Agrégation des sciences mathématiques (session de 1926)

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 2-23

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__2_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (SESSION DE 1926).

Problème de Calcul différentiel et intégral.

On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(1) \qquad x'' + x\mathrm{A}(t) = 0,$$

où $\mathrm{A}(t)$ *désigne une fonction analytique de la variable indépendante* t, *réelle et régulière pour toutes les valeurs réelles et finies de* t.

1° *Démontrer que toute solution de cette équation peut se mettre sous la forme*

$$x = \rho \cos \varphi,$$

---

(1) ω sommet, cercle C base.

ρ *satisfaisant à l'équation différentielle*

$$(2) \qquad \rho'' - \frac{c^2}{\rho^3} + \rho A(t) = 0,$$

où c désigne une constante à laquelle on peut donner une valeur arbitraire, autre que zéro (1 *par exemple*), *tandis que* φ *a pour valeur*

$$\int \frac{c\,dt}{\rho^2}.$$

Réciproquement, si ρ *est une integrale quelconque de* (2) *et* φ *une fonction primitive de* $\frac{c}{\rho^2}$, *l'intégrale générale de* (1) *est de la forme*

$$C\rho\cos(\varphi + h),$$

C *et h étant les constantes d'intégration. Toute solution* $\rho(t)$ *de l'équation* (2) *est régulière et de signe constant quand t varie de* $-\infty$ *à* $+\infty$.

2° *Il résulte de ce qui précède que l'équation* (2) *s'intègre au moyen d'une quadrature dès que l'on en connaît une solution particulière. Sous quelle forme les constantes d'intégration* ρ_0 *et* ρ'_0 *figurent-elles dans l'expression de l'intégrale générale ? Interpréter le résultat en considérant les trajectoires du point analytique*

$$z = \rho e^{i\varphi},$$

et le lien qui existe entre les trajectoires correspondant aux diverses solutions de l'équation (2). *Examiner le cas où* A *est une constante positive.*

3° *On suppose, dans cette troisième partie du problème, que* $A(t)$ *reste comprise entre deux constantes positives* M *et* m. *Démontrer que les intégrales réelles* $x(t)$ *de l'équation* (1) *sont* oscillantes, *les zéros et les points stationnaires se succédant alternativement à des intervalles moindres que* $\frac{\pi}{2\sqrt{m}}$ *et plus grands que* $\frac{\pi}{2\sqrt{M}}$. *Établir, dans les mêmes conditions, quelques propriétés des intégrales réelles* $\rho(t)$ *de l'équation* (2). *Montrer notamment que, si* ρ_1 *et* ρ_2 *sont deux valeurs stationnaires con-*

sécutives, on a

$$\frac{c}{\sqrt{M}} < \rho_1 \rho_2 < \frac{c}{\sqrt{m}},$$

et que, dans le cas où les amplitudes d'oscillation $|\rho_2 - \rho_1|$ *deviennent infiniment grandes, les intervalles* $|t_2 - t_1|$ *correspondants ne deviennent ni infiniment grands ni infiniment petits.*

4° *Examiner ensuite le cas où* $A(t)$ *est une fonction périodique, de période égale à* π. *Montrer que, parmi les intégrales de* (1), *il en existe alors en général deux, linéairement distinctes, qui sont multipliées par les facteurs* λ *et* $\frac{1}{\lambda}$ *quand on change* t *en* $t + \pi$, λ *étant racine de l'équation du second degré à coefficients réels*

$$\lambda^2 - k\lambda + 1 = 0.$$

Quelles sont les propriétés des intégrales réelles de (1) *et* (2) *qui correspondent aux diverses hypothèses :*

$$k > 2 \quad \text{ou} \quad k < -2, \quad \text{ou} \quad k^2 < 4, \quad \text{ou} \quad k = \pm 2\,?$$

Montrer que la condition $k^2 < 4$ *est suffisante, et la condition* $k^2 \leqq 4$ *nécessaire pour que* (2) *admette une solution périodique.*

(*On dit alors que les solutions de* (1) *sont stables.*)

5° *Démontrer que,* $A(t)$ *étant toujours supposée périodique, le nombre* N *des zéros d'une intégrale réelle de* (1), *contenus dans l'intervalle* (0, T), *est donné par la formule*

$$N = \alpha T + r,$$

α *étant fixe et* r *restant borné.*

6° *On pose en particulier*

$$A = q^2 + q_1 \cos 2t,$$

q *et* q_1 *étant des constantes réelles, qui vérifient l'inégalité*

$$|q_1| < q^2.$$

Démontrer que si l'intervalle $(q^2 - q_1, q^2 + q_1)$ *ne renferme* *le carré d'aucun nombre entier, l'équation* (1) *n'admet que des solutions stables.*

SOLUTION PAR M. BERTRAND GAMBIER.

I. Si t est considéré comme le temps, l'équation (1) du texte est celle du mouvement sur Ox d'un point de masse 1, soumis de la part du point fixe O à une force dirigée sur Ox et mesurée algébriquement par $-xA(t)$ (attractive si A est positif, répulsive si A est négatif). On peut considérer un axe Oy perpendiculaire au premier, puis l'équation analogue

$$(1') \qquad y'' + yA(t) = 0$$

avec l'interprétation analogue.

Les équations (1) et (1′) peuvent être aussi étudiées *ensemble :* ce sont alors les équations du mouvement d'un point (x, y) de masse 1, soumis à une force centrale, issue de O, égale algébriquement à $-\rho A(t)$. Les équations (1) et (1′) admettent la combinaison intégrable

$$xy'' - yx'' = 0,$$

d'où l'intégrale des aires

$$xy' - yx' \equiv \rho^2\varphi' = c,$$

où c est une constante numérique arbitraire ; si c est nulle, φ est constant, la trajectoire est une droite issue de O, qu'on prendra pour nouvel axe des x, de sorte que l'on retombe sur l'équation (1). On supposera donc $c \neq 0$, ce qui revient à considérer deux intégrales de l'équation (1) linéairement distinctes, c'est-à-dire ne s'annulant pas ensemble. On a aussitôt

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \qquad \rho\rho' = xx' + yy',$$
$$\rho\rho'' + \rho'^2 = x'^2 + y'^2 + xx'' + yy'' = x'^2 + y'^2 - A\rho^2.$$

