_i = b_i.u_i$. On pose alors :

$$u = \varinjlim_{i \in I} u_i\ (a_i, b_i).$$

Si tous les u_i sont des épimorphismes (resp. morphismes sectionnables, morphismes rétractables) il en est de même de $\varinjlim u_i$ (La vérification de ces propriétés, parce qu'immédiate, est confiée au lecteur).

On retrouve ainsi l'unicité de la limite inductive à une équivalence naturelle près.

(3,2) Si (a_i,A) est limite inductive d'un objet (A_i,a_{ji}) de $\vec{\mathbb{C}}^I$, et si (e_i,E) est somme directe des A_i, alors le morphisme $E \twoheadrightarrow A$ de composantes a_i est un épimorphisme (vérification immédiate).

(3,3) Soient I un ensemble préordonné, filtrant à droite, J une partie de I cofinale à I (cf.[1]), si $(a_i,A)_{i\in I}$ est la limite inductive d'un objet (A_i,a_{ji}) de $\vec{\mathbb{C}}^I$, alors $(a_i,A)_{i\in J}$ est limite inductive de l'objet (A_i,a_{ji}) de $\vec{\mathbb{C}}^J$.

En effet, pour tout J-morphisme (x_j) . $(A_i,a_{ji}) \longrightarrow X$, le morphisme $x_j.a_{ji}$ reste constant lorsque j décrit J.

4. <u>Limites inductives dans les catégories abéliennes</u>.

(4,1) <u>Construction</u> : soit (A_i,a_{ji}) un I-systeme inductif d'objets d'une catégorie abélienne $\mathbb{C}$, <u>à sommes quelconques</u>.

Considérons un couple d'indices (i,j) tel que $i \leqslant j$, et désignons par $(f_i,f_j;A_{ji})$ la somme fibrée des morphismes a_{ii} et a_{ji}; A_{ji} est donc un objet quotient de $A_i \amalg A_j$ (cf.(3,2)). Mais $A_i \amalg A_j$ peut être considéré comme un objet quotient de $\coprod_{k\in I} A_k$. Pour cela il suffit de prolonger le couple (A_i,A_j) en une famille (A'_k),$k\in I$, par des objets nuls et de considérer la somme des épimorphismes $u_k: A_k \twoheadrightarrow A'_k$ définis par : $u_i = 1_{A_i}$, $u_j = 1_{A_j}$, et $k \neq i$, $k \neq j$ entraine $u_k = 0$. Ainsi les A_{ji} $(i \leqslant j)$ forment une famille d'objets quotients de $\coprod_{k\in I} A_k$ et il est aisé de vérifier que les composés des morphismes canoniques $A_i \longrightarrow A_{ji} \longrightarrow \mathrm{Inf}(A_{ji})$ représentent $\mathrm{Inf}(A_{ji})$ comme limite inductive du système (A_i,a_{ji}).

<u>Cas particulier</u> :

(4,2) Si I est un ensemble ordonné par $\geqslant$, d'objets quotients d'un objet M de $\mathbb{C}$, le I-système inductif (i,u_{ji}) où u_{ji} est l'épimorphisme canonique $i \twoheadrightarrow j$ défini, pour $i \geqslant j$, par $j = u_{ji}.i$, a pour limite inductive $(u_k,\mathrm{Inf}(i))$, $k\in I$, où u_k est l'épimorphisme canonique $k \twoheadrightarrow \mathrm{Inf}(i)$.

On pourra d'ailleurs retrouver le résultat directement.

Quelques propriétés:

(4,3) Le foncteur covariant $\varinjlim_{i\in I}$ de $\vec{\mathbb{C}}^I$ dans $\mathbb{C}$ est exact à droite, ce qui s'établit immédiatement à partir des définitions (conoyau, limite inductive).

