NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. HADAMARD

Sur la géométrie anallagmatique (addition à l'article précédent)

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 314-320

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__314_0>

SUR LA GÉOMÉTRIE ANALLAGMATIQUE

(Addition à l'article précédent);

PAR J. HADAMARD.

A la suite de l'article qui précède (article qui sera désigné dans ce qui suit par l'abréviation A), M. Cartan m'a communiqué plusieurs compléments remarquables. J'indique ici le plus simple d'entre eux.

Parmi les diverses congruences paratactiques qui ont même sphère imaginaire principale (¹), distinguons deux espèces (²), suivant que les sens qui se correspondent sur deux cercles de la congruence sont *dextrorsum* ou *sinistrorsum*, l'un par rapport à l'autre. Dans ces conditions, *deux congruences paratactiques*

(¹) Je substitue ici cette dénomination à celle de sphère « fondamentale » employée précédemment : le mot de sphère *principale* avait été employé par les auteurs qui se sont occupés de cette question ou de la cyclide de Dupin, et il n'y a pas de raison de l'abandonner.

(²) Cette distinction se rattache à une autre relative aux génératrices de la sphère imaginaire principale et qui avait été antérieurement, entre M. Cartan et nous-même, l'objet d'un échange de vues. Au lieu que sur une sphère réelle, deux génératrices imaginaires conjuguées sont toujours de système différents, sur une sphère imaginaire pure, deux génératrices conjuguées sont du *même* système, de sorte qu'il doit être évidemment possible de rattacher à des constructions *réelles* la distinction entre les deux systèmes de génératrices : et c'est à quoi répond précisément, comme l'avait remarqué M. Cartan, la distinction indiquée dans le texte.

Beaucoup d'autres interprétations seraient encore possibles dans le même but, si l'on ne s'astreignait pas à leur donner une forme anallagmatique. C'est ainsi que n'importe quel paraboloïde hyperbolique équilatère de paramètre a ayant son sommet en O, coupe la sphère imaginaire de centre O et de rayon $a\sqrt{-1}$ suivant quatre génératrices appartenant respectivement aux deux systèmes. Or, sur le paraboloïde, les deux systèmes se distinguent l'un de l'autre, dans le domaine réel, par le sens dans lequel tournent les génératrices de l'un d'eux autour d'une génératrice déterminée quelconque de l'autre.

de même sphère principale et de même espèce se coupent sous un angle constant en tout point de l'espace.

M. Cartan rattache ce théorème aux interprétations imaginaires que l'on peut donner des figures anallagmatiques réelles que nous considérons. Proposons-nous, conformément au programme que nous nous étions tracé précédemment, d'en donner une démonstration directe, et, tout d'abord, d établir le suivant dont il découle immédiatement :

Deux opérations paratactiques de même sphère principale et d'espèces différentes sont toujours permutables.

On peut considérer ce dernier fait comme démontré par celui que nous avons établi dans notre précédent article (A, 34), relativement aux diverses positions que prend un cercle C lorsqu'on lui applique le groupe d'opérations paratactiques défini par une congruence dont un cercle C coupe C′ en deux points opposés. Nous avons constaté en effet que ces positions successives font partie d'une seconde congruence paratactique, permutable avec la première et (ce qui revient d'ailleurs au même) ayant avec elle deux cercles conjugués communs.

Or, deux congruences paratactiques d'espèces différentes et de même sphère principale, peuvent toujours être considérées comme définies de cette façon : car une congruence paratactique est définie par sa sphère principale, son espèce et un de ses cercles. Dans ces conditions, la proposition devient évidente.

Au reste, on peut (et cette méthode pourrait, au fond, remplacer celle de notre n° 34 précédent) déterminer directement les deux cercles conjugués communs aux deux congruences. Par les deux points opposés a, $\overline{a}$, communs à C et à C′, nous pouvons en effet faire passer un cercle Γ et un seul qui soit perpendiculaire à tous deux. Ceci fait, une série de cercles paratactiques à C et, de même, une série de cercles paratactiques à C′, pourront s'obtenir par la construction du n° 18 (article précédent), laquelle fait intervenir un angle arbitraire θ, celui dont tourne autour de Γ une sphère variable passant primitivement par C ou par C′. L'angle θ est d'ailleurs déterminé lorsqu'on se donne l'un des points opposés m, $\overline{m}$ où le cercle variable coupe Γ (il est lié au rapport anharmonique $\overline{aa}m\overline{m}$ par la relation mentionnée au n° 5 de notre précédent article). Cela posé, si les deux congruences auxquelles appartiennent respectivement C et C′ sont d'espèces différentes, la rotation de la sphère variable s'effectuera, pour un même déplacement des points m, $\overline{m}$, en sens contraires, et l'on pourra, par conséquent (de deux manières différentes), disposer de l'angle θ de manière que la construction à laquelle nous venons de faire allusion donne le même cercle de part et d'autre.