L'identité

$$(x'^2 + y'^2)(x^2 + y^2) \equiv (xy' - yx')^2 + (xx' + yy')^2$$

permet d'écrire

$$\rho^3\rho'' = c^2 - A\rho^4$$

ou l'équation (2) de l'énoncé

$$(2) \qquad \rho'' = \frac{c^2}{\rho^3} - A\rho$$

Le calcul fait s'applique aussi aux intégrales nouvelles de (1), λx et $\frac{y}{\lambda}$, pour lesquelles la constante des aires est *la même* que précédemment; une rotation d'ensemble des axes donne aussi (λ et h constantes quelconques)

$$\lambda(x\cos h - y\sin h), \quad \frac{x\sin h + y\cos h}{\lambda}$$

ou, si l'on préfère,

$$\lambda\rho\cos(\varphi + h), \quad \frac{\rho\sin(\varphi + h)}{\lambda}$$

de sorte que, si ρ est une solution *quelconque* de (2), la quadrature $\varphi = \int \frac{c\,dt}{\rho^2}$ donne l'intégrale *générale* de (1)

$$\lambda\rho\cos(\varphi + h), \tag{3}$$

et la solution *générale* R de (2)

$$R^2 = \rho^2\left[\lambda^2\cos^2(\varphi + h) + \frac{\sin^2(\varphi + h)}{\lambda^2}\right] \tag{4}$$

avec les deux constantes arbitraires λ et h.

Comme x et y, solutions de (1), sont régulières pour toutes les valeurs finies et réelles de t, sous les hypothèses de l'énoncé [$A(t)$ fonction analytique de la variable indépendante t, réelle et régulière pour toutes les valeurs réelles et finies de t], la fonction x^2+y^2 est aussi réelle et régulière : on a choisi le couple (x, y) de sorte que $xy' - yx'$ soit égale à la constante c non nulle : de la sorte, quelle que soit t, réelle et finie, x' et y' étant aussi *finies*, x et y ne peuvent s'annuler ensemble, donc $x^2 + y^2$ n'a aucun zéro réel à distance finie ; sa racine carrée ρ est régulière et de signe constant quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$; nous pourrons supposer la détermination ρ, adoptée, *positive*.

II. La formule (4) nous donne l'intégrale générale de (2). Or, associer une solution *quelconque* X de (1) à une autre solution *quelconque* Y de (1) [ou (1')] revient manifestement à écrire les équations de la transformation *affine* générale

$$\begin{cases} X = \lambda x + \mu y, \\ Y = \lambda' x + \mu' y, \end{cases} \tag{5}$$

effectuée, soit sur tout le plan (x, y), soit sur la trajectoire ***particulière*** $\gamma(x, y)$ étudiée au n° I ; le point (x, y) est l'affixe du point imaginaire $z = \rho e^{i\varphi}$. Or, si l'on suppose d'abord les deux formes quadratiques

$$x^2 + y^2, \quad (\lambda x + \mu y)^2 + (\lambda' x + \mu' y)^2$$

non proportionnelles (λ, μ, λ', μ' ayant des valeurs fixes), chacune égalée à zéro, donne deux droites imaginaires de sorte qu'il existe un couple et un seul de deux axes réels rectangulaires (Ox_1, Oy_1) liés aux axes (Ox, Oy) (1), ayant pour transformés deux axes (OX_1, OY_1) rectangulaires aussi, liés aux axes (OX, OY). Il résulte de là que la transformation ***générale*** (5) à quatre paramètres $(x, y\,;\, X, Y)$ est équivalente à la suite des substitutions

$$(x, y\,;\; x_1, y_1\,;\; X_1, Y_1\,;\; X, Y)$$

définies par

$$(6)\qquad \begin{cases} x_1 = x \cos\alpha - y \sin\alpha, \\ y_1 = x \sin\alpha + y \cos\alpha, \end{cases}$$

$$(7)\qquad \begin{cases} X_1 = l x_1, \\ Y_1 = m y_1, \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} X = X_1 \cos\beta - Y_1 \sin\beta, \\ Y = X_1 \sin\beta + Y_1 \cos\beta. \end{cases}$$

Le résultat est évident si l'on regarde les plans Oxy et OXY comme distincts et simplement réunis par le point O : on peut, par une rotation, supposer les deux directions rectangulaires Ox_1, Oy_1 coïncidant avec l'ensemble des deux directions rectangulaires OX_1, OY_1 qui leur correspondent et il suffit d'introduire la rotation α amenant Ox sur Ox_1, puis la rotation β amenant OX_1 sur OX ; on retrouve les quatre paramètres, sous la forme l, m, α, β au lieu de $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$. Le déterminant jacobien $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}$ ou $\lambda\mu' - \mu\lambda'$ est égal au produit des déterminants jacobiens successifs $\frac{D(X, Y)}{D(X_1, Y_1)}$, $\frac{D(X_1, Y_1)}{D(x_1, y_1)}$, $\frac{D(x_1, y_1)}{D(x, y)}$, donc finalement à la quantité lm.

---

(1) Ce sont les rayons doubles de l'involution définie par les couples $x^2 + y^2 = 0$ et $(\lambda x + \mu y)^2 + (\lambda' x + \mu' y)^2 = 0$.

La quantité

$$(9)\quad R^2 \equiv X^2 + Y^2 \equiv (\lambda x + \mu y)^2 + (\lambda' x + \mu' y)^2 \equiv A x^2 + 2 B xy + C y^2$$

est la forme quadratique *générale* en x et y, de sorte que $u \equiv R^2$ satisfait à une équation linéaire d'ordre 3 que nous allons former ; on voit aussitôt que

$$(10)\qquad AC - B^2 = (\lambda \mu' - \mu \lambda')^2.$$

Dans le numéro précédent, nous nous sommes bornés au cas où la transformation affine (5) conserve les aires, de sorte que

$$\lambda \mu' - \mu \lambda' = l m = \pm 1$$

et alors R satisfait à l'équation

$$R^3 R'' + A R^4 = c^2$$

du second ordre, où c est la valeur de $xy' - yx'$; l'équation d'ordre 3 annoncée s'obtient évidemment en écrivant

$$(11)\qquad \frac{d}{dt}[R^3 R'' + A R^4] = 0.$$

Si l'on introduit la fonction $u \equiv R^2$, on a

$$u' = 2 R R', \qquad u'' = 2 R'^2 + 2 R R''$$

de sorte que (11) devient

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{u'' u}{2} - \frac{u'^2}{4} + A u^2\right] = 0$$

et, en réduisant,

$$(12)\qquad u''' + 2 A' u + 4 A u' = 0.$$

La disparition d'une constante sur les quatre contenues par (5) tient à ce que sur les paramètres (α, l, m, β) le dernier β ne modifie pas R. Si l'on considère deux trajectoires γ ne différant que par une rotation autour de O, la transformation affine (5) leur fait correspondre des trajectoires Γ non égales.

