J. Lemaire

Sur quelques propriétés de l'hyperbole équilatère et leurs conséquences

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 65-78
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__65_0>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DE L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE ET LEURS CONSÉQUENCES;

PAR J. LEMAIRE.

1. Il s'agit des propriétés suivantes :

I. *La figure inverse d'une hyperbole équilatère* (H) *par rapport à son centre est une lemniscate de Bernoulli.* Prenons par exemple a^2 pour module d'inversion, en appelant a le demi-axe transverse; F, F', M désignant les foyers et un point quelconque de l'hyperbole, f, f', m leurs points inverses, nous avons

$$mf = \frac{\text{MF}.\text{O}f}{\text{OM}}; \qquad mf' = \frac{\text{MF}'.\text{O}f'}{\text{OM}};$$

comme

$$\text{MF}.\text{MF}' = \overline{\text{OM}}^2,$$

on en conclut

$$mf.mf' = \overline{\text{O}f}^2,$$

ce qui démontre le théorème.

Toutes les lemniscates sont des courbes semblables susceptibles de ce mode de génération.

B et C étant les traces de la tangente en M à (H) sur ses asymptotes, K la projection de O sur cette tangente, OK est symétrique de OM par rapport à l'axe focal et coupe l'hyperbole au point M' symétrique de M, et l'on a

$$\text{OK}.\text{OM}' = \text{OK}.\text{OM} = \frac{\text{OK}.\text{BC}}{2} = \frac{\text{OB}.\text{OC}}{2} = a^2.$$

le lieu de K est donc la lemniscate précédente : *la podaire d'une hyperbole équilatère par rapport à son centre est la lemniscate qui a les mêmes sommets, réels et imaginaires, que l'hyperbole.*

II. *Par un point* A *d'une hyperbole équilatère* (H) *et par son centre* O, *on peut faire passer quatre cercles tangents à cette courbe, et les points de contact sont sur le cercle ayant* *pour centre le point* A′ *diamétralement opposé à* A *sur l'hyperbole et passant par son centre.*

Nous savons que si quatre points d'une hyperbole équilatère appartiennent à un cercle, le point de l'hyperbole diamétralement opposé à l'un d'eux est l'orthocentre du triangle des trois autres. Si donc M est le point de contact d'un cercle passant par O et A, et tangent à l'hyperbole, le point M′ de (H) diamétralement opposé à M est l'orthocentre du triangle MAB, B étant le troisième point commun aux deux courbes, et si K est le point de rencontre des droites AB et MM′, on peut écrire

$$\overline{KO}.\overline{KM} = \overline{KA}.\overline{KB} = -\overline{KM}.\overline{KM'},$$

d'où

$$\overline{KO} = -\overline{KM'};$$

K est le milieu de OM′, A est équidistant de O et de M′; par suite A′ est équidistant de O et de M, ce qui démontre la proposition.

2. Transformant par une inversion de pôle O et de module a^2 la propriété précédente de l'hyperbole équilatère, nous obtenons ce théorème : *d'un point* A *d'une lemniscate on peut mener quatre tangentes à cette courbe, et les points de contact sont sur la perpendiculaire* Δ *à* OA′ *en son milieu,* A′ *étant le point diamétralement opposé à* A. La lemniscate est donc de la sixième classe. La perpendiculaire en A′ à OA′ enveloppant l'hyperbole équilatère (H) de mêmes sommets que la lemniscate, *l'enveloppe de* Δ *est l'hyperbole homothétique de* (H), *dans le rapport* $\frac{1}{2}$, *avec* O *pour centre d'homothétie.*

Si l'on revient à la figure primitive, on peut dire que *l'enveloppe d'un cercle passant en* O, *dont le centre décrit* (H), *est la lemniscate homothétique, dans le rapport* 2, *avec* O *pour centre d'homothétie, de la lemniscate dont les sommets sont ceux de l'hyperbole.*

Il est d'ailleurs aisé d'obtenir directement ce résultat en remarquant que le cercle touche son enveloppe au point symétrique de O par rapport à la tangente menée à l'hyperbole au centre du cercle.

