Agrégation des sciences mathématiques (session de 1926)

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 82-91
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__82_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (SESSION DE 1926).

Mécanique rationnelle.

Étude de certains mouvements d'une toupie. — *La toupie est constituée par un disque circulaire plan homogène, de rayon $2a$ et de masse m, d'épaisseur négligeable, fixé à une aiguille perpendiculaire, de masse et d'épaisseur négligeables, de longueur a en dessous du disque jusqu'à la pointe et $2a$ au-dessus. L'action de la pesanteur est supposée assimilable à celle d'un champ uniforme, vertical, d'intensité g par unité de masse; on ne tiendra pas compte de la résistance de l'air.*

Les candidats pourront traiter les diverses parties dans l'ordre qui leur conviendra.

I. *La toupie étant animée d'un mouvement de rotation de* grande *vitesse angulaire autour de son axe repose par sa pointe sur un plan horizontal. On supposera que le frottement maintient cette pointe immobile et que la résistance du plan peut se traduire par une réaction unique appliquée à la pointe.*

a. Étudier et décrire succinctement le mouvement de la toupie dans le cas où, à certains instants de ce mouvement, l'aiguille a une vitesse nulle, la vitesse angulaire de la toupie

(1) *Exercices*, I, 77, p. 91.

étant alors ω. *En se limitant à une période de temps qui sépare deux repos successifs de l'aiguille, étudier le mouvement d'une façon plus précise en développant les éléments qui le déterminent suivant les puissances de* $\lambda = \frac{g}{a\omega^2}$ *supposé petit et en se bornant aux termes du premier degré en* λ.

b. Étudier et décrire succinctement le mouvement dans le cas où, à un certain instant de ce mouvement, l'aiguille passe par la verticale avec une vitesse angulaire ε. *En supposant* ε *petit, donner des valeurs approchées de la variation du temps et de la précession entre deux passages successifs par la verticale. Que devient le mouvement si l'on fait abstraction de l'action de la pesanteur ?*

c. Déterminer les conditions d'un mouvement où l'aiguille garde une inclinaison constante sur la verticale; chercher le système des forces d'inertie et la réaction du plan horizontal. Ce mouvement étant réalisé, on suppose qu'on applique au centre de gravité de la toupie une force horizontale perpendiculaire à l'axe, d'intensité f; *comment tendent à varier les vitesses? Quel serait de même l'effet d'une percussion qui aurait même point d'application, même direction, et pour intensité* P ?

II. *La pointe de la toupie est engagée dans une rainure circulaire horizontale, de rayon* ρa, *qui permet tout déplacement angulaire de l'aiguille et tout déplacement de la pointe dans la rainure; la résistance de cette rainure peut ainsi se traduire par une réaction normale, appliquée à la pointe. Chercher des équations différentielles définissant le mouvement, en prenant pour variables l'abscisse angulaire de la pointe dans la rainure et les angles d'Euler qui définissent la position de la toupie. Chercher s'il existe un mouvement tel que l'aiguille ou son prolongement rencontre l'axe de la rainure en un point fixe.*

SOLUTION par MM. CABANTOUS et COHEN BACRIE.

I. Nous prenons les axes habituels, fixes $Ox_1y_1z_1$, mobiles $Oxyz$ liés à la toupie. Le point O est la pointe de la toupie et l'axe Oz

est dirigé suivant son axe, l'axe Oz_1 est vertical (sens positif vers le haut). Nous déterminons la position de la toupie par les trois angles d'Euler θ, ψ, φ.