La partie I suppose donc $m = \frac{1}{l}$; on peut d'ailleurs, au lieu des opérations (6), (7), (8), introduire une quatrième opération en écrivant :

$$(6') \qquad \begin{cases} x_1 = x\cos\alpha - \varepsilon y \sin\alpha \\ y_1 = x \sin\alpha + \varepsilon y \cos\alpha \end{cases} \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

$$(7') \qquad \begin{cases} \overline{X}_1 = kx_1, \\ \overline{Y}_1 = ky_1. \end{cases}$$

$$(7'') \qquad \begin{cases} X_1 = l\overline{X}_1, \\ Y_1 = \dfrac{\overline{Y}_1}{l}, \end{cases}$$

$$(8') \qquad \begin{cases} X = X_1\cos\beta - Y_1 \sin\beta, \\ Y = X_1 \sin\beta + Y_1 \cos\beta, \end{cases}$$

on a ainsi deux substitutions orthogonales, une homothétie et la substitution très simple, conservant les aires, définie par (7″) ; la partie I revient à supposer $k = 1$.

Le cas signalé plus haut où $x^2 + y^2$ et $(\lambda x + \mu y)^2 + (\lambda' x + \mu' y)^2$ ne diffèrent que par un facteur de proportionnalité revient à se borner aux opérations (6′) et (7′).

D'autre part, comme on passe de l'équation (2)

$$(2) \qquad \rho'' = \frac{c^2}{\rho^3} - A\rho$$

à l'équation

$$(2') \qquad \rho_1'' = \frac{c_1^2}{\rho_1^3} - A\rho_1$$

par la substitution $\frac{\rho_1^2}{\rho^2} = \frac{c_1}{c}$ [homothétie prévue par (7′)] les explications qui précédent prouvent bien que, si ρ est une solution *particulière* de (2), l'unique quadrature $\int \frac{dt}{\rho^2}$ fournit la solution *générale* soit de (2), soit de (2′), soit de (12), par la formule (4) déjà donnée s'il s'agit de (2), ou la formule analogue

$$(4') \qquad R^2 = \rho^2[\lambda^2 \cos^2(\varphi + h) + \mu^2 \sin^2(\varphi + h)]$$

s'il s'agit de (12).

Il est intéressant de constater qu'une courbe γ *quelconque* conduit à une fonction $A(t)$ et une équation (2) de l'espèce indiquée ici, pourvu que γ ne passe pas à l'origine et tourne sa concavité vers l'origine; il suffit en effet de poser

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad c\,dt = \rho^2\,d\varphi,$$

puis

$$A = \frac{-x''_t}{x}.$$

On a un calcul plus symétrique en écrivant

$$(13) \quad \begin{cases} \rho'_t = \rho'_\varphi \dfrac{c}{\rho^2}, & \rho''_t = \rho''_\varphi \dfrac{c^2}{\rho^4} - 2\rho'^2_\varphi \dfrac{c^2}{\rho^5}, \\ \rho = \dfrac{1}{u}, \quad \rho'_\varphi = -\dfrac{u'_\varphi}{u^2}, & \rho''_\varphi = -\dfrac{u''_\varphi}{u^2} + \dfrac{2u'^2_\varphi}{u^3}. \end{cases}$$

On trouve ainsi

$$(14) \qquad A = c^2 u^3 (u + u''_\varphi),$$

de sorte que t, A et ρ sont exprimées au moyen de φ.

Quand on suppose que A est une constante positive, on a une trajectoire γ, particulière, circulaire

$$(15) \qquad x = \cos(t\sqrt{A}), \qquad y = \sin(t\sqrt{A}),$$

et la transformation affine lui substitue une ellipse

$$(16) \qquad X = \lambda \cos\left[\sqrt{A}(t - t_0)\right], \qquad Y = \mu \sin\left[\sqrt{A}(t - t_1)\right],$$

la valeur de c étant

$$c = \lambda\mu\sqrt{A}\cos\left[(t_1 - t_0)\sqrt{A}\right].$$

III. Supposons maintenant que $A(t)$ reste comprise entre deux constantes positives M et m. Comme l'équation étudiée

$$x'' + x A(t) = 0$$

ne change pas si x change de signe, nous pouvons supposer que la valeur x_0 correspondant à t_0 est positive ; deux cas à distinguer suivant que x'_0 est positive ou négative.

Soit le premier cas : $x_0 > 0$, $x'_0 > 0$. La quantité x''_0 est négative, de sorte que x' diminue, mais reste positive, *pendant un laps de temps limité :* en effet, dans ce laps de temps, x croît, reste positif et l'on écrit

$$x'' = -x A(t),$$

$$x'_0 \geqq x'_0 - x' = \int_{t_0}^{t} x A(t)\,dt > x_0 m(t - t_0),$$

$$(17) \qquad t - t_0 \leqq \frac{x'_0}{m x_0}.$$

La dérivée x' s'annule donc avant l'époque $t_0 + \dfrac{x'_0}{m\,x_0}$, et puisque x'' est encore négative, x' devient négative ; nous rentrons dans le second cas.

Soit maintenant le second $x_0 > 0$, $x'_0 < 0$; x'' est négative, x' diminue, par valeurs négatives, donc $|x'|$ augmente pendant que x diminue ; l'espace x_0 est parcouru en un temps inférieur à $\dfrac{x_0}{|x'_0|}$; à partir du temps où x s'annule, x' étant encore négative non nulle, x décroît, devient négatif et le changement de signe, légitime sur x, nous ramène au premier cas ; les intégrales réelles $x(t)$ sont donc bien oscillantes ; les zéros sont tous simples et correspondent à des points d'inflexion de la courbe (t, x). Dans le second cas, on voit aisément que la vitesse reste bornée pendant le retour à zéro, car

$$x'_0 - x' = \int_{t_0}^{t} x\,\mathrm{A}(t)\,dt \leqq x_0\,\mathrm{M}(t - t_0) \leqq \frac{\mathrm{M}x_0^2}{|x'_0|},$$

$$(18) \qquad |x'| \leqq |x'_0| + \frac{\mathrm{M}x_0^2}{|x'_0|}.$$

Les résultats obtenus par cette voie directe ne sont pas suffisamment précis ; nous allons comparer une intégrale ξ de