A l'aide du résultat que nous venons d'obtenir, celui de M. Cartan s'obtient sans difficulté. Soient, dans l'espace où l'on considere deux congruences paratactiques $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}')$ de même sphère principale et de même espèce, deux points quelconques a, b, non opposés entre eux, et par chacun desquels nous ferons passer des cercles qui appartiennent respectivement aux deux congruences. Par a et b, d'autre part, il passera un cercle orthogonal à la sphère principale et qui pourra servir à définir une congruence paratactique d'espèce opposée à la premiere. Puisque, dans ces conditions, il y a permutabilité, l'opération paratactique résultant de cette construction, et qui permet de passer du point a au point b, transforme la figure tracée en a en la figure correspondante relative à b.

C. Q. F. D.

Le résultat précédent fournit la solution d'une question que nous avions laissée ouverte (A, n° 39, note). A cet effet, on en déduira d'abord la remarque suivante :

Soient $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}')$ deux congruences paratactiques de même sphère principale et de même espèce. Autour d'un cercle C quelconque de la première, faisons tourner la seconde d'un certain angle θ, de manière à obtenir une troisième congruence analogue à la première. *La congruence* $(\mathcal{C}'')$ *ainsi obtenue est indépendante du choix du cercle* C *dans la première congruence.*

Prenons, en effet, deux positions successives quelconques (C_1, C_2) de ce cercle dans la congruence à laquelle il appartient et, sur C_1 et C_2 respectivement, deux points a_1, a_2 par lesquels nous ferons passer les cercles C'_1, C'_2 qui appartiennent à $(\mathcal{C}')$ et qui coupent les premiers, d'après ce qui vient d'être démontré, sous un même angle α. Si maintenant nous faisons tourner de l'angle θ, C'_1 autour de C_1 et C'_2 autour de C_2, nous obtenons deux cercles C''_1

et C''_2 tels que les trièdres ainsi formés en a_1 et en a_2, par les tangentes aux différents cercles qui partent soit de l'un, soit de l'autre de ces points, soient égaux. Appliquant enfin à nouveau le résultat de M. Cartan aux deux congruences données et à celle (de même sphère principale et de même espèce) qui est définie par le cercle C''_1, on voit que cette dernière contient nécessairement C''_2 : ce qui est le fait à démontrer.

On voit donc que le fait de *faire tourner d'un angle* θ (en un sens donné) *une congruence paratactique autour d'une autre* (de même sphère principale et de même espèce) a un sens bien déterminé (1).

Cela posé, soient pris deux points déterminés quelconques a, b de l'espace et prenons les symétrique a', b', de chacun d'eux par rapport aux différents cercles d'une congruence paratactique ($\mathcal{C}$) donnée. Il s'agit de trouver l'opération qui transforme l'une dans l'autre les deux figures (sphériques) décrites l'une par a', l'autre par b'.

Pour cela, nous n'avons qu'à observer qu'il existe une opération paratactique bien déterminée (en laissant de côté le cas où a et b sont opposés, dans lequel la réponse à la question posée est immédiate), de même sphère principale et de même espèce que ($\mathcal{C}$), qui change a en b. L'opération demandée s'obtient en faisant tourner la précédenre de π autour de ($\mathcal{C}$).

Mais il semble que chaque propriété de la figure vraiment merveilleuse, découverte par E. von Weber et M. A. Bloch, ouvre la voie à d'autres résultats plus curieux encore. La solution que nous venons d'obtenir appelle une généralisation évidente. Elle s'étend d'elle-même au cas où les points a', b', au lieu d'être les symétriques de a, b par rapport à un cercle variable C de la congruence ($\mathcal{C}$), se déduisent des premiers par une rotation d'un angle donné *quelconque* θ autour du cercle C. Le point b', dans

(1) Pour $\theta = \pi$, la démonstration peut se donner sous une autre forme. Prenons d'abord la symétrique ($\mathcal{C}'_0$) de la congruence ($\mathcal{C}$) par rapport à un premier cercle C_0 de ($\mathcal{C}$). La symétrique par rapport à un autre cercle analogue arbitraire C se déduira de la première par une double symétrie relative à C_0 et à C, c'est-à-dire (A, n° 26) par une transformation paratactique, laquelle est d'espèce opposée à celle que définit ($\mathcal{C}$) et, par conséquent, d'après ce que nous venons de voir, permutable avec elle.

ces nouvelles conditions, se déduit encore de a' par une opération sphérique que l'on peut assigner, transformée par la rotation dont il s'agit de celle qui change a en b.