L'ellipsoïde d'inertie au point O est une sphère

$$(A = B = C = 2ma^2)$$

et l'on a immédiatement les trois intégrales premières classiques du mouvement

$$(e) \qquad \begin{cases} \theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta = h - \dfrac{g}{a}\cos\theta, \\ \psi' \sin^2\theta + r_0 \cos\theta = k, \\ \varphi' + \psi' \cos\theta = r_0; \end{cases}$$

données par le théorème de la force vive, celui du moment cinétique par rapport à Oz_1 et la troisième équation d'Euler; les constantes r_0 (vitesse angulaire autour de l'axe), k et h dépendent des données initiales.

a. Soit θ_0 une valeur de θ pour laquelle l'aiguille a une vitesse nulle (θ' et ψ' sont nuls); les valeurs de h et k sont immédiates et un calcul connu conduit, pour déterminer $\cos\theta = u$, à l'équation

$$u'^2 = (u_0 - u)\left[\frac{g}{a}(1 - u^2) - \omega^2(u_0 - u)\right] \qquad (u_0 = \cos\theta_0),$$

dont la discussion est classique.

A étant le point où l'axe de la toupie perce la sphère de centre O et de rayon unité, la courbe décrite par ce point est festonnée. Elle est comprise entre les deux parallèles limites u_0 et u_1, u_1 étant la racine, inférieure à u_0, du trinome entre crochets, et comporte des points de rebroussement sur le parallèle supérieur u_0. Comme ω est très grand par hypothèse, u_0 est très peu différent de u, et θ reste sensiblement constant.

Pour étudier le mouvement d'une façon plus précise, nous écrirons l'équation différentielle précédente en y introduisant $\lambda = \dfrac{g}{a\omega^2}$:

$$(1) \qquad u'^2 = \omega^2(u_0 - u)\{\lambda(1 - u^2) - (u_0 - u)\}.$$

Pour $\lambda = 0$ il vient $u = u_0$; on doit donc poser, conformément aux indications de l'énoncé,

$$u(t) = u_0 + \lambda w(t) + \ldots$$

avec

$$w(0) = 0, \qquad w'(0) = 0$$

et l'équation (1) où l'on se borne aux termes de plus bas degré en λ donne

$$w'^2 = \omega^2(-w)(1 - u_0^2 - w),$$

qui s'intègre immédiatement en donnant

$$w = -\frac{1 - u_0^2}{2}(1 - \cos\omega t),$$

d'où

$$u = u_0 - \lambda\frac{1 - u_0^2}{2}(1 - \cos\omega t)$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\theta &= \arccos u = \arccos u_0 - \frac{\lambda w}{\sqrt{1 - u_0^2}} \\ &= \theta_0 + \frac{\lambda}{2}\sin\theta_0(1 - \cos\omega t),\end{aligned}$$

On a ensuite

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega\frac{u_0 - u}{1 - u^2}$$

ou, en se bornant au terme du premier degré en λ,

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega\lambda}{2}(1 - \cos\omega t), \qquad \text{d'où} \qquad \psi = \frac{\omega\lambda}{2}t - \frac{\lambda}{2}\sin\omega t.$$

Enfin φ se détermine aisément par l'équation

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega - \frac{\omega\lambda}{2}\cos\theta_0(1 - \cos\omega t),$$

d'où

$$\varphi = \omega t - \psi\cos\theta_0.$$

b. En choisissant comme instant initial celui du passage par la verticale, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{aligned}\varphi' + \psi'\cos\theta &= r_0, \\ \psi'\sin^2\theta + r_0\cos\theta &= r_0, \\ \theta'^2 + r_0^2\frac{(1 - \cos\theta)^2}{\sin^2\theta} &= \varepsilon^2 + \frac{g}{a}(1 - \cos\theta).\end{aligned}$$

Posons $\cos\theta = u$, la dernière équation devient

$$u'^2 = \left[\frac{g}{a}(1 - u) - \varepsilon^2\right](1 - u^2) - r_0^2(1 - u)^2.$$

Considérons le deuxième membre de cette équation

$$F(u) = (1 - u) f(u)$$

avec

$$f(u) = (1 + u)\left[\frac{g}{a}(1 - u) - \varepsilon^2\right] - r_0^2(1 - u).$$

Ce dernier trinome a ses racines réelles, l'un u_1 étant comprise dans l'intervalle $-1 + 1$, l'autre u_2 supérieure à $+1$. Pour $\varepsilon = 0$ il se réduit à

$$(1 - u)\left\{\frac{g}{a}(1 + u) - r_0^2\right\}$$

qui a les racines $+1$ et $-1 + \frac{r_0^2}{g} a$. Si r_0 est grand (ce que suppose l'énoncé) cette dernière quantité est supérieure à l'unité de sorte que, pour les petites valeurs de ε, u_2 sera voisin de $-1 + \frac{r_0^2}{g} a$ et u_1 voisin de l'unité ; on aura

$$u_1 = 1 - \frac{2\varepsilon^2}{r_0^2 - \frac{2g}{a}} + \ldots .$$

L'équation différentielle en u, qui peut s'écrire

$$u'^2 = \frac{g}{a}(1 - u)(u_2 - u)(u - u_1),$$

montre que u va varier entre les deux quantités très voisines 1 et u_1.

Il est commode de poser

$$u = \frac{1 + u_1}{2} + \frac{1 - u_1}{2}\cos\alpha,$$

d'où pour α l'équation différentielle

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{g}{a}(u_2 - u),$$

et, par suite

$$\sqrt{\frac{g}{a}(u_2 - u_1)} > \frac{d\alpha}{dt} > \sqrt{\frac{g}{a}(u_2 - 1)} \quad [1].$$

[1] $u_2 - u$ ne s'annule jamais, et l'on peut toujours choisir la détermination de α de façon que $\frac{d\alpha}{dt}$, qui ne change pas de signe, soit positif.

Deux passages consécutifs par la verticale correspondent à $\alpha = 0$, $\alpha = 2\pi$ (en général $\alpha = 2k\pi$), l'intervalle de temps correspondant est compris entre

$$2\pi\sqrt{\frac{a}{g(u_2 - 1)}}, \qquad 2\pi\sqrt{\frac{a}{g(u_2 - u_1)}},$$

limites très rapprochées; r_0 étant très grand, il est sensiblement

$$\frac{2\pi}{r_0}.$$

Pour l'angle de précession ψ on a

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = \frac{r_0}{1 - u}\sqrt{\frac{a}{g(u_2 - u)}},$$

et la variation de précession, entre deux passages, sera comprise entre

$$2\pi\frac{r_0}{2}\sqrt{\frac{a}{g(u_2 - u_1)}}, \qquad 2\pi\frac{r_0}{(1 + u_1)}\sqrt{\frac{a}{g(u_2 - 1)}},$$

ainsi déterminée avec une erreur relative petite. Pour ε tendant vers zéro (r_0 restant fixe, grand), on a, à la limite,

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{2g}{ar_0^2}}} \sim \pi.$$

Si l'on fait abstraction de l'action de la pesanteur, les équations se réduisent à

$$u'^2 = \varepsilon^2(1 - u^2) - r_0^2(1 - u)^2.$$

$$\psi' = \frac{r_0}{1 - u}$$

dont l'intégration est élémentaire. On sait d'ailleurs que, dans ce cas, l'ellipsoïde d'inertie en O étant une sphère, le mouvement de la toupie est une rotation uniforme autour d'un axe fixe de sorte que le point A décrit une circonférence. Si l'on tient compte de la pesanteur, la trajectoire de A est une petite courbe fermée, sensiblement circonférence si r_0 est très grand.

c. De l'équation de la force vive

$$\theta'^2 + \psi'^2\sin^2\theta = -\frac{g}{a}\cos\theta + h$$

et de la relation

$$\psi' \sin^2\theta + r_0 \cos\theta = k,$$

on déduit

$$\theta'^2 \sin^2\theta = \left(h - \frac{g}{a}\cos\theta\right)\sin^2\theta - (k - r_0\cos\theta)^2.$$

En écrivant que $\theta = \theta_0$ est racine double du deuxième membre de cette équation, on obtient la relation

$$2\varphi'_0\psi'_0 = \frac{g}{a}.$$

Les conditions du mouvement stationnaire de la toupie (θ constant) sont donc

$$\theta'_0 = 0, \qquad 2\varphi'_0\psi'_0 = \frac{g}{a}.$$

Le système des forces d'inertie est déterminé :

