

J. MARCHAND

## Sur un théorème de Steiner

*Nouvelles annales de mathématiques 6<sup>e</sup> série*, tome 2  
(1927), p. 320-325

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1927\\_6\\_2\\_\\_320\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__320_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## SUR UN THÉORÈME DE STEINER ;

PAR J. MARCHAND,

Docteur ès sciences, professeur au Gymnase cantonal (Lausanne).

---

1. Dans le tome XVIII des *Annales de Gergonne* Steiner a énoncé, sans en donner les démonstrations, les plus intéressants des théorèmes connus de la géométrie du quadrilatère complet.

Certains d'entre eux méritent certainement encore d'attirer notre attention. Ils ont été démontrés par Mention <sup>(1)</sup> et par M. Oppermann <sup>(2)</sup>, mais ces auteurs, ne mettant en œuvre que des propositions de géométrie élémentaire, analysent des figures si compliquées que leurs démonstrations n'éclairent guère. En outre, s'il serait vain de vouloir retrouver la pensée de l'illustre géomètre que fut Steiner, il peut être intéressant d'arriver à ses énoncés par un chemin qu'il eût pu suivre naturellement, et par des méthodes qui *lui étaient habituelles*.

C'est ainsi que, déjà, quelques-unes des propositions de Steiner ont été démontrées par de fort élégantes considérations de géométrie projective. Mais les dernières d'entre elles n'avaient pu être traitées de la même façon, bien qu'on ne doutât pas que cela fût possible.

---

<sup>(1)</sup> *Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. I, 1862.

<sup>(2)</sup> *Premiers éléments d'une théorie du quadrilatère complet*.

Je m'en vais donc exposer une solution de ce genre et voici les théorèmes dont il s'agit :

*« Dans chacun des quatre triangles formés par les côtés d'un quadrilatère complet, il y a un cercle inscrit et trois cercles exinscrits; ce qui fait en tout seize cercles, dont les centres sont quatre par quatre sur une circonférence de manière à donner naissance à huit nouveaux cercles. Ces huit cercles se partagent en deux groupes de quatre, tels que chacun des cercles de l'un des groupes coupe orthogonalement tous les cercles de l'autre. On en conclut que les centres des cercles des deux groupes sont sur deux droites perpendiculaires l'une à l'autre.*

*» Enfin, ces deux dernières droites se coupent au point de rencontre des cercles circonscrits aux quatre triangles. »*

2. Soient A, B, C, A', B', C' les sommets d'un quadrilatère complet et AA', BB' et CC' ses diagonales.

Les confocales des coniques inscrites dans ce quadrilatère forment un réseau tangenciel dont les coniques dégénérées en une paire de points sont constituées par les paires de foyers associés des coniques inscrites. On peut facilement donner quelques-unes de ces coniques dégénérées; par exemple deux sommets opposés du quadrilatère en forment une, de même que la paire IJ des points cycliques ou encore que le foyer O et le point à l'infini O' de la parabole inscrite.

Les hyperboles équilatères harmoniquement circonscrites aux coniques inscrites sont soumises à trois conditions linéaires indépendantes, et forment par conséquent un réseau ponctuel. Les coniques de ce réseau, dégénérées en deux droites, sont encore des hyperboles équilatères, donc des paires de droites rectangulaires; ce sont les paires de droites conjuguées aux coniques inscrites et à la paire des points cycliques. Telles sont, par exemple, la paire des bissectrices issues de chacun des sommets du quadrilatère, la droite de l'infini et le lieu O'n des centres des coniques inscrites, enfin une paire de droites issues de chacun des points cycliques et conjuguées aux coniques inscrites.

