Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 57-62

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__57_1>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Équation linéaire différentielle du premier ordre : 1° intégration; 2° connaissant deux intégrales particulières, écrire la solution générale; interprétation géométrique; 3° intégrer, comme exemple :* $(x^2-x)y'-(2x-1)y+x^2=0$.

II. O*n donne la parabole* $y^2=4x$ *et le point* $P(\lambda, 0)$. *De* P *on abaisse les perpendiculaires sur les diverses tangentes à la parabole.*

1° *Lieu* Γ *du pied de ces perpendiculaires. Asymptote et point double de* Γ. *Construire* Γ *pour* $\lambda=0$ *et* $\lambda=-1$.

2° *Enveloppe des* Γ *quand* λ *varie. Étudier la réalité des points de contact de* Γ *avec son enveloppe.*

3° *De* O, *on mène les tangentes aux* Γ. *Déterminer les coordonnées du point de contact; construire le lieu de ces points.*

---

(1) L'auteur de la question n'ignore pas que la propriété ici énoncée est connue en ce qui concerne les triangles formés dans (ABC) par AA', mais il a estimé qu'il convenait de ne pas la séparer de celle qui regarde les triangles formés par (BB_0) et (CC_0).

ÉPREUVE PRATIQUE. — C.85. — *Calculer les longueurs des pendules simples synchrones des pendules composés suivants, constitués de ligne, aires et volume homogène, les axes de rotation étant horizontaux.*

1° *La courbe plane* $x = \frac{t^2}{2}$, $y = \frac{t^3}{6} - \frac{t}{2}$ *limitée aux valeurs de* t *comprises entre* o *et* $+\sqrt{3}$; *l'axe de rotation est* Ox.

2° *L'aire comprise entre la parabole* $y^2 = 2x$ *et la corde focale perpendiculaire à l'axe; l'axe de rotation étant cette corde.*

3° *La surface latérale d'un cône droit de révolution de hauteur* h, *demi-angle au sommet* α; *l'axe de rotation étant une génératrice.*

4° *Le volume du tétraèdre trirectangle* OABC, *où* $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$; *l'axe de rotation étant* OC.

(Bordeaux, novembre 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. — *On considère la surface* (S) *représentée par* $z\sqrt{x^2+y^2} = xy$ *et le cylindre* (C) *d'équation*

$$x^2+y^2-2ax = 0 \qquad (a > 0).$$

1° *Indiquer la nature et ensuite la disposition de* (S).

2° *Trouver les courbes tracées sur* (S) *qui coupent à angle droit les sections de* (S) *par des plans variables* $z = h$. *Construire leurs projections sur* xOy.

3° *Aire de la portion de* (C) *située au-dessus de* $z = 0$, *limitée par* $z = 0$, $y = 0$ *et* (S).

4° *Volume intérieur à* (C) *situé au-dessus de* $z = 0$, *limité par* $z = 0$, $y = 0$ *et* (S).

5° *Trouver et construire la projection sur le plan* yOz *de l'intersection de* (S) *et de* (C).

6° *Aire de l'une des boucles de cette courbe.*

II. *Étudier la variation de la fonction*

$$y = \mathrm{L}\frac{1+x^2}{x^2} - 3x \operatorname{arc\,tang} x.$$

Asymptotes de la courbe représentative.

(*On cherchera si l'équation* $y' = 0$ *admet des racines. On suppose*

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tang} x < \frac{\pi}{2},$$

$\mathrm{L}u$ = *logarithme népérien.*)

INDICATION SUR LA SOLUTION. — I. 1° Cône dont on construit aisément la section par $z = h$.

2° On a pour les sections $z = h$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2},$$

d'où

$$\frac{dx}{x^3} + \frac{dy}{y^3} = 0,$$

et les trajectoires orthogonales sont

$$y^4 - x^4 = \text{const.} = \pm c^4, \qquad \rho^4 \cos 2\theta = \pm c^4.$$

3° ρ, θ, z étant les coordonnees semi-polaires d'un point de l'intersection de (S) et (C), on a

$$\rho = 2a\cos\theta, \qquad ds = 2a\,d\theta, \qquad z = 2a\cos^2\theta\sin\theta,$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} z\,ds = \frac{4a^2}{3}.$$

4° V étant le volume demandé et Γ le demi-cercle de la base du cylindre situé du côté des y positifs, on a

$$V = \int\int_\Gamma z\,dx\,dy = \int\int_\Gamma \rho^2 \sin\theta\cos\theta\,d\rho\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \rho^2\,d\rho = \frac{8a^3}{15}.$$

5° La courbe cherchée a pour équation

$$y^6 + 4a^2z^2(z^2 - y^2) = 0$$

ou, en coordonnées polaires,

$$\rho^2\cos^6\omega = 4a^2\sin^2\omega(\cos^2\omega - \sin^2\omega).$$

La courbe se déduit par deux symétries de la boucle obtenue en faisant varier ω de o à $\frac{\pi}{4}$.

6° $S = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\omega}{\cos^6\omega}(\cos^2\omega - \sin^2\omega)\,d\omega = \frac{4a^2}{15}$ (en posant $\tang\omega = t$).

I. $y' = -\left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{2}{x} + 3\,\text{arc tang}\,x\right), \qquad y'' = \frac{2}{x^2(1+x^2)^2}\right);$

la courbe représentative admet Oy pour axe de symétrie.

Les asymptotes sont

$$x = 0 \qquad \text{et} \qquad y \pm \frac{3\pi x}{2} = 3.$$

Epreuve pratique. — I. *x étant exprimé en radians, montrer que l'équation*

$$2x - \sin 2x - 3\cos x = 0$$

n'a qu'une racine. Calculer cette racine.