$$\xi'' + \xi\alpha(t) = 0$$

à une intégrale η de $\eta'' + \eta\beta(t) = 0$, en supposant $\alpha(t) \geqq \beta(t) > 0$ et $\xi_0 = \eta_0 \geqq 0$, $\xi'_0 = \eta'_0 > 0$. Quand t tend vers t_0, le quotient $\dfrac{\eta}{\xi}$ tend vers 1 : pour $\xi_0 = \eta_0 \neq 0$, c'est évident, et pour $\xi_0 = \eta_0 = 0$, la règle de l'Hospital donne le résultat. Si l'on se borne au temps où ξ et η sont tous deux positifs, on a

$$\xi''\eta - \xi\eta'' = \xi\eta(\beta - \alpha) < 0,$$

de sorte que la fonction $\xi'\eta - \xi\eta'$ est décroissante, donc négative, puisque, pour t_0, elle est nulle. La dérivée de $\dfrac{\xi}{\eta}$ est négative, donc $\dfrac{\xi}{\eta} < 1$ et, en se bornant même au laps de temps où η' reste positif, on a

$$(19) \qquad \frac{\xi'}{\eta'} < \frac{\xi}{\eta} < 1, \qquad \xi < \eta, \qquad \xi' < \eta'.$$

Ceci entraîne que ξ atteint son premier point stationnaire avant que η atteigne le sien, l'élongation de ce point stationnaire étant également plus petite pour ξ que pour η.

Si l'on suppose $M > A(t) > m$, on pourra supposer d'abord $x \equiv \xi$, $\alpha(t) \equiv A(t)$, $\beta(t) \equiv m$; on a alors

$$\begin{aligned} \eta &= \lambda \quad \sin[\sqrt{m}(t-h)] \\ \eta' &= \lambda\sqrt{m}\cos[\sqrt{m}(t-h)] \end{aligned} \qquad \lambda^2 = \eta^2 + \frac{\eta'^2}{m}.$$

L'élongation de x reste inférieure à $\sqrt{x_0^2 + \frac{x_0'^2}{m}}$; le point stationnaire de x est atteint, en supposant $x_0 = 0$, avant l'époque $\frac{\pi}{2\sqrt{m}}$ et est à une distance de l'origine moindre que $\frac{|x'_0|}{\sqrt{m}}$. On peut, au contraire, supposer $x \equiv \eta$, $\beta(t) \equiv A(t)$, $\alpha(t) \equiv M$ et l'on voit que, supposant $x_0 = 0$, le point stationnaire de x est atteint après l'époque $\frac{\pi}{2\sqrt{M}}$ et est à une distance de l'origine supérieure à $\frac{|x'_0|}{\sqrt{M}}$.

Nous venons de raisonner pour un zéro de x et le point stationnaire le suivant immédiatement ; les mêmes résultats sont valables pour un point stationnaire et le zéro suivant : un raisonnement direct analogue le prouve, mais il est commode de poser

$$t = -t_1, \qquad x = x_1, \qquad x' = -x'_1, \qquad x'' = x''_1$$

(les dérivées sans indice étant prises par rapport à t, celles avec indice par rapport à t_1) ; la courbe (t, x) se trouve parcourue en sens inverse. Une conséquence intéressante est la suivante : partons d'un zéro de x avec la vitesse (absolue) v_0, le point stationnaire suivant est à la distance D telle que

$$\frac{v_0}{\sqrt{M}} \leqq D \leqq \frac{v_0}{\sqrt{m}}. \tag{20}$$

De ce point stationnaire, x revient à l'origine, la vitesse v_1 à l'origine satisfaisant à l'inégalité

$$\frac{v_1}{\sqrt{M}} \leqq D \leqq \frac{v_1}{\sqrt{m}} \tag{21}$$

ou, si l'on préfère,

$$D\sqrt{m} \leqq v_1 \leqq D\sqrt{M}. \tag{22}$$

Le point stationnaire suivant, situé par rapport à O du côté opposé à celui déjà étudié, est à une distance D_1 comprise entre $\frac{v_1}{\sqrt{M}}$ et $\frac{v_1}{\sqrt{m}}$, autrement dit (¹)

$$D\sqrt{\frac{m}{M}} \leqq D_1 \leqq D\sqrt{\frac{M}{m}}. \tag{23}$$

La courbe (t, x) est donc une espèce de sinusoïde n'ayant d'autres points d'inflexion que ceux où elle perce l'axe des t, dont les boucles ont, sur l'axe des t, une longueur limitée inférieurement et supérieurement $\left(\frac{\pi}{\sqrt{M}} \text{ et } \frac{\pi}{\sqrt{m}}\right)$, pendant que l'amplitude parallèlement à Ox de la boucle peut offrir des caractères différents : A constant et positif donne une amplitude constante ; A périodique peut donner, comme on le verra plus bas, des amplitudes variant en progression géométrique (de raison supérieure ou inférieure à l'unité). Ce sont les deux cas extrêmes pour la variation de cette amplitude (en supposant A positive et non nulle).

Étudions maintenant la fonction ρ ; quand t augmente indéfiniment, ρ peut ou bien varier toujours dans le même sens, au moins à partir d'une certaine époque, ou bien admettre indéfiniment des alternances de variation.

Dans le premier cas, si ρ va *toujours en croissant*, il ne peut augmenter au delà de toutes limites ; sinon, en vertu de l'équation (2), ρ'' deviendrait infiniment grande négative, donc ρ' aussi et il y aurait contradiction puisque ρ est supposé croissant : ρ ne peut donc que croître jusqu'à une limite finie. Le même raisonnement prouve que si ρ va *constamment* en décroissant, il tend, non pas vers zéro, mais vers une valeur limite supérieure à zéro. Un cas simple où l'une et l'autre de ces circonstances peut se trouver réalisée est celui où $A(t)$ tend vers une limite déterminée a^2 quand t augmente indéfiniment, ρ tendant vers $\sqrt{\frac{c}{a}}$.