On est conduit naturellement à se demander quels sont les lieux ainsi décrits par les points a', b'. *Ce sont encore des sphères.* La première démonstration donnée à cet égard pour le cas de $\theta = \pi$ (A, n° 36) reste en effet valable pour le cas actuel. α et $\bar{\alpha}$ étant les transformés de a et de son opposé par l'opération d'angle $\frac{\theta}{2}$, le point a' sera l'inverse de a par rapport à une sphère variable passant par α et $\bar{\alpha}$ et décrira, par consequent, la sphère qui passe par a et par rapport à laquelle α et $\bar{\alpha}$ sont inverses l'un de l'autre.

Il resterait à comparer entre elles les diverses figures ainsi obtenues lorsque θ varie.

On remarquera que si, après avoir construit a' par rotation de a autour de C, on fait tourner à son tour ce point a' du même angle θ autour du conjugué de C, on obtient un point a_1 indépendant du choix de C dans la congruence, à savoir le transformé de a par l'opération d'angle θ. Le lieu du point a' ne change donc pas si l'on remplace a par a_1 en renversant en même temps le sens de l'angle de rotation. C'est une sphère qui peut, d'après cela, être définie comme passant par les points a, a_1 et orthogonale en ces points au cercle de la congruence qui les contient. Les points α, $\bar{\alpha}$ peuvent être considérés comme les « milieux », en un sens généralisé, des deux arcs déterminés sur ce cercle par a et a_1 (ils en seraient les milieux au sens ordinaire du mot, si le conjugué du cercle en question était une droite).

Il était évident *a priori* que l'opération qui change a' en b' dans l'un ou l'autre des cas que nous venons d'étudier, devait être paratactique. La sphère principale de la congruence donnée permet, en effet, de définir une géométrie riemannienne dans laquelle les diverses transformations sphériques intervenant dans nos raisonnements représentent les déplacements; et l'opération cherchée doit évidemment présenter cette propriété que la distance riemannienne d'un point à son transformé est constante. Or cette propriété appartient aux transformations paratactiques et à celles-là seulement (comme on le voit en prenant le point à transformer successivement sur chacun des axes conjugués de la transformation ([1]).

Ceci, combiné encore avec le résultat de M. Cartan, permet d'établir le fait (évident lorsqu'on fait intervenir les génératrices de la sphère principale) que *les transformations paractatiques de même sphère principale et de même espèce forment un groupe.*

Appliquons, en effet, à un point quelconque a une première transformation paratactique qui le change en a', puis à celui-ci une seconde transformation qui le change en a''. Les distances riemanniennes aa', $a'a''$ sont constantes, et il en est de même de l'angle en a', d'après la proposition de M. Cartan. Or le triangle $aa'a''$ obéit aux lois de la géométrie riemannienne, qui sont celles de la géométrie sphérique.

Donc la distance riemannienne aa'' est aussi constante et la transformation correspondante est nécessairement paratactique (et de même espèce que les premières, en vertu de la continuité).

Il pourrait d'ailleurs être intéressant d'étudier de plus près la composition des transformations paratactiques de même espèce; et ceci introduirait sans doute les propriétés des cercles conjugués telles que nous les avons considérées dans tout ce qui précède, propriétés qui méritent, elles aussi, de retenir l'attention quoiqu'elles soient connues à titre de résultats de géométrie non euclidienne.

C étant un cercle quelconque orthogonal à la sphère principale Σ, son conjugué est, nous l'avons vu, déterminé entièrement par le fait qu'il est : 1° axial au premier; 2° orthogonal, lui aussi, à la sphère principale. Supposons maintenant qu'on ne donne pas le cercle C, mais qu'on en connaisse seulement le point a ou, ce qui revient au même, deux points opposés, a, $\bar{a}$. Le conjugué C′ sera sur une sphère connue à savoir celle qui est orthogonale à Σ et par rapport à laquelle a et $\bar{a}$ sont inverses l'un de l'autre.

([1]) Si un seul de ces axes était réel, il aurait sur lui deux points invariants, de sorte que la propriété ne pourrait avoir lieu. Dans une transformation quelconque à axes réels mais à angles différents φ et ψ, la distance riemannienne δ d'un point a à son transformé est donné par

$$\cos\delta = \cos^2\tau \cos\varphi + \sin^2\tau \cos\psi,$$

en désignant par τ l'angle qui a pour tangente le rapport k des puissances réduite (A, 32) du point a aux deux axes.

La dualité ainsi obtenue, correspondant à la transformation par polaires réciproques, possède une propriété remarquable que ne possède pas cette dernière à savoir que deux droites riemanniennes C_1, C_2 (c'est-à-dire deux cercles orthogonaux à Σ) cosphériques entre elles, se coupent sous le même angle que leurs transformées. A trois cercles passant par un même point (et par son opposé) et y formant un trièdre, correspondent trois cercles formant, sur une même sphère, un triangle sphérique, dont les éléments sont ceux du trièdre supplémentaire du premier.