3. Démontrons quelques propriétés de la lemniscate qui nous seront utiles plus loin : il existe deux cercles réels passant par le centre O de l'hyperbole (H), ayant leurs centres sur l'axe non transverse, et bitangents à cette courbe; à ces cercles correspondent *deux tangentes doubles réelles* de la lemniscate. De même, il existe deux cercles imaginaires bitangents à l'hyperbole, passant par son centre, et ayant leurs centres sur l'axe transverse, et à ces cercles correspondent *deux tangentes doubles imaginaires* pour la lemniscate.

La plupart des propriétés de la lemniscate peuvent être déduites de celles de l'hyperbole équilatère. Prouvons par exemple que le centre de *la lemniscate et les points cycliques sont des points doubles à tangentes inflexionnelles.*

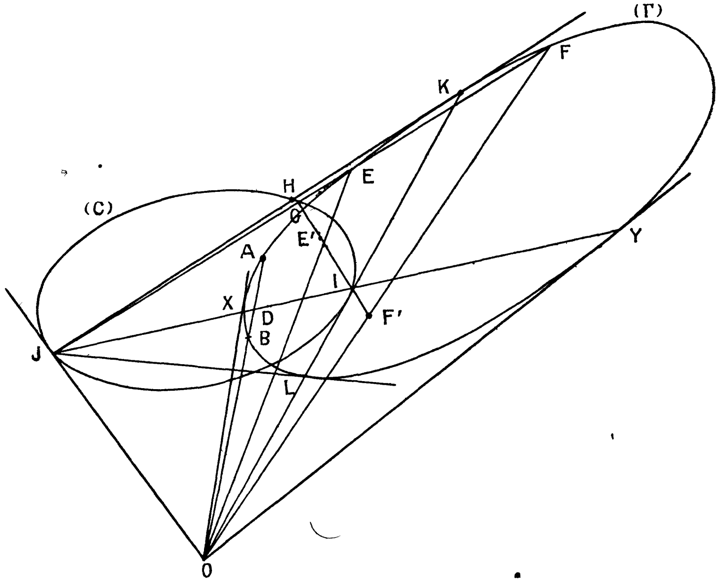
Pour le centre, cela résulte immédiatement de la génération de la lemniscate comme transformée par inversion de l'hyperbole; pour établir la propriété pour les points cycliques, remplaçons la transformation par inversion par la transformation plus générale suivante, dite de *Hirst :* Étant donnés une conique (C) et un point fixe O, dont la polaire coupe la conique en I et J, à un point quelconque M on fait correspondre le point M′ de la droite OM qui est conjugué de M par rapport à la conique fondamentale (C); il y a réciprocité entre les points M et M′.

Cherchons la figure obtenue en appliquant ce mode de transformation à une conique (Γ) pour laquelle le triangle OIJ est conjugué, de sorte que les tangentes à cette conique issues de O ont leurs points de contact X et Y sur la droite IJ et conjugués harmoniques par rapport à I et J, et que les tangentes issues de J ont leurs points de contact K et L sur OI. A chacun des points communs à la droite IJ et à la conique (Γ) correspond, pour la courbe transformée (Γ′), le point O qui est ainsi un point double de cette courbe; toute droite passant par O coupe (Γ) en deux points, auxquels correspondent deux points de (Γ′) qui est par suite une courbe du quatrième ordre.

Considérons une droite passant par O, très voisine de OX, et coupant (Γ) et IJ en A, B et D; au point D correspond dans la figure transformée le point O, et aux points A et B situés de part et d'autre de D correspondent deux points A′ et B′ situés de part et d'autre de O; si donc la droite OAB vient coïncider avec la tangente OX à (Γ), on voit que cette tangente est pour (Γ') une tangente d'inflexion en O; de même OY.

Soit maintenant une droite, très voisine de la tangente JK à (Γ), et coupant cette conique en E et F, et la conique fondamentale en G; la transformée de cette droite est IG, de sorte que

Fig. 1



les points E′ et F′ correspondant à E et F sont en ligne droite avec I; si donc la droite JEF vient se confondre avec JK, qui coupe (C) en H, sa transformée IE′F′ tend vers IH, qui est par conséquent une tangente inflexionnelle en I pour la transformée (Γ') de (Γ). A la seconde tangente menée de J à (Γ) correspond de même une seconde tangente inflexionnelle en I. Le point J est, lui aussi, un point double à tangentes inflexionnelles. Il suffit de supposer que (C) est un cercle de centre O, et par suite (Γ) une hyperbole équilatère de même centre, pour voir que la lemniscate a bien les points cycliques pour points doubles à tangentes inflexionnelles.