Comme application de la fin du n° II, prenons la courbe

$$\rho^2 = \frac{\varphi^2 + 2}{\varphi^2 + 1},$$

(¹) On a aussi

$$v_0\sqrt{\frac{m}{M}} \leqq v_1 \leqq v_0\sqrt{\frac{M}{m}}.$$

ρ tend vers 1, en décroissant, quand φ augmente indéfiniment ; on aura ici

$$ct = \varphi + \text{arc tang}\,\varphi, \qquad u = \sqrt{\frac{\varphi^2+1}{\varphi^2+2}},$$

$$\frac{u'_\varphi}{u} = \frac{\varphi}{(\varphi^2+1)(\varphi^2+2)}, \qquad \frac{u''_\varphi}{u} - \frac{u'^2_\varphi}{u^2} = \frac{1}{(\varphi^2+1)(\varphi^2+2)} - \frac{2\varphi^2(2\varphi^2+3)}{(\varphi^2+1)^2(\varphi^2+2)^2}$$

et l'on calcule A par la formule, sans radical

$$A = c^2 u^4\left[1 + \frac{u''}{u}\right].$$

On a ainsi

$$A = \frac{c^2[\varphi^8 + 6\varphi^6 + 10\varphi^4 + 10\varphi^2 + 6]}{(\varphi^2+2)^4}.$$

Quand φ varie de $-\infty$ à $+\infty$, t varie aussi de $-\infty$ à $+\infty$ et la fonction A reste comprise entre deux limites positives m et M faciles à déterminer : on peut dire que t croissant indéfiniment, il s'établit un régime sensiblement permanent, où les trajectoires sont sensiblement soit le cercle $\rho = 1$ décrit d'un mouvement uniforme, soit les ellipses qui en dérivent par la transformation affine indiquée plus haut.

Supposons maintenant que ρ ait, pendant un certain temps (limité ou non), des alternatives de croissance et de décroissance ; soit un minimum ρ_1 suivi d'un maximum ρ_2. On écrit

$$(24) \qquad 2\rho'\rho'' = \frac{2c^2\rho'}{\rho^3} - 2A\rho\rho',$$

d'où intégrant entre les limites t_1 et t_2 $(\rho'_1 = \rho'_2 = 0)$

$$(25) \qquad \frac{c^2}{\rho_1^2} - \frac{c^2}{\rho_2^2} = \int_{t_1}^{t_2} A(2\rho\rho')\,dt.$$

Puisque ρ et ρ' sont positives, l'intégrale du second membre est comprise entre celles que l'on obtient en remplaçant A par m ou M, d'où

$$(26) \qquad m(\rho_2^2 - \rho_1^2) \leqq \frac{c^2}{\rho_1^2} - \frac{c^2}{\rho_2^2} \leqq M(\rho_2^2 - \rho_1^2).$$

La suppression du facteur $\rho_2^2 - \rho_1^2$, qui est positif, donne aussitôt

$$(27) \qquad \frac{c}{\sqrt{M}} \leqq \rho_1\rho_2 \leqq \frac{c}{\sqrt{m}}.$$

Même raisonnement si le maximum précède le minimum.

Supposons, de plus, d'abord que ρ ait indéfiniment des alternatives de croissance et de décroissance, puis, que l'oscillation $|\rho_2 - \rho_1|$ devienne infiniment grande ; supposons $\rho_2 > \rho_1$, il est nécessaire que ρ_2 soit infiniment grand ; ρ_1 qui est compris entre $\frac{1}{\rho_2}\frac{c}{\sqrt{M}}$ et $\frac{1}{\rho_2}\frac{c}{\sqrt{m}}$ est donc infiniment petit. Prenons comme axe Ox la droite passant par le minimum (ρ_1, φ_1) ; on aura

$$(28) \qquad x_1 = \rho_1, \qquad x'_1 = 0, \qquad y_1 = 0, \qquad y'_1 = \frac{c}{x_1}.$$

Au bout d'un temps θ, *limité, non nul*, compris entre $\frac{\pi}{2\sqrt{M}}$ et $\frac{\pi}{2\sqrt{m}}$, y atteint un *maximum* compris entre $\frac{y'_1}{\sqrt{M}}$ et $\frac{y'_1}{\sqrt{m}}$, *donc très grand ;* pendant cette période x est resté très petit, de l'ordre de ρ_1, car les maxima et minima successifs de x se succèdent à des intervalles de temps compris entre $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$ et $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$; le temps θ ne peut comprendre qu'un nombre limité de ces intervalles compris entre $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{M}}$ et $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{m}}$; nous avons vu que chaque maximum de $|x|$ est inférieur au précédent multiplié par $\sqrt{\frac{M}{m}}$, de sorte que x est resté inférieur à

$$\rho_1\left(\sqrt{\frac{M}{m}}\right)^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{m}}}$$

et par suite est resté de l'ordre de ρ_1 : x^2+y^2 ne peut donc devenir très grand que si y devient très grand et le maximum de x^2+y^2 sera sensiblement atteint en même temps que le maximum de $|y|$; l'intervalle $|t_2 - t_1|$ correspondant à $|\rho_2 - \rho_1|$ est de l'ordre de θ, compris entre $\frac{\pi}{2\sqrt{m}}$ et $\frac{\pi}{2\sqrt{M}}$: il n'est ni infiniment petit, ni infiniment grand.

IV. On suppose $A(t+\pi) \equiv A(t)$; les fonctions $X(t) \equiv x(t+\pi)$ et $Y \equiv y(t+\pi)$ sont intégrales de l'équation $x'' + x\,A(t) = 0$, avec la même valeur de la constante c. On peut écrire avec certaines constantes l, m, l', m' bien déterminées

$$(29) \qquad \begin{cases} X(t) \equiv l\,x(t) + m\,y(t) \\ Y(t) \equiv l'\,x(t) + m'\,y(t) \end{cases} \qquad lm' - ml' = 1.$$

On peut déterminer la constante μ de sorte que

(30) $$Y + \mu X \equiv \lambda(y + \mu x),$$

où λ est une nouvelle constante. Cela entraîne

$$\frac{m' + \mu m}{1} = \frac{l' + \mu l}{\mu} = \lambda.$$

L'élimination de μ donne aussitôt l'équation du second degré

(31) $$\lambda^2 - (l + m')\lambda + 1 = 0.$$

La constante k de l'énoncé est $l + m'$; on a d'ailleurs

$$\mu = \frac{\lambda - m'}{m} = \frac{l'}{\lambda - l}.$$

Si $k^2 > 4$, les deux racines λ_1 et λ_2 (ou μ_1 et μ_2) sont réelles et distinctes ; on peut prendre pour nouveaux axes Ox et Oy les deux droites $y + \mu_1 x = 0$, $y + \mu_2 x = 0$; si θ est leur angle, on aura

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta,$$

(32) $$\begin{cases} X \equiv x(t + \pi) \equiv \lambda_1 x, \\ Y \equiv y(t + \pi) \equiv \dfrac{y}{\lambda_1}. \end{cases}$$