(4,4) Si (a_i) représente A comme limite inductive d'un I-système (A_i,a_{ji}) d'objets de $\mathbb{C}$, on déduit naturellemntt de ce système un système inductif $(a_i(A_i),\bar{a}_{ji})$ défini par la commutativité des

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "\tilde{a}_i.\mathrm{Coim}(a_i)"] \arrow[d, "a_{ji}"'] & a_i(A_i) \arrow[r, "\mathrm{Im}(a_i)"] \arrow[d, dashed, "\bar{a}_{ji}"] & A \arrow[d, dashed, <->] \\
A_j \arrow[r, "\tilde{a}_j.\mathrm{Coim}(a_j)"'] & a_j(A_j) \arrow[r, "\mathrm{Im}(a_j)"'] & A
\end{tikzcd} \qquad i \leq j$$

il en résulte alors que l'épimorphisme $\varinjlim_{i\in I}(\tilde{a}_i.\mathrm{Coim}(a_i))$ est rétractable, ce qui fait que $(\mathrm{Im}(a_i),A)$ est limite inductive du système $(a_i(A_i),\bar{a}_{ji})$.

(4,5) Corollaire : $A = \mathrm{Sup}\ a_i(A_i)$. cf (3,2)

5. Images directes et réciproques.

(5,1) Etant donné un morphisme $u : A \to B$ d'une catégorie abélienne, rappelons que l'image directe $u(X)$ d'un sous-objet (X,x) de A est le sous-objet de B constitué par la source du morphisme $\mathrm{Im}(u.x)$ et l'image réciproque $u^{-1}(Y)$ d'un sous-objet (Y,y) de B est le sous-objet de A constitué par la source du morphisme $\mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(y.u))$.

Il est équivalent de définir $u^{-1}(Y)$ comme le sous-objet de A qui représente le produit fibré des morphismes u et y.

De ces définitions on déduit immédiatement les propriétés :

(5,2) $X \to u(X)$ (resp. $Y \to u^{-1}(Y)$) est une application croissante de la classe des sous-objets de A (resp. B) dans celle des sous-objets de B (resp. A).

(5,3) Pour tout sous-objet X (resp Y) de A (resp. B) on a :

$$u^{-1}(u(X)) = X \vee u^{-1}(0) \quad (\text{resp. } u(u^{-1}(Y)) = Y \wedge u(A))$$

(cf. exposé 3).

(5,4) Pour toute famille X_i (resp. Y_i) de sous-objets de A (resp. B), on a :

$$\mathrm{Inf}(u^{-1}(Y_i)) = u^{-1}(\mathrm{Inf}(Y_i)) \qquad \sup(u(X_i)) = u(\sup(X_i)).$$

(5,5) Pour toute suite de morphismes $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$, tout sous-objet X de A (resp. Z de C), on a :

$$(v.u)(X) = v(u(X)) \qquad (v.u)^{-1}(Z) = u^{-1}(v^{-1}(Z)).$$

(5.6) Remarque : De (5,3) on déduit le résultat suivant :

"Si u et v sont deux morphismes de même but tels que u soit un épimorphisme et v un monomorphisme, alors, la projection opposée à u, du produit fibré de (u,v) est un épimorphisme."

6. Catégories à limites exactes.

(6,1) Une catégorie abélienne $\mathbb{C}$ sera dite à limites exactes, si pour tout ensemble I préordonné et filtrant à droite, le foncteur $\varinjlim : \vec{\mathbb{C}}^I \longrightarrow \mathbb{C}$ est exact (i.e. la limite inductive d'un I-système inductif de monomorphismes est un monomorphisme).

(6,2) Si C est à limites exactes, pour tout objet M de $\mathbb{C}$ et tout ensemble I de sous-objets de M, filtrant à droite pour $\leqslant$, on a

$$\sup I = \varinjlim_{i \in I} I\ (s_i)$$

où les s_i sont les injections canoniques $i \longrightarrow \sup I$.

En effet, les injections canoniques $e_i : i \longrightarrow M$, $i \in I$ constituant un morphisme du I-système inductif (i, s_{ji}) (s_{ji} : injection canonique de i dans j pour $i \leqslant j$) dans le I-système inductif constant M, $\varinjlim I$ est alors un sous-objet de M, ce qui rend cette limite identique à son image canonique sup I dans M.