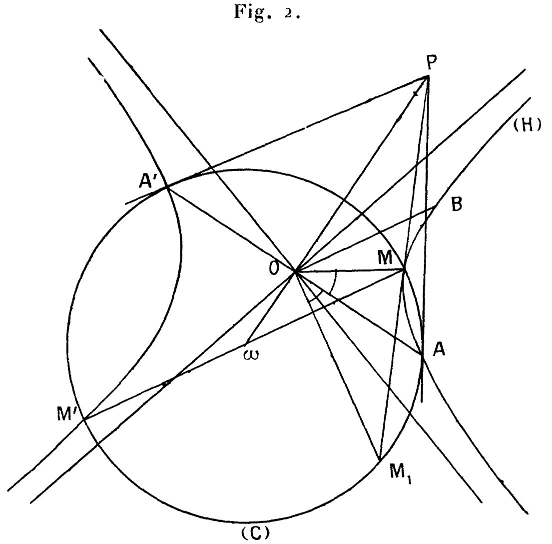
4. Voici encore une propriété de l'hyperbole équilatère qui nous sera utile : par deux points A et A′ diamétralement opposés

d'une telle hyperbole (H) faisons passer un cercle (C), lés deux autres points M et M′ communs aux deux courbes sont diamétralement opposés sur (C); O et ω désignant les centres de l'hyperbole et du cercle, on a pour le pôle de AA′ par rapport au cercle le point P de la droite Oω déterminé par la relation

$$\overline{OP}.\overline{O\omega} = -\overline{OA}^2;$$

OB, demi-diamètre de (H) parallèle à MM′, est symétrique de OA

Fig. 2.



par rapport à un axe de cette conique; Oω étant conjugué de MM′ par rapport à l'hyperbole, le pôle de MM′ par rapport à cette courbe est le point Q de Oω determiné par la relation

$$\overline{OQ}.\overline{O\omega} = -\overline{OB}^2 = -\overline{OA}^2;$$

par suite P et Q coincident : *le pôle de* AA′ *par rapport au cercle et le pôle de* MM′ *par rapport à l'hyperbole sont confondus.* Si donc la tangente PM à (H) coupe le cercle en M_1, les points M et M_1, A et A′, sont les sommets d'un quadrilatère harmonique; donc OM et OM_1 sont symétriques par rapport à AA′, et l'on a

$$OM.OM_1 = \overline{OA}^2;$$

on peut dire que : *si par deux points* A *et* A′ *diamétralement opposés d'une hyperbole équilatère et par un autre point arbitraire* M *de cette courbe, on fait passer un cercle qui coupe en* M_1 *la tangente en* M *à l'hyperbole*, $AMA'M_1$ *est un quadrilatère harmonique*, OM *et* OM_1 *sont symetriques par rapport à* OA, *et* $OM . OM_1 = \overline{OA}^2$.

Soit N le point de OM tel que $OM . ON = \overline{OA}^2$; si, A et A′ restant fixes, M décrit (H), le lieu de N est une lemniscate ayant les mêmes axes que (H) et passant par A ; le lieu de M_1 est la lemniscate symétrique de la précédente par rapport à OA, laquelle touche l'hyperbole en A et A′ et a pour tangentes en O les droites symetriques, par rapport à OA, des asymptotes de (H) ; nous verrons plus loin que cette lemniscate a aussi avec (H) un double contact imaginaire sur le diamètre perpendiculaire a AA′.

5. Dans un faisceau ponctuel de coniques déterminé par deux couples de points A et A′, B et B′, chaque conique est déterminée par la valeur du rapport anharmonique (P, AA′BB′), en désignant par P un point quelconque de cette conique ; nous appellerons *conique harmonique du faisceau* la conique pour laquelle ce rapport est harmonique, autrement dit pour laquelle chacune des droites AA′ et BB′ a son pôle sur l'autre.