II. Mécanique. — *Un point* M *de masse* m *mobile dans un plan vertical est soumis à l'action de son poids et à une force constante* $\lambda\, mg$ *dirigée de* M *vers un point fixe* O. 1° *Montrer que la résultante de ces forces dérive d'une fonction de forces, indiquer la nature des courbes de niveau.* 2° *Trouver les lignes de force ainsi que leur forme générale.* 3° *On suppose* M *mobile sans frottement sur un cercle de diamètre* OA ; OA $= 2\,a$ *est vertical et situé au-dessous de* O. *Positions d'équilibre du point. Stabilité de l'équilibre.* 4° *Équation différentielle du premier ordre donnant le mouvement du point sur le cercle.* 5° *Montrer comment on peut intégrer cette équation, si l'on suppose que le point possède en* A *une vitesse* v_0 *donnée par* $v_0^2 = ag(\lambda - 2)^2$.

On prendra Ox *vertical dirigé vers le bas. Si l'on détermine la position de* M *par un angle, on prendra* $\widehat{xOM} = \theta$.

Indications sur la solution. — I. On trouve $x = 62°40'$.

II. On pose $\widehat{xOM} = \theta$, $OM = \rho$.

1° $$d\mathfrak{T} = -\,mg(\lambda\, d\rho - dx),$$

la fonction des forces est $-\,mg(\lambda\rho - x)$ et les courbes de niveau

$$\lambda\rho = x + b$$

(avec $\rho > 0$) sont des coniques de foyer O dont la directrice $x + b = 0$ est au-dessus de M. Dans le cas d'hyperboles ($\lambda < 1$), la branche inférieure convient donc seule.

2° Les lignes de forces sont données par

$$\frac{dx}{\lambda x - \rho} = \frac{dy}{\lambda y};$$

d'où

$$\rho = c\,\frac{\left(\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^{\lambda-1}}{\left(\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^{\lambda+1}};$$

elles ont trois formes différentes suivant que $\lambda > 1$, $= 1$, < 1.

3° Équilibre :

$$\frac{d\mathfrak{T}}{d\theta} = -\,2mg\,a \sin\theta(2\cos\theta - \lambda).$$

a. $\lambda > 2$, pour $\theta = 0$, équilibre instable;

b. $\lambda < 2$, pour $\theta = 0$, équilibre stable; pour $\theta = \alpha \left(\cos\alpha = \dfrac{\lambda}{2}\right)$, équilibre instable.

4° $$v^2 = 4ga(\cos^2\theta - \lambda\cos\theta) + h,$$

d'où

$$a\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = g(\cos^2\theta - \lambda\cos\theta) + h.$$

5° Pour $v_0^2 = ag(\lambda - 2)^2$, on a

$$v^2 = ga(2\cos\theta - \lambda)^2,$$

$$\frac{2\,d\theta}{2\cos\theta - \lambda} = \varepsilon\sqrt{\frac{g}{a}}\,dt \qquad [\text{avec } \varepsilon(2-\lambda) > 0,\ \varepsilon = \pm 1].$$

On intègre facilement en posant $\tan g\,\frac{\theta}{2} = u$.

(Lyon, juillet 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *Construire les courbes représentées par l'équation*

$$(1) \qquad y^2 = \frac{x^3 - a^3}{3x},$$

a étant une constante. Asymptotes. Lieu des points de ces courbes où la tangente est parallèle aux axes. 2° *Trouver les trajectoires orthogonales des courbes* (1) *et traiter pour ces trajectoires les questions posées dans* 1° *pour les courbes* (1).

II. 1° *Nature et forme de la surface représentée par l'équation* $z = \frac{\sqrt{2}}{3}(x+y)^{\frac{3}{2}}$. 2° *Volume compris entre cette surface, les plans* $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$. 3° *Aire de la portion de cette surface qui se projette sur le plan* xOy *à l'intérieur du triangle dont les côtés sont* $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° Construction immédiate en considérant y comme fonction de x ou en passant en coordonnées polaires.

2° Les trajectoires orthogonales sont

$$y(y^2 - 3x^2) = c^3 \qquad \text{ou} \qquad \rho^3 \sin 3\theta = -c^3$$

et se déduisent des courbes (1) par une symétrie d'axe $y = x$.

II. 1° La surface est un cylindre dont la section droite a pour équation dans son plan

$$z^2 = \frac{4}{9}\sqrt{2}\,x^3.$$

$$2^\circ \qquad V = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^3 dy \int_0^{3-y} (x+y)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{18\sqrt{6}}{7}.$$

$$3^\circ \qquad S = \int_0^3 dy \int_0^{3-y} \sqrt{1+x+y}\,dx = \frac{116}{15}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. 1° *Intégrer l'équation*

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\sin x.$$

2° *Indiquer la forme dans le voisinage du point* O *de la courbe intégrale tangente en ce point à* Ox.

II. *Un point* M *de masse égale à l'unité situé dans le plan* xOy *et dont on désigne les coordonnées par* x *et* y *est soumis à l'action d'une force dont les projections sur les axes sont*

$$X = y^2 - x^2, \qquad Y = 2xy.$$

1° *Calculer le travail de cette force lorsque le point passe d'une position* M_0 *de coordonnées* x_0, y_0 *à une position* M_1 *de coordonnées* x_1, y_1.

2° *Le point* M *est mobile sans frottement sur la droite d'équation*

$$y\sqrt{3} = x - 4.$$

Y a-t-il une position d'équilibre stable ? Déterminer le mouvement du point, en supposant qu'on le lance avec une vitesse v_0 *du point* A *de la droite qui est sur* Oy. *Trouver les valeurs de* v_0 *pour que dans ce mouvement le point* M *reste toujours au-dessous de* Ox.

(Lyon, 6 novembre 1926.)