Aux zéros, ou points stationnaires de x (ou y) correspondent les points analogues de X (ou Y) ; dans un intervalle de longueur π, il y a un certain nombre (entier positif) D de zéros (et aussi de points stationnaires) de x [1] ; cela entraîne d'abord l'existence des nombres m et M puisque $A(t)$ est supposée réelle et régulière de $t = -\infty$ à $t = +\infty$: ici il suffira d'étudier $A(t)$ de t_0 à $t_0 + \pi$, pour obtenir m et M [$A(t)$ étant de plus supposée positive]; en se rappelant que l'écart de deux zéros successifs est compris entre $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$ et $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$ on peut écrire

(33) $$D\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leqq \pi \leqq D\frac{\pi}{\sqrt{m}}$$

ou, ce qui revient au même,

(34) $$m \leqq D^2 \leqq M.$$

---

[1] On verra plus bas que le nombre D est le même pour l'intégrale y (n° V).

Les nombres λ_1 et $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ sont distincts ; on peut supposer $|\lambda_1| < 1$; on voit d'ailleurs que $\lambda_1 > 0$ entraîne que D soit *pair* et que $\lambda_1 < 0$ entraîne D *impair;* les amplitudes des maxima de $|x|$ sont multipliés par $|\lambda_1|$ en passant de l'un au suivant. Ici la courbe (x, y) s'allonge de plus en plus du côté de l'axe des x en se rétrécissant de plus en plus dans la direction parallèle à Oy et les écarts $|\rho_2 - \rho_1|$ augmentent indéfiniment. (La transformation affine peut changer arbitrairement l'angle Ox, Oy.)

Si $k = +2$, on a $\lambda_1 = \lambda_2 = +1$ et il n'y a plus, pour répondre à la question, qu'une intégrale réelle, d'ailleurs périodique ; prenons la droite $y + \mu x = 0$ en question comme nouvel axe des x. On aura

$$(35) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &\equiv x(t+\pi) \equiv x(t) + my(t), \\ Y &\equiv y(t+\pi) \equiv y(t). \end{aligned} \right.$$

Dans un intervalle arbitraire $(t_0, t_0 + \pi)$ la fonction y a un nombre constant D *pair* de zéros (ou points stationnaires) et l'on a encore l'inégalité (34). La courbe (x, y) reste tangente à une série de D droites fixes parallèles à Ox ; elle coupe l'axe des x en D points fixes fournis par les racines de $y(t)$ comprises entre t_0 et $t_0 + \pi$; elle s'allonge de plus en plus parallèlement à Ox.

Si $k = -2$, on a $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ et il n'y a pas grand'chose de changé ; le nombre D est *impair* et les droites, parallèles à Ox, tangentes à la courbe (x, y) sont en nombre pair 2D, deux à deux symétriques par rapport à l'origine ; les points fixes où la courbe perce Ox sont également en nombre pair 2D et symétriques deux à deux par rapport à O ; les formules (35) sont remplacées par

$$(36) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &\equiv x(t+\pi) \equiv -x(t) + my(t), \\ Y &\equiv y(t+\pi) \equiv - y(t). \end{aligned} \right.$$

Pour ces deux cas $k = \pm 2$, les résultats énoncés se rapportent à $m \neq 0$; si m est nul, x et y sont périodiques toutes deux, ainsi que toutes les intégrales de (1) : période π si $\lambda_1 = +1$, demi-période π si $\lambda_1 = -1$, et la trajectoire (x, y) est parcourue périodiquement, en le temps π si $\lambda_1 = +1$, en le temps 2π si $\lambda_1 = -1$, et dans ce dernier cas l'origine est centre. Ce cas $k = \pm 2$, $m = 0$, exige que μ soit indéterminé, d'où $m = 0$, $l' = 0$, $m' = l = \lambda = \pm 1$.

Si $k^2 < 4$, les deux racines μ_1 et μ_2 (ou λ_1 et λ_2) sont distinctes, mais imaginaires conjuguées ; λ_1 et λ_2 ont pour module commun l'unité ; si les deux droites conjuguées imaginaires $y+\mu_1 x=0$, $y+\mu_2 x=0$ ne sont pas isotropes, on prend pour nouveaux axes Ox, Oy leurs bissectrices, qui sont réelles et bien déterminées. On a alors $\mu_1=-\mu_2=im_1$ où m_1 est réelle ; on écrit donc, avec une constante ω réelle,

$$(37)\qquad \begin{cases} Y+im_1 X=e^{i\omega}(y+im_1 x), \\ Y-im_1 X=e^{-i\omega}(y-im_1 x). \end{cases}$$

On a le droit d'effectuer la substitution de module unité

$$\left(x, y;\quad \frac{x_1}{\sqrt{m_1}},\quad y_1\sqrt{m_1}\right)$$

ce qui, supprimant les indices, ramène (37) à la forme plus simple

$$(38)\qquad \begin{cases} Y+iX=e^{i\omega}(y+ix), \\ Y-iX=e^{-i\omega}(y-ix), \end{cases}$$

qui correspond purement et simplement à une rotation de l'angle ω pour passer du point (x, y) au point (X, Y) ; la courbe γ précise étudiée se compose donc d'une infinité d'arcs congruents, ne différant les uns des autres que par une rotation d'amplitude ω autour de l'origine ; la fonction ρ^2 correspondante admet donc la période π. Si les droites $y+\mu_1 x=0$, $y+\mu_2 x=0$ sont isotropes, on a précisément la forme (38) sans intermédiaires.

Dans chaque cas $k^2>4$, $k^2<4$, $k^2=4$ nous avons mis en évidence *une* trajectoire particulière possédant des propriétés remarquables ; la transformation affine générale étant effectuée, on verra sans peine la modification de ces propriétés (le cas $k^2=4$, $m=0$ est exceptionnel).

La discussion complète prouve donc que la condition $k^2<4$ est *suffisante* pour trouver une solution ρ de (2) périodique, cette solution ρ étant unique d'ailleurs ; pour $k^2>4$, il n'en existe plus, donc $k^2\leqq 4$ est bien *nécessaire;* le cas $k^2=4$, *en général*, ne donne *aucune* solution ρ périodique ; *exceptionnellement* pour $k^2=4$ *toutes* les solutions de (2) peuvent être périodiques.