De même dans un faisceau tangentiel de coniques déterminé par deux couples de tangentes (A) et (A′), (B) et (B′), chaque conique est déterminée par la valeur du rapport anharmonique $(aa'bb')$, a et a', b et b' désignant les traces des droites données sur une tangente quelconque de cette conique ; nous appellerons *conique harmonique du faisceau* la conique pour laquelle ce rapport est harmonique ; pour cette conique le point commun aux droites (A) et (A′) et le point commun aux droites (B) et (B′) sont conjugués.

Dans un faisceau ponctuel de cercles, dont A et A′ sont les points communs, la conique harmonique est le cercle de diamètre AA′.

Dans un faisceau tangentiel de coniques homofocales, la conique harmonique est l'hyperbole équilatère du faisceau.

Étant donnés deux points réels A et A′, les droites isotropes AI et AJ issues de l'un coupent les droites isotropes A′J et A′I issues de l'autre en deux points imaginaires conjugués B et B′ qui forment avec les deux premiers deux groupes de *points associés* (Darboux) : les points communs aux cercles d'un faisceau et les cercles de rayon nul de ce faisceau forment deux couples de points associés; de même les foyers d'une conique à centre; de même encore les extrémités de deux diamètres rectangulaires, et en particulier les sommets, d'une hyperbole équilatère, d'une lemniscate.

Toute conique passant par quatre points qui forment deux couples de points associés est conjuguée par rapport aux points cycliques, est par suite une hyperbole équilatère; les quatre points sont les extrémités de deux diamètres rectangulaires. Chacun d'eux peut d'ailleurs être considéré comme l'orthocentre du triangle des trois autres.

La conique harmonique du faisceau déterminé par deux couples de points associés est l'hyperbole équilatère qui a ces points pour sommets.

6. Appelons A et A′, B et B′ les sommets d'une hyperbole équilatère (H) et de la lemniscate (L), podaire de (H) par rapport à son centre O, et soit (T) la tangente en un point M de l'hyperbole, de sorte que (L) passe par la projection K de O sur cette droite; OM et OK étant symétriques par rapport aux axes, K et M sont conjugués par rapport à AA′ et BB′, d'où il suit, d'après le théorème de Desargues, que K est le point où (T) est touchée par la conique (H′), autre que (H), qui lui est tangente parmi les coniques du faisceau déterminé par les points A et A′, B et B′, coniques qui sont les hyperboles équilatères ayant A et A′ pour points diamétralement opposés. Comme O est le centre de cette conique (H′), K en est un sommet, et l'on a ce théorème : *la lemniscate* (L) *est le lieu des sommets des hyperboles équilatères qui admettent* A *et* A′ *comme points diamétralement opposés.*

En transformant homographiquement ce résultat, on peut dire que : *Étant donnés quatre points* A *et* A′, B *et* B′, *et la conique harmonique du faisceau déterminé par ces points, si une tangente* (T) *roule sur cette conique* (H), *la seconde conique* (H′)

du faisceau qui touche (T) *la touche en un point* K *dont le lieu est une courbe* (L) *du quatrième ordre, de la sixième classe, tangente à* (H) *aux quatre points donnés, et ayant pour points doubles à tangentes inflexionnelles les points* (AA′, BB′), (AB, A′B′), (AB′, A′B); *les tangentes au premier de ces points sont les tangentes issues de ce même point à la conique harmonique;* (L) *possède deux couples de tangentes doubles.*

On peut encore dire que (L) est le lieu des points de contact K, avec une conique variable du faisceau, des tangentes communes à cette conique et à la conique harmonique.

O étant le point commun aux droites AA′ et BB′, OK et la tangente KT à la conique qui passe en K sont conjuguées par rapport aux points I(AB, A′B′) et J(AB′, A′B), et l'on peut dire : *Il existe sur chaque conique du faisceau quatre points* K *tels que* OK *et la tangente* KT *à cette conique sont conjuguées par rapport à* I *et* J, *et l'enveloppe de* KT *est la conique harmonique du faisceau.*

On verra facilement ce que deviennent ces propositions si A et A′ sont deux points réels, et les deux autres B et B′ les points cycliques du plan; on a alors affaire à un faisceau de cercles passant par A et A′, et la conique harmonique est le cercle de diamètre AA′.