1° par sa résultante ou force d'inertie de la masse concentrée au centre de gravité, de composantes $m\xi''$, $m\eta''$, o, avec

$$\xi = a\sin\theta\sin\psi, \qquad \eta = -a\sin\theta\cos\psi,$$

on en déduit la réaction normale mg et la réaction tangentielle $ma\psi'^2\sin\theta$ mesurée algébriquement sur la direction Ov_1 qui fait l'angle $\psi + \frac{\pi}{2}$ avec Ox_1 dans le plan x_1y_1.

2° Par son moment à l'origine égal et de signe contraire au moment en O de la pesanteur.

L'angle θ restant constant, le moment cinétique en O a pour composantes sur les axes $Ouvz$ (notations classiques : Ou détermine l'angle ψ, Ov lui est directement perpendiculaire dans le plan xy) :

$$0, \quad 2ma^2\psi'\sin\theta, \quad 2ma^2(\varphi' + \psi'\cos\theta)$$

et la vitesse de son extrémité, mesurée sur Ou, sera

$$2ma^2\varphi'\psi'\sin\theta$$

qui doit être égale au moment en O de la pesanteur, soit $mga\sin\theta$, mesuré algébriquement sur le même axe. On retrouve ainsi la condition

$$2\varphi'\psi' = \frac{g}{a}.$$

Si l'on ajoute la force f que nous mesurons algébriquement sur l'axe Ou, cela ajoute à l'extrémité du moment cinétique la vitesse fa portée par Ov.

D'où, puisqu'à l'instant considéré θ' est nul,

$$2ma^2\theta'' = 0,$$
$$2ma^2(\varphi'' + \psi''\cos\theta) = 0,$$
$$2ma^2\psi''\sin\theta = fa,$$

ce qui donne

$$\psi'' = \frac{f}{2ma\sin\theta}, \qquad \varphi'' = -\frac{f\cos\theta}{2ma\sin\theta}.$$

En supposant f négatif (l'angle θ étant aigu), on a $\psi'' < 0$ au moment où intervient la force horizontale supplémentaire, donc ψ' décroît, au contraire $\varphi'' > 0$ donc φ' croît. Résultats opposés pour $f > 0$.

Dans le cas où l'on remplace la force f par une percussion P les équations restent les mêmes, θ'', φ'', ψ'' étant remplacés par les accroissements des dérivées $\Delta\theta'$, $\Delta\varphi'$, $\Delta\psi'$, soit

$$\Delta\theta' = 0. \qquad \Delta\varphi' = -\frac{P\cos\theta}{2ma\sin\theta}, \qquad \Delta\psi' = \frac{P}{2ma\sin\theta}.$$

II. Nous prenons des axes fixes $O_1x_1y_1z_1$, analogues à ceux de la première partie, mais ayant pour origine O_1 centre de la rainure circulaire, λ désignera l'abscisse angulaire de la pointe dans la rainure.

Dans ces conditions les coordonnées du centre de gravité par rapport aux axes fixes sont données par les formules

$$\xi = \rho a\cos\lambda + a\sin\theta\sin\psi,$$
$$\eta = \rho a\sin\lambda - a\sin\theta\cos\psi.$$
$$\zeta = a\cos\theta;$$

d'où la vitesse de ce point déterminé par la relation :

$$v^2 = a^2[\rho^2\lambda'^2 + \theta'^2 + \psi'^2\sin^2\theta - 2\rho\lambda'\psi'\sin\theta\sin(\psi - \lambda)$$
$$- 2\rho\lambda'\theta'\cos\theta\cos(\psi - \lambda)].$$

on en déduit la force vive de la toupie

$$2T = ma^2[\theta'^2 + \psi'^2\sin^2\theta + 2(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2] + mv^2.$$

La fonction des forces étant $U = -mga\cos\theta$, les équations de Lagrange s'en déduisent et déterminent le mouvement. On peut substituer à l'une d'elles le théorème de la force vive, soit $T = U + h$, et il y a deux autres intégrales premières qui sont linéaires :

$$\varphi' + \psi' \cos\theta = \text{const.},$$
$$\frac{\partial T}{\partial \lambda'} - \frac{\partial T}{\partial \psi'} = \text{const.}$$

(cette dernière parce que T ne dépend que de $\lambda - \psi$).

