Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 94-96

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__94_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Surfaces telles que le triangle déterminé dans le plan tangent en* M, *par les plans coordonnés, ait une aire dont le centre de gravité soit précisément le point* M.

Sur l'une quelconque de ces surfaces S, *on considère une cloison quelconque et les volumes* U_x, U_y, U_z, V_0 *attachés à cette cloison. Différences de ces volumes considérés deux à deux.*

Lignes asymptotiques des surfaces S.

SOLUTION. — La première phrase de l'énoncé se traduit par les trois équations

$$x = \frac{px + qy - z}{3p}, \qquad y = \frac{px + qy - z}{3q}, \qquad z = \frac{z - px - qy}{3}$$

qui se réduisent à deux :

$$px + z = 0, \qquad qy + z = 0.$$

Les surfaces S ont pour équation générale

$$xyz = C.$$

Pour plus de détails, *voir* E. Fabry, ***Problèmes dAnalyse***, 1913, problème 247.

On a ensuite

$$U_x - U_y = \int_L xy\,dz,$$

$$U_y - U_z = \int_L yz\,dx,$$

$$U_z - U_x = \int_L xz\,dy,$$

$$U_z - V_0 = \frac{1}{3}\int_L z(x\,dy - y\,dx).$$

Toutes ces intégrales sont nulles pour un contour fermé L tracé sur une S.

[*Cf.* A. Buhl, *Géométrie et Analyse des intégrales doubles* (*Collection Scientia*, p. 15 et 18).]

Pour les lignes asymptotiques *voir* dans Fabry (*loc cit.*, problème 159) le cas le plus général de la surface

$$z = x^\alpha y^\beta.$$

(Toulouse, juin 1926.)

Épreuve théorique. — *Surfaces* S *telles que* TP = const. = a, *si* P *est la projection sur le plan* Oxy *d'un point quelconque* M *de* S *et si* T *est le point où le plan tangent en* M *coupe* Oz.

Section C *d'une surface* S *par un plan passant par* Oz.

On construira, en particulier, la courbe C *qui rencontre* Oz *normalement en un point* A *de cote* a.

Solution. — En coordonnées semi-polaires les surfaces S ont pour équation aux dérivées partielles

$$z - r\frac{\partial z}{\partial r} = \sqrt{a^2 - r^2},$$

ce qui peut être considéré comme une équation différentielle ordinaire dans le plan zOr.

La courbe C, à construire, est représentable par les équations paramétriques

$$r = a\sin\lambda, \qquad z = a(\lambda\sin\lambda + \cos\lambda)$$

Marquons le point A et le point A' symétrique par rapport à O; traçons les droites $r = \pm a$. Sur ces droites, la courbe admet une infinité de points de rebroussement à tangentes passant toutes par O; elle oscille ainsi d'une droite à l'autre par branches passant toutes par A ou par A'. Aucun point d'inflexion réel.

(Toulouse, novembre 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C.95. — 1° *Trouver les surfaces intégrales de l'équation aux dérivées partielles*

$$(\mathrm{E}) \qquad p(px + qy - 2z) = xy$$

qui passent par la parabole $x^2 - 2y = 0 = z$.

2° *Déterminer les surfaces intégrales* (S) *de* (E) *telles que les courbes caractéristiques de* (E) *situées sur l'une quelconque des surfaces* (S) *se projettent sur le plan des xy suivant des cercles* (*les axes sont supposés rectangulaires*).

3° *Les surfaces* (S) *dépendent d'une constante arbitraire; l'une d'elles* (S_0), *qui passe d'ailleurs par le point* $x = 0$, $y = -2$, $z = 4$, *a une équation de la forme*

$$(\Sigma) \qquad z = x^m f\left(\frac{y}{x}\right),$$

où m est une certaine constante. Écrire l'équation différentielle des lignes asymptotiques de (Σ) *en prenant pour paramètres* $x = u$, $\frac{y}{x} = v$, *et appliquer le résultat à la détermination des asymptotiques de* S_0.

II. *Étant donnée la surface*

$$x = u + uv^2 - \frac{u^3}{3}, \qquad y = v + u^2 v - \frac{v^3}{3}, \qquad z = u^2 - v^2,$$

exprimer que les directions (du, dv) *et* (δu, δv) *sont conjuguées et qu'elles se coupent sous l'angle* ω (*les axes sont supposés rectangulaires*). *En s'appuyant sur le résultat obtenu, déterminer deux familles conjuguées* (C_1) *et* (C_2) *telles que deux courbes* C_1 *et* C_2 *se coupent toujours sous un angle constant,* ω.

ÉPREUVE PRATIQUE — *Calculer par la méthode des résidus l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{x^6 + 1}{\sqrt[6]{1 - x^6}}\, dx,$$

la détermination initiale du radical se réduisant à 1 *et le chemin d'intégration étant un segment de l'axe réel.*

Réponse : $I = \frac{7\pi}{18}$. (Poitiers, novembre 1926.)