7. Une transformation corrélative nous donne le théorème suivant : *Étant données quatre droites* (A) *et* (A′), (B) et (B′), *et la conique harmonique* (H) *du faisceau tangentiel qu'elles déterminent, si un point* T *décrit cette conique, la tangente en ce point à la seconde conique* (H′) *du faisceau qui y passe enveloppe une courbe* (L) *du sixième ordre, de la quatrième classe, tangente à* (H) *aux points où les droites données touchent cette conique; cette courbe possède quatre points doubles et six points de rebroussement appartenant deux à deux aux trois diagonales du quadrilatère formé par les quatre droites; ceux de ces points de rebroussement qui sont situés sur la troisième diagonale, celle qui joint les points* (A)(A′) *et* (B)(B′), *sont les points communs à cette droite et à la conique harmonique.*

On peut encore dire que (L) est l'enveloppe de la tangente, en chaque point de la conique harmonique, à l'autre conique du faisceau tangentiel qui passe en ce point.

(O) étant la troisième diagonale du quadrilatère, (K) la tangente à la conique (H′) au point T de la conique harmonique, le point commun aux droites (O) et (K) et le point T sont conjugués par rapport aux deux premières diagonales, et l'on peut dire : *Chaque conique du faisceau tangentiel admet quatre tangentes* (K) *dont le point de contact et le point de rencontre avec la troisième diagonale sont conjugués par rapport aux deux premières diagonales, c'est-à-dire celles qui joignent d'une part les points* (A)(B) *et* (A′)(B′), *et d'autre part les points* (A)(B′) *et* (A′)(B). *Le lieu du point de contact d'une tangente* (K) *avec la conique correspondante est la conique harmonique du faisceau.*

8. Dans le cas où les points (A)(A′) et (B)(B′) sont les points cycliques I et J du plan, le faisceau tangentiel est l'ensemble des coniques homofocales admettant pour foyers les points F(A)(B), F′(A′)(B′), Φ(A)(B′), Φ′(A′)(B) et les théorèmes ci-dessus prennent la forme suivante :

Si un point décrit une hyperbole équilatère, la tangente en ce point à la conique homofocale qui y passe enveloppe une courbe du sixième ordre et de la quatrième classe tangente à l'hyperbole aux points où elle est coupée par ses quatre directrices (points de contact des tangentes issues des points cycliques); *cette courbe*, qui n'est autre que la *développée de l'hyperbole*, *possède quatre points doubles et six points de rebroussement : deux de ces points de rebroussement sont réels, sur l'axe focal, avec cet axe pour tangente commune; deux autres, imaginaires, sont de même sur l'autre axe; et les deux derniers sont les points à l'infini de l'hyperbole, avec la droite de l'infini pour tangente.*

Chaque conique d'un faisceau de coniques homofocales *possède quatre tangentes dont le point de contact est le milieu du segment déterminé sur chacune d'elles par les axes, et le lieu de ces points de contact est l'hyperbole équilatère du faisceau.*

9. Considérons une hyperbole équilatère (H) ayant deux points donnés A et A′ diamétralement opposés, passant par suite par les points associés B et B′; M étant un point quelconque de (H), (T) la tangente en ce point, M_1 le point de cette tangente tel que OA soit une bissectrice de $\widehat{MOM_1}$, O désignant le centre de (H), les points M et M_1 sont conjugués par rapport aux droites AA′ et BB′; par conséquent, M_1 est le point de contact avec (T) de la conique du faisceau autre que (H) qui touche cette droite : nous avons vu que le lieu de M_1, quand M parcourt (H), est une lemniscate tangente à (H) en A et A′(4).