V. Quand on suppose $A(t)$ simplement positive, toujours comprise entre m et M, on voit aussitôt que les zéros de deux intégrales réelles *quelconques* de (1) se séparent ; en effet la trajectoire (x, y) est parcourue, toujours dans le même sens de rotation autour de l'origine ; la concavité est toujours tournée vers l'origine, de sorte que deux zéros consécutifs de x donnent deux points consécutifs communs à la courbe et l'axe Oy, l'un étant nécessairement sur la demi-droite Oy, l'autre sur la demi-droite opposée Oy' : en route on a rencontré nécessairement une fois et une seule $x'Ox$. D'ailleurs, si l'on prêfère raisonner analytiquement, on écrit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{c}{x^2}.$$

Si l'on suppose $c > 0$, on voit que $\frac{y}{x}$ reste continue entre deux zéros consécutifs de x, varie de $-\infty$ à $+\infty$ en croissant constamment ; elle s'annule donc une seule fois. Un intervalle (t_0, t_1) qui contient D zéros de x contient $D-1$, D ou $D+1$ zéros de y. L'écart de deux zéros consécutifs de x est au moins $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$, au plus $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$; on a nécessairement

$$\frac{(D-1)\,\pi}{\sqrt{M}} \leqq |\, t_1 - t_0 \,| \leqq (D+1)\,\frac{\pi}{\sqrt{m}}.$$

La dernière inégalité est obtenue en remarquant qu'un intervalle d'étendue $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$ contient au moins un zéro de x. On pourra écrire cette double inégalité sous la forme

$$\frac{\sqrt{m}}{\pi}\,|\, t_1 - t_0 \,| - 1 \leqq D \leqq \frac{\sqrt{M}}{\pi}\,|\, t_1 - t_0 \,| + 1. \tag{39}$$

Conséquence intéressante : soit des nombres successifs croissants

$$t_0, \quad t_1, \quad t_2, \quad \ldots, \quad t_{n-1}, \quad t_n, \quad \ldots, \tag{40}$$

et supposons qu'entre t_0 et t_1, x et y n'aient pas le même nombre de zéros : D pour x, $D-1$ pour y ; soit (t_{n-1}, t_n) le premier intervalle de la suite (40) consécutif à (t_0, t_1), $n \geqq 2$, où x et y n'ont pas le même nombre de zéros ; en étudiant (t_0, t_n) on voit que c'est y cette fois qui a un zéro *de plus* que x dans l'intervalle (t_{n-1}, t_n). Ce dernier résultat est intéressant quand $A(t)$ a la période π ; nous prendrons en effet la suite

$$t_0, \quad t_0+\pi, \quad \ldots, \quad t_0+(n-1)\,\pi, \quad t_0+n\pi, \quad \ldots, \tag{41}$$

et puisque $x(t)$, $x(t+\pi)$, ..., $x[t+(n-1)\pi]$ sont toutes intégrales de (1), si D est le nombre de zéros donné pour x par le premier intervalle (41), tout autre intervalle de la suite (41) en donne D, $D-1$ ou $D+1$; si les intervalles (41) ne donnent pas tous le même nombre D, ils donneront, avec certaines alternances, soit les deux nombres D et $D+1$, à l'exclusion de $D-1$, soit les deux nombres D et $D-1$ à l'exclusion de $D+1$. Si nous sommes dans le cas d'alternance des nombres D et $D+1$, il peut arriver que l'alternance ait lieu à chaque fois ; il peut arriver au contraire que plusieurs nombres consécutifs soient égaux : supposons que deux nombres D soient consécutifs (on raisonnerait de même si c'était deux nombres $D+1$) ; *un* intervalle de longueur 2π donne $2D$ zéros de x, et puisque 2π est période de $A(t)$, un intervalle *quelconque* $[t_0+h\pi, t_0+(h+2)\pi]$ ne peut donner que $2D$ ou $2D+1$ zéros, donc les nombres $D+1$ fournis par la suite (41) sont *isolés;* on voit, toujours suivant les mêmes principes, que le nombre des quantités D intercalées entre deux nombres $D+1$ est ou *fixe*, égal à un certain entier p, ou égal, avec certaines alternances, de temps en temps à p et de temps en temps à $p+1$, et l'on pourrait encore continuer dans cette voie.

Supposant toujours que $A(t)$ a la période π, il s'agit de préciser la formule (39), de montrer que dans l'intervalle (t_0, t_0+T), où T est positif arbitraire, le nombre N de zéros d'une intégrale *arbitraire* de (1) est de la forme

$$N = \alpha T + r, \tag{42}$$

où α est fixe, *indépendant de* T *et de l'intégrale adoptée*, et où r est *borné;* d'après ce qui précède, il suffit de l'établir pour *une* intégrale x, *choisie comme on voudra;* pour une autre ξ, r ou bien sera le même ou bien aura varié d'une unité. Pour fixer le choix de x, il est avantageux de séparer les deux cas $k^2 \geqq 4$ et $k^2 < 4$.

Soit le premier cas $k^2 \geqq 4$: il existe au moins une intégrale *réelle* x au multiplicateur λ réel (n° IV) et c'est celle-là que nous choisissons ; t_0 étant zéro de x, $t_0+\pi$ est un autre zéro que nous supposerons séparé de t_0 par $D-1$ autres zéros ($D \geqq 1$) : l'inégalité (39) est remplacée par l'inégalité plus précise (33) ou (34), déjà obtenue, que je rappelle

$$m \leqq D^2 \leqq M.$$

Cette fois un intervalle *quelconque* d'étendue π contient D zéros de x ; en écrivant

$$T = h\pi + \pi_1,$$

où h est un entier positif ou nul et π_1 un nombre positif inférieur à π, on a évidemment

$$N = hD + k,$$

où k est l'un des entiers o, 1, 2, ..., D — 1. Cela permet d'écrire

$$(43)\qquad \begin{cases} N = hD + k = \dfrac{T - \pi_1}{\pi} D + k = \alpha T + r, \\ \alpha = \dfrac{D}{\pi}, \qquad r = k - \dfrac{\pi_1}{\pi} D. \end{cases}$$

C'est le résultat annoncé ; r reste compris entre $-D$ et $D - 1$, s'il s'agit de x, entre $-(D + 1)$ et D s'il s'agit d'une autre intégrale ξ.