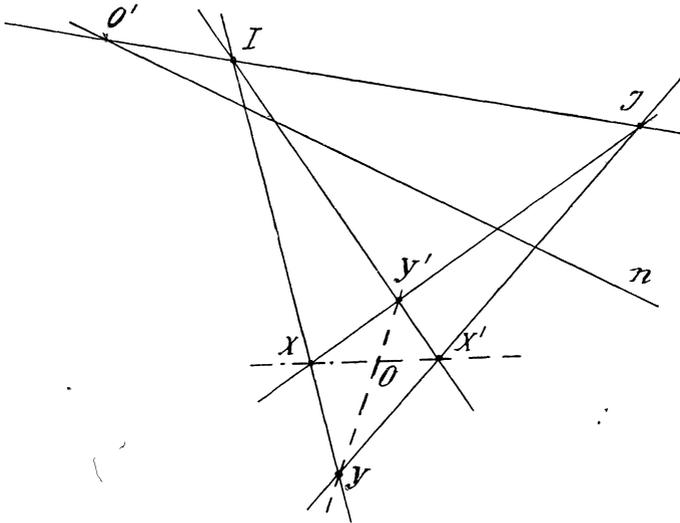
D'autre part, il résulte d'un théorème dû à Hermite qu'une cubique est complètement déterminée par le réseau de ses coniques

polaires. Il existe donc une cubique  $S$  dont le réseau d'hyperboles équilatères précédent est le réseau des coniques polaires. C'est d'ailleurs une stelloïde cubique et nous la nommerons *stelloïde conjuguée du quadrilatère*. Sa hessienne  $H$  est le lieu des foyers des coniques inscrites et sa cayleyenne  $\Gamma$  est l'enveloppe des axes des coniques inscrites, ou, ce qui revient au même, l'enveloppe des paires de droites rectangulaires conjuguées aux coniques inscrites <sup>(1)</sup>.

3. Mais on sait qu'une courbe donnée de troisième classe est la cayleyenne de trois cubiques.  $\Gamma$ , qui est donc la cayleyenne de la stelloïde  $S$ , est encore celle de deux autres cubiques  $C_1$  et  $C_2$ . Essayons de déterminer les réseaux des coniques polaires de  $C_1$  et de  $C_2$ .

De chacun des points cycliques  $I$  et  $J$ , on peut mener à  $\Gamma$  deux

Fig. 1.



tangentes différentes de la droite de l'infini. Ce sont deux paires de côtés opposés d'un quadrangle complet  $XX'YY'$  (fig. 1). Et parce

---

<sup>(1)</sup> La stelloïde conjuguée et les deux réseaux de coniques dont nous venons de parler conduisent à de nombreuses propriétés métriques du quadrilatère, en particulier à celles qui ressortent de la considération de ses bissectrices.

que I et J sont deux points conjugués de la hessienne H, les points de contact de ces quatre tangentes sont sur une nouvelle tangente de la cayleyenne; celle, précisément, qui est la conjuguée de la tangente I J, donc la droite  $O'n$ . Pour la même raison, les côtés opposés  $XX'$  et  $YY'$  du quadrangle  $XX'YY'$ , qui sont aussi deux tangentes de  $\Gamma$ , se coupent au point O, conjugué du troisième point à l'infini  $O'$  de la hessienne H. O est donc le foyer de la parabole inscrite dans le quadrilatère donné ABC A' B' C'.

En associant maintenant à l'une des tangentes IX, IX', JX, JX' successivement chacune des trois autres, nous formerons successivement une conique polaire de la stelloïde S, puis une conique polaire de la cubique  $C_1$  et enfin une conique polaire de  $C_2$ . Ce sont les deux tangentes XI et X'I qui constituent une conique polaire de la stelloïde. Imaginons que XI et X'J forment une conique polaire de la cubique  $C_1$ . Aux trois tangentes XI, XJ et XX' de la cayleyenne  $\Gamma$  de  $C_1$  seront conjuguées trois autres tangentes formant un triangle dont les sommets sont sur les droites XI, XJ et XX'. Ce sont respectivement X'J, XI et IJ. Et les trois paires de droites ainsi obtenues sont les paires de côtés opposés d'un quadrangle complet YY' IJ. Toutes les coniques circonscrites à ce quadrangle sont des coniques polaires de  $C_1$ .

Dans le réseau des coniques polaires de  $C_1$  il y a donc un faisceau de cercles dont Y et Y' sont les points fondamentaux.

On verrait de la même façon que le réseau des coniques polaires de  $C_2$  contient aussi un faisceau de cercles dont les points fondamentaux sont les associés X et X' des points Y et Y' (<sup>1</sup>).