Écrivons l'équation de Lagrange en θ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[2\theta' - \rho\lambda'\cos\theta\cos(\lambda - \psi)] \\ - [-2\varphi'\psi'\sin\theta + \rho\lambda'\psi'\cos\theta\sin(\psi - \lambda) \\ + \rho\lambda'\theta'\sin\theta\cos(\psi - \lambda)] = \frac{g}{a}\sin\theta.\end{aligned}$$

Cherchons s'il existe des mouvements pour lesquels l'aiguille rencontre l'axe des z en un point fixe. Il faut pour cela que l'équation précédente soit identiquement vérifiée pour $\theta = \text{const.}$, donc $\theta'' = \theta' = 0$ et $\lambda - \psi = \frac{\pi}{2}$ soit $\lambda' = \psi'$. On obtient ainsi la relation cherchée

$$2\varphi'\psi' = \frac{g}{a} - \rho a \psi'^2 \cot\theta$$

qui pour $\rho = 0$ se réduit à celle déjà obtenue (I, c). Cette dernière question peut se traiter d'une façon plus élémentaire.

L'angle θ étant constant, le point S où l'axe Oz de la toupie rencontre l'axe O_1z_1 du cercle est fixe et la position de la toupie dépend seulement des paramètres φ et ψ. Prenons les axes suivants : O_1u_1 perpendiculaire au plan des axes z_1 et faisant l'angle ψ avec O_1x_1, O_1v_1 perpendiculaire au plan $u_1O_1z_1$, le trièdre $O_1u_1v_1z_1$ étant supposé direct. Les vitesses angulaires φ' et ψ' sont constantes. On a en effet, d'une part

$$\varphi + \psi' \cos\theta = \text{const.}$$

(équation d'Euler par rapport à Oz) et, d'autre part,

$$2ma^2(\varphi' + \psi'\cos\theta)\cos\theta + A_1\psi'\sin^2\theta = \text{const.},$$

équation qui traduit le théorème du moment cinétique par rapport à Sz_1 (A_1 est le moment d'inertie par rapport à une perpendiculaire à l'axe en S).

La distance de G à l'axe Sz_1 étant $\rho a - a\sin\theta$, son accélération est portée par une parallèle à O_1v_1 et a pour projection sur O_1v_1,

$$-(\rho a - a\sin\theta)\psi'^2.$$

On en déduit les composantes de la réaction en O (théorème du mouvement du centre de gravité) sur les axes $O_1u_1v_1z_1$:

$$0, \quad -m\psi'^2(\rho a - a\sin\theta), \quad mg.$$

Le moment cinétique en G a pour composantes sur Ov_1

$$ma^2\psi'\sin\theta\cos\theta - 2ma^2(\varphi' - \psi'\cos\theta)\sin\theta;$$

sa vitesse (dans le mouvement autour de G) mesurée sur O_1u_1 est

$$2ma^2(\varphi' + \psi'\cos\theta)\psi'\sin\theta - ma^2\psi'\sin\theta\cos\theta,$$

et le moment des forces étant :

$$mga\sin\theta - m\psi'^2(\rho a - a\sin\theta)a\cos\theta,$$

on en déduit la relation entre θ et $\varphi'\psi'$

$$2\varphi'\psi'\sin\theta = \frac{g}{a}\sin\theta - \rho a\psi'^2\cos\theta$$

ou encore

$$2\varphi'\psi' = \frac{g}{a} - \rho a\psi'^2\cot\theta.$$