(6,3) Si C est à limites exactes, pour tout objet M de $\mathbb{C}$, tout sous-objet P de M, et toute famille (Q_i) de sous-objets de M, filtrante à droite pour $\leqslant$, on a :

$$(\sup(Q_i)) \wedge P = \sup(Q_i \wedge P).$$

Considérons en effet, le diagramme canonique, commutatif et exact pour tout i :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & P\wedge Q_i \arrow[r] \arrow[d, dotted] & P \arrow[r] \arrow[d, dotted] & P/P\wedge Q_i \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q_i \arrow[r] & M \arrow[r] & M/Q_i \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On sait (exposé 3,(2,1)) que $P/P\wedge Q_i \longrightarrow M/Q_i$ est un monomorphisme, d'où d'après (4,2), les diagrammes canoniques commutatifs et exacts :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
P \arrow[r] \arrow[d, dotted] & P/P\wedge Q_i \arrow[r] \arrow[d, dotted] & P/\sup(P\wedge Q_i) \arrow[d] \\
M \arrow[r] & M/Q_i \arrow[r] & M/\sup(Q_i)
\end{tikzcd}$$

ce qui donne (6,3) d'après l'exposé 3 (1,4).

(6,4) *Remarque* : d'après (5,3) et (5,5), la condition (6,3) équivaut, pour tout morphisme v de but M à

$$v^{-1}(\sup(Q_i)) = \sup(v^{-1}(Q_i)).$$

Notons encore, pour une catégorie à limites exactes, la propriété :

(6,5) *Si* (A_i, a_{ji}) *est un* I-*système inductif*, I *filtrant à droite, de limite* (a_i, A), *alors* :

$$\mathrm{Ker}(a_i) = \sup(\mathrm{Ker}(a_{ji})$$

Ceci résulte de l'hypothèse et de sa conséquence (6,2).

En particulier, si les a_{ji} *sont tous des monomorphismes, il en est de même des* a_i.

A titre d'exercice, on pourra vérifier que (6,3) entraine (6,2); pour cela on s'aidera de (4,5) et de l'exposé 3 (1,1).

(6,6) Signalons encore que, dans une catégorie à limites exactes, une somme de monomorphismes est un monomorphisme, parce que toute somme d'objets peut être considérée comme la limite inductive du système filtrant des sommes partielles finies.

7. Catégories à générateurs.

(7,1) Pour un objet U d'une catégorie abélienne $\mathbb{C}$, à sommes quelconques, les assertions suivantes sont équivalentes :

1°) Si (P,i) est un sous-objet d'un objet M tel que tout morphisme de U dans M soit factorisable par i, alors P = M.

2°) Si un morphisme u de N dans M factorise tout morphisme de U dans M, c'est un épimorphisme.

3°) Tout objet M de $\mathbb{C}$ est isomorphe à un quotient d'une somme directe $U^{(I)}$.

L'équivalence de 1°) et 2°) est triviale. Pour vérifier que 2°) entraine 3°), il suffit de considérer la somme directe $U^{(I)}$, avec I = Hom(U,M), alors le morphisme de $U^{(I)}$ dans M de composantes i, $i \in I$, est un épimorphisme.

Pour vérifier que 3°) entraine 1°), considérons un épimorphisme de $U^{(I)}$ dans M de composantes f_i, alors $M = \sup(f_i(U))$, et, si un monomorphisme $i : P \to M$ factorise tous les f_i, on a $\sup(f_i(U)) \leq P$, d'où P = M.

Un tel objet U est appelé un générateur de $\mathbb{C}$.

(7,2) Dans une catégorie à générateur, les sous-objets d'un objet quelconque constituent un ensemble.

Soit U un générateur, pour tout sous-objet (P,i) d'un objet M, désignons par H_i l'ensemble des morphismes de U dans M factorisables par i, soit (Q,j) un sous-objet de M tel que $H_i = H_j$, pour tout morphisme f de U dans P, il existe un morphisme g de U dans Q tel que $i.f = j.g$ il s'ensuit que f est factorisable par l'injection canonique de $P \wedge Q$ dans P, d'où $P \wedge Q = P$, soit $P \leq Q$, comme on a de la même façon $Q \leq P$, il en résulte que tout sous-objet (P,i) est déterminé par l'ensemble des morphismes de U dans M factorisables par i; ainsi les sous-objets de M forment un ensemble de cardinal inférieur à 2^a, où a = Card(Hom(U,M)).