Ces deux faisceaux de cercles sont donc deux faisceaux orthogonaux; les lieux de leurs centres sont les droites rectangulaires  $XX'$  et  $YY'$ . Nous allons voir que ces faisceaux sont précisément ceux des cercles de Steiner.

4. Comme nous l'avons fait pour les tangentes à  $\Gamma$ , issues de I et de J, remarquons que les bissectrices des angles en deux sommets opposés du quadrilatère, A et A' par exemple (*fig. 2*), touchent la cayleyenne  $\Gamma$  en des points situés sur une nouvelle tangente de  $\Gamma$ .

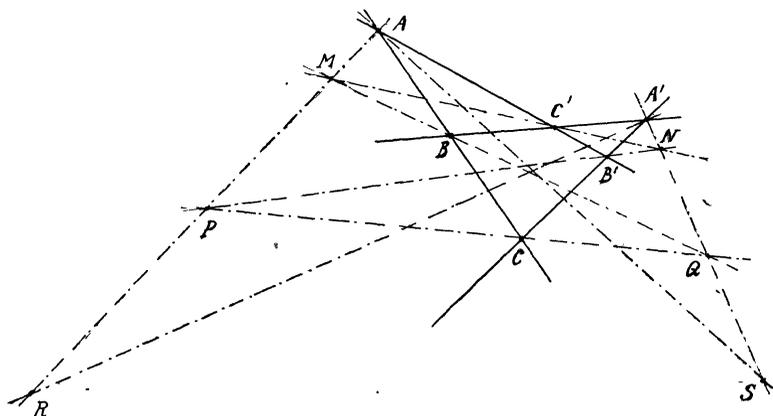
---

(<sup>1</sup>) Points associés au sens de Darboux (*Principes de géométrie analytiques*, p. 149).

En associant les deux bissectrices issues d'un même sommet, on forme une conique polaire de la stelloïde  $S$ .

En associant deux bissectrices issues de deux sommets

Fig. 2.



opposés,  $A$  et  $A'$ , on forme ou une conique polaire de  $C_1$  ou une conique polaire de  $C_2$ . Imaginons donc que les bissectrices  $AP$  et  $A'Q$  forment une conique polaire de la cubique  $C_1$ . Il sera aisé de voir, par une démonstration analogue à celle du n° 3, que toutes les coniques circonscrites au quadrangle  $MNPQ$  sont aussi des coniques polaires de  $C_1$ . Et comme deux faisceaux de coniques polaires d'une même cubique ont toujours une conique commune, les sommets  $M, N, P$  et  $Q$  sont sur un cercle de l'un des faisceaux du n° 3.

On pourrait maintenant faire voir facilement les huit cercles de Steiner. Il suffirait de dessiner une figure complète. Remarquons seulement que si, en associant les bissectrices  $AP$  et  $A'Q$ , on obtient un cercle de l'un des faisceaux, on déterminera un cercle de l'autre faisceau, en associant les bissectrices  $AP$  et  $A'R$ .

Ensuite on sera conduit à deux autres cercles en associant les bissectrices  $AS$  et  $A'Q$ , puis  $AS$  et  $A'R$ .

Enfin, il serait facile de trouver encore de nombreux cercles appartenant aux faisceaux de Steiner et différents de ceux qu'il a cités; tel, par exemple, celui qui passe par les points  $A, A', R$  et  $S$ , d'autres, analogues à celui-là, ou d'autres encore que l'on cons-

truirait aisément en figurant tout d'abord les côtés et les hauteurs du triangle diagonal du quadrilatère complet (une diagonale et la hauteur correspondante du triangle diagonal forment une conique polaire de la stelloïde conjuguée).

Ainsi se trouvent donc démontrés et complétés les énoncés de Steiner. La méthode employée est fort simple. Il suffit de détourner son attention de la stelloïde conjuguée du quadrilatère — qui se présente d'elle-même à l'esprit, et qui joue un rôle important dans la démonstration d'autres propriétés métriques du quadrilatère — et de la reporter sur les deux autres cubiques qui ont la même cayleyenne que cette stelloïde.