En passant, remarquons que $k^2 > 4$, sans égalité, donne une autre intégrale y au multiplicateur $\frac{1}{\lambda}$; dans un intervalle d'étendue π, y possède D' zéros et D' a pour valeur D, D — 1 ou D + 1. En prenant un intervalle d'étendue $n\pi$, où n est un entier arbitraire, y donne d'une part nD' zéros, de l'autre nD, $nD - 1$, ou $nD + 1$; donc $D' = D$. Pour $k^2 = 4$, dans le cas exceptionnel où *toutes* les intégrales de (1) ont le même multiplicateur $\lambda = \pm 1$. naturellement ceci s'applique encore.

Dans le cas $k^2 < 4$, utilisons la trajectoire particulière γ relative à la solution périodique ρ de (2) ; elle se compose d'une infinité d'arcs congruents, superposables par rotation de l'angle ω autour de l'origine. Remarquons qu'un arc de γ sur lequel l'angle polaire φ varie de φ_0 à $\varphi_0 + \pi$ coupe une fois et une fois seulement une droite *indéfinie* issue de l'origine et donne un zéro et un seul de l'intégrale x (x et y sont cette fois $\rho\cos\varphi$ et $\rho\sin\varphi$). Si donc ω est compris entre $n\pi$ et $(n + 1)\pi$, quand t augmente de π, donc φ de ω, on rencontre soit n, soit $n + 1$ zéros de x et tout est ramené à trouver l'accroissement Φ de φ quand t augmente de T ; on écrit toujours $T = h\pi + \pi_1$, de sorte que l'on a

$$\Phi = h\omega + \omega_1,$$

où ω_1 est compris entre o et ω. On écrit maintenant

$$h\omega = h_1\pi + \pi_2,$$

où h_1 est entier, positif ou nul, et où π_2 est compris entre o et π. Donc

$$\Phi = h_1\pi + \omega_1 + \pi_2.$$

Le nombre N résulte de ces accroissements $h_1\pi$, ω_1 et π_2 de φ ; le premier donne h_1 zéros de x, le second ω_1 en donne un nombre égal à l'un des entiers o, 1, ..., $n+1$; le dernier π_2 en donne zéro ou un. Donc

$$\mathrm{N} = h_1 + l,$$

l étant un entier de la suite o, 1, 2, ..., $n+2$. Or

$$h_1 = h\frac{\omega}{\pi} - \frac{\pi_2}{\pi} = \frac{\mathrm{T}-\pi_1}{\pi}\frac{\omega}{\pi} - \frac{\pi_2}{\pi},$$

$$(44)\qquad \begin{cases} \mathrm{N} = \mathrm{T}\dfrac{\omega}{\pi^2} + l - \dfrac{\pi_1\omega}{\pi^2} - \dfrac{\pi_2}{\pi}, \\ \alpha = \dfrac{\omega}{\pi^2}, \qquad r = l - \dfrac{\pi_1\omega}{\pi^2} - \dfrac{\pi_2}{\pi}. \end{cases}$$

Le résultat est encore établi ; r est borné, car il reste compris entre $n+3$ et $-\left(\frac{\omega}{\pi}+2\right)$ s'il s'agit d'une intégrale *arbitraire* ξ, entre $n+2$ et $-\left(\frac{\omega}{\pi}+1\right)$ s'il s'agit de x ou y.

Il est intéressant de comparer le résultat $\mathrm{N} = \alpha\mathrm{T} + r$ avec l'inégalité (39) que j'écris avec les nouvelles notations

$$(39')\qquad \frac{\sqrt{m}}{\pi}\mathrm{T} - 1 \leqq \alpha\mathrm{T} + r \leqq \frac{\sqrt{\mathrm{M}}}{\pi}\mathrm{T} + 1.$$

On en déduit

$$\frac{\sqrt{m}}{\pi} - \frac{1}{\mathrm{T}} \leqq \alpha + \frac{r}{\mathrm{T}} \leqq \frac{\sqrt{\mathrm{M}}}{\pi} + \frac{1}{\mathrm{T}}$$

et en faisant croître indéfiniment T on a

$$\frac{\sqrt{m}}{\pi} \leqq \alpha \leqq \frac{\sqrt{\mathrm{M}}}{\pi}.$$

Le cas $k^2 \geqq 4$ ne donne que l'inégalité (34) déjà obtenue directement, mais le cas $k^2 < 4$ donne le résultat intéressant

$$(45)\qquad \pi\sqrt{m} \leqq \omega \leqq \pi\sqrt{\mathrm{M}}.$$

VI. Le résultat demandé découle du n° IV; ici A est positif, compris entre le minimum $m = q^2 - q_1$ et le maximum $M = q^2 + q_1$; l'existence d'une solution non stable entraîne l'existence de l'entier D tel que, par l'inégalité (34), on ait

$$q^2 - q_1 \leqq D^2 \leqq q^2 + q_1.$$

Si donc le carré d'aucun entier n'est compris entre $q^2 - q_1$ et $q^2 + q_1$, toutes les solutions de (1) sont stables.

Note. — Je n'ai pas tout à fait suivi la marche proposée pour l'énoncé pour le n° II, tout au moins pour indiquer sous quelle forme les constantes R_0 et R'_0 figurent dans l'expression de R, intégrale générale de (2). On a, par dérivations et tenant compte de (2), avec trois constantes α, β, γ telles que $\alpha\gamma - \beta^2 = 1$

$$\begin{aligned} R^2 &= \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2, \\ RR' &= \alpha x x' + \beta(xy' + x'y) + \gamma y y', \\ R'^2 + \frac{c^2}{R^2} &= \alpha x'^2 + 2\beta x'y' + \gamma y'^2. \end{aligned}$$

La dernière équation s'obtient en dérivant la seconde, remplaçant RR'' par $\frac{c^2}{R^2} - AR^2$ et x'' par $-Ax$ et y'' par $-Ay$. Ces équations, pour $t = t_0$, donnent α, β, γ linéairement au moyen de R_0^2, $R_0 R'_0$, et $\frac{c^2}{R_0^2} + R_0'^2$. On a donc

$$(f) \qquad R^2 = R_0^2 u + R_0 R'_0 v + \left(R_0'^2 + \frac{c^2}{R_0^2}\right) w,$$

où u, v, w sont trois intégrales de l'équation du troisième ordre (12) donnée plus haut. Remarquons que, si nous développons les deux membres de (f) suivant les puissances croissantes de $t - t_0$, en remplaçant $2R_0R''_0$ par $\frac{2c^2}{R_0^2} - 2A_0R_0^2$, l'égalité des termes constants, des coefficients de $t - t_0$ et de $(t - t_0)^2$ ne peut avoir lieu, *quelles