8. Théoreme de l'objet injectif.

(8,1) Dans une catégorie abélienne $\mathbb{C}$ à générateurs et limites exactes, tout objet est isomorphe à un sous-objet d'un objet injectif.

Auparavant, établissons les deux lemmes suivants :

(8,2) Si U est un générateur de $\mathbb{C}$, pour qu'un objet M soit injectif, il faut et il suffit, que pour tout sous-objet V de U, tout morphisme de V dans M soit prolongeable en un morphisme de U dans M.

Cette condition est nécessaire par définition.

Réciproquement, soient A un objet, (B,j) un sous-objet de A, et u un morphisme de B dans M; les sous-objets X de A tels que u soit prolongeable en un morphisme de X dans U forment un ensemble (7,2) inductif (6,2), on peut donc supposer B maximal pour le prolongement de u.

Soit f un morphisme de U dans A et (V,j',f') le produit fibré de (j,f), alors (V,f') est un sous-objet de U, il existe donc par hypothèse un morphisme g de U dans M tel que $g.f' = u.j'$, ce qui fait que le morphisme u est prolongeable jusqu'à la somme fibrée $B \vee f(U)$ de (j',f'), d'où $f(U) \leq B$, mais alors tout morphisme $f : U \longrightarrow A$ est factorisable par j, ce qui donne $B = A$.

(8,3) Pour tout objet A de C, il existe un sur-objet $M_1(A)$ de A tel que tout morphisme d'un sous-objet V de U dans A soit prolongeable en un morphisme de U dans $M_1(A)$.

Considérons la réunion $I(A)$ des ensembles $\mathrm{Hom}(V,A)$ pour V décrivant l'ensemble des sous-objets de U (7,2), V est alors fonction de $i \in I(A)$ et le morphisme $u : \bigoplus_{i \in I(A)} V_i \longrightarrow A$ de composantes i est un épimorphisme, puisque le morphisme de $U^{(\mathrm{Hom}(U,A))}$ dans A de composante i est déjà un épimorphisme (7,1).

La somme v des injections canoniques $V_i \longrightarrow U$, $i \in I(A)$ étant un monomorphisme (6,6), dans la somme fibrée $(M_1(A);u',v')$ de (u,v) le morphisme $u' : A \longrightarrow M_1(A)$, opposé à v, est aussi un monomorphisme (remarque duale de (5,6).

Pour démontrer le théorème (8,1), définissons par récurrence transfinie, pour tout ordinal α, l'objet $M_\alpha(A)$:

si $\alpha = o$, $M_o(A) = A$

si $\alpha = \beta + 1$ $M_\alpha(A) = M_1(M_\beta(A))$

si α est ordinal limite, alors $M_\alpha(A) = \varinjlim_{\lambda < \alpha} M_\lambda(A)$

ce qui donne bien dans tous les cas une injection canonique de A

dans $M_\alpha(A)$ (pour le dernier cas, cf. (6,5)).

Désignons maintenant par k le cardinal de l'ensemble des sous-objets de U, et par k^* le cardinal suivant, soit γ le plus petit ordinal de puissance k^*, alors $M_\gamma(A)$ est un objet injectif; il suffit pour cela de vérifier que, pour tout morphisme $v : V \to M$ V sous-objet de U, v(V) est inférieur à un M_λ, $\lambda < \gamma$; comme γ est un ordinal limite, on a $M_\gamma = \sup_{\lambda<\gamma} M_\lambda$ d'après (4,5); la famille (M_λ) étant totalement ordonnée, on a, d'après (6,4)

$$V = \sup_{\lambda<\gamma} (v^{-1}(M_\lambda)) ;$$

comme l'ensemble des sous-objets de V a un cardinal inférieur à k, et que l'ensemble des ordinaux $\lambda<\gamma$ a pour cardinal k^*, il s'ensuit que la suite ordinale $v^{-1}(M\ )$ est stationnaire, ce qui entraine l'existence d'un ordinal $\lambda_0 < \gamma$ tel que $V = v^{-1}(M_{\lambda_0})$, d'où $v(V) \leq M_{\lambda_0}$.