Une transformation homographique nous donne le théorème suivant :

Le lieu des points de contact d'une conique variable d'un faisceau ponctuel avec les tangentes communes à cette conique et à une conique fixe (H) *du même faisceau est une courbe* (L) *du quatrième degré, de la sixième classe; si* A *et* A′, B *et* B′ *sont les points communs aux coniques,* (L), *tangente à* (H) *en* A *et* A′, *l'est aussi en* B *et* B′, *d'où il résulte,* en remontant au théorème initial, que *la lemniscate a, outre le double contact réel avec l'hyperbole équilatère, un double contact imaginaire* (4).

Revenant au cas général, nous pouvons dire que (L) possède quatre tangentes doubles, trois points doubles à tangentes inflexionnelles, etc.

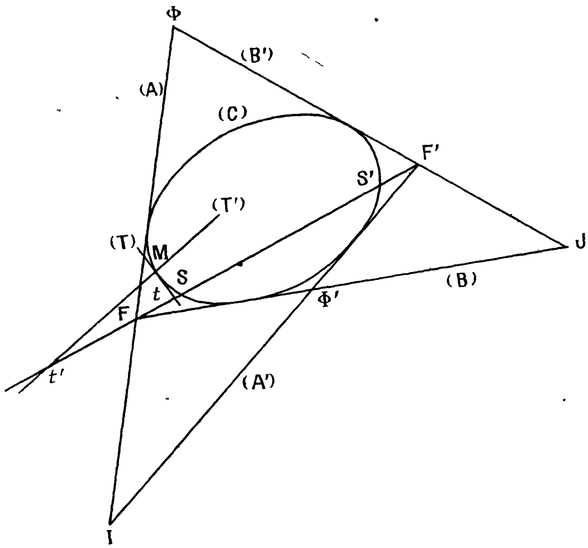
Par corrélation nous en déduisons que : *l'enveloppe des tangentes à une conique variable d'un faisceau tangentiel, aux points communs à cette conique et à une conique fixe* (H) *du même faisceau, est une courbe de la quatrième classe, et du sixième degré, tangente à* (H) *aux mêmes points que les quatre tangentes fixes qui déterminent le faisceau; cette courbe admet quatre points doubles, trois tangentes doubles à contacts de rebroussement.*

La méthode qni nous a conduit à ce théorème nous donnerait les positions de ces points remarquables; indiquons un moyen simple d'obtenir les points de rebroussement :

Employant toujours les mêmes notations, appelons (A) et (A′),

(B) et (B′) les tangentes fondamentales du faisceau de coniques, (C) la conique fixe, M un point de cette courbe, (T) la tangente en ce point à (C), (T′) la tangente à la seconde conique du faisceau

Fig. 3.



qui passe en M; appelons encore F et F′ les points (A)(B) et (A′)(B′), Φ et Φ′ les points (A)(B′) et (A′)(B), I et J les points (A)(A′) et (B)(B), S et S′ les points communs à (C) et à la droite FF′; les traces t et t' de (T) et (T′) sur FF′ sont conjuguées par rapport à F et F′; supposons que M tende vers S sur la conique (C), t tend vers S et la position limite de t' est l'un des points de rebroussement R qui se trouvent sur FF′ : ces points de rebroussement sont, comme on voit, les points conjugués harmoniques de S et S′ par rapport à F et F′; les deux autres couples de points de rebroussement ont des positions analogues sur les droites ΦΦ′ et IJ.

10. Si les points I et J considérés ci-dessus deviennent les points cycliques du plan, les coniques forment un système homofocal de foyers F et F′, Φ et Φ′, les droites (T) et (T′), conjuguées par rapport à I et J, sont rectangulaires, (T′) est la normale à (C) en M, et quand ce point parcourt cette conique, (T′) enveloppe

la développée de la conique. On trouve ainsi, pour la développée d'une conique à centre, *une courbe de quatrième classe et du sixième degré, qui est tangente à la conique aux quatre points où celle-ci est coupée par ses quatre directrices* (points de contact des tangentes issues des points cycliques); cette développée admet, outre *quatre points doubles, six points de rebroussement, deux sur chaque axe avec cet axe pour tangente, deux sur la droite de l'infini avec cette droite pour tangente;* si S et S′ sont les sommets situés sur FF′, les points de rebroussement appartenant à cet axe sont conjugués harmoniques de ces sommets par rapport aux foyers; de même pour ΦΦ′; les points de rebroussement à l'infini sont conjugués harmoniques des points à l'infini de la conique par rapport aux points cycliques, de sorte que les directions asymptotiques de la développée sont perpendiculaires à celles de la conique.

11. Reprenons la propriété de la lemniscate obtenue au début (2) : par une transformation homographique suivie d'une transformation corrélative, nous avons vu comment on peut rattacher à la lemniscate la développée d'une conique à centre. De la proposition rappelée ci-dessus, on peut donc déduire la suivante due à Laguerre (*Œuvres*, t. II, p. 471) : *Si l'on considère une tangente quelconque à la développée d'une conique à centre, et les quatre points où cette tangente coupe la courbe, les tangentes menées en ces points passent par un même point* Δ.

Cherchons le lieu de ce point : appelons O le centre de la lemniscate, A et A′ deux points diamétralement opposés, E le point de AA′ situé sur la droite de l'infini (D), P le milieu de OA′, (Δ) la perpendiculaire à OA′ en son milieu; les points de contact des tangentes à la lemniscate issues de A sont sur (Δ) et l'enveloppe de cette droite (Δ) est l'hyperbole équilatère (H) qui a pour sommets les milieux de OS et OS′, en appelant S et S′ les sommets réels de la lemniscate.

Les deux transformations, homographique, puis corrélative, qui permettent de passer de la lemniscate à la développée d'une conique à centre, ellipse par exemple, conduisent aux résultats suivants : D étant le centre de l'ellipse, (A′) une tangente à la développée, la parallèle (E) menée à (A′) par D et la parallèle menée par le point qui nous occupe, point Δ correspondant à la droite (Δ), forment avec (A′) et la droite de l'infini un faisceau harmonique; autrement dit ce point Δ se trouve sur la droite (P) homothétique de (A′), dans le rapport 2, avec D pour centre d'homothétie. Comme d'autre part (Δ) et OA′ sont rectangulaires, c'est-à-dire conjugués par rapport aux points cycliques, auxquels points correspondent les axes de l'ellipse, le point Δ et le point à l'infini sur (P) sont conjugués par rapport aux traces de (P) sur les axes, autrement dit Δ est le point dont les projections sur les axes de l'ellipse coïncident avec les traces de (A′) sur ces mêmes axes.

Le lieu du point Δ, courbe transformée par homographie, puis par corrélation, de l'hyperbole équilatère (H), est donc une conique qui coïncide avec le lieu du quatrième sommet du rectangle dont deux côtés appartiennent aux axes et une diagonale à une normale variable de l'ellipse.

Il est manifeste que cette conique est une ellipse, qui passe aux points de rebroussement de la développée; ses points à l'infini sont les points de rebroussement à l'infini de la développée. Cela pouvait se conclure du fait que l'hyperbole équilatère (H) est tangente aux tangentes à la lemniscate en son centre, et par suite aux six tangentes inflexionnelles à la lemniscate en ses trois points doubles. Observons que l'ellipse ainsi obtenue et la première, ayant des directions asymptotiques respectivement perpendiculaires, sont semblables, les axes de chacune étant perpendiculaires aux axes homologues de l'autre.

Au point A de la lemniscate, diamétralement opposé à A′, où concourent les quatre tangentes dont les points de contact sont sur la droite Δ, point conjugué harmonique de A′ par rapport à O et à E(∞), correspond, dans la figure corrélative, la droite (A) conjuguée de la droite (A′) par rapport à la droite (E) et à la droite de l'infini, c'est-à-dire la droite symétrique de (A′) par rapport aux centre (D) de l'ellipse.

Le point Δ, dont les projections sur les axes de l'ellipse déterminent la droite (A′), symétrique de (A) par rapport au centre de cette courbe, a été appelé par Laguerre le *centre de la droite* (A). Finalement donc, le théorème énoncé plus haut peut être complété comme il suit : *Une normale* (A) *à une ellipse coupe la déve-*

loppée en quatre points pour lesquels les tangentes concourent au centre de cette normale relativement aux axes de l'ellipse; le lieu de ce point commun est l'ellipse qui a pour sommets les points de rebroussement de la développée.