Bibliographie.

[1]. N.Bourbaki, Livre I, ch.III

[2]. N.Bourbaki, Livre I, ch.IV

[3]. P.Gabriel, Des catégories abéliennes, Bull.Soc.Math.Fr. 1962

[4]. A.Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku Math.J. t.7 (1957).

<u>Dans une catégorie abélienne</u>, <u>tout épimorphisme est universel</u>.

Etant donné un épimorphisme $u_1 : M_1 \longrightarrow B$ et un morphisme $u_2 : M_2 \longrightarrow B$, considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & \\
& K \arrow[dr, "k"] & & \\
& & M \arrow[r, dashed, "p_1"] \arrow[d, dashed, "p_2"'] \arrow[dr, "v"] & M_1 \arrow[d, "u_1"] \\
& & M_2 \arrow[r, "u_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

où $M = M_1 \times M_2$, p_1 et p_2 sont les projections canoniques de M sur M_1 et M_2, $v = u_1 . p_1 - u_2 . p_2$, $k = \mathrm{Ker}(v)$. De la sorte :

$$K = M_1 \times_B M_2 .$$

Si e_1 et e_2 sont les injections canoniques de M_1 et M_2 dans M, on a :

$$v . e_2 = -u_2 \quad \text{et} \quad v . e_1 = u_1$$

et de $\mathrm{Coker}(v . e_1) = o$, on déduit :

$$\mathrm{Coim}(\mathrm{Coker}(v . e_1) . v) = \mathrm{Coker}(e_1) \wedge \mathrm{Coim}(v) = o$$

(exposé 3, propriété duale de (1,1)).

L'antiisomorphisme Ker donne alors :

$$M_1 \vee K = M,$$

d'où $\quad p_2(M_1 \vee K) = p_2(M_1) \vee p_2(K) = p_2(K) = p_2(M) = M_2$,
ce qui prouve que $p_2 . k$ est un épimorphisme.

<u>Corollaire</u>. Si

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & M \arrow[d, "f"] \\
N \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

est une fibration sur B, alors $q(P) = f^{-1}(g(N))$,

Ce diagramme se décompose en effet en les diagrammes de fibration sur B et $g(N)$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[drr] & & & & 0 \\
& & Q \arrow[urr] \arrow[drr] \arrow[ddd] & & \\
P \arrow[urr, dashed] \arrow[ddd, "p"'] & & & & M \arrow[ddd, "f"] \\
& 0 \arrow[dr] & & 0 & \\
& & g(N) \arrow[ur, dashed] \arrow[drr] & & \\
N \arrow[urr] & & & & B
\end{tikzcd}$$

d'où $Q = q(P)$.

Par dualité, on déduit de la fibration sous S :

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, dashed, "f"'] & N \arrow[d, dashed, "j"] \\
M \arrow[r, "k"'] & P
\end{tikzcd}$$

la fibration sous S :

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, dashed, "\mathrm{Coim}(g)"] \arrow[d, dashed, "f"'] & S/\overset{-1}{g}(0) \arrow[d, dashed] \\
M \arrow[r, "\mathrm{Coim}(k)"'] & P/\overset{-1}{k}(0)
\end{tikzcd}$$

qui compte tenu de la fibration sous $\overset{-1}{g}(0)$:

$$\begin{tikzcd}
\overset{-1}{g}(0) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "\mathrm{Ker}(g)"'] & 0 \arrow[d] \\
S \arrow[r, "\mathrm{Coim}(g)"'] & S/\overset{-1}{g}(0)
\end{tikzcd}$$

donne $$\mathrm{Coim}(k) = \mathrm{Coker}(f.\mathrm{Ker}(g)$$

soit, par l'anti-isomorphisme Ker :

$$\mathrm{Ker}(k) = \mathrm{Im}(f,\mathrm{Ker}(g))$$

ou $$\overset{-1}{k}(0) = f(\mathrm{Ker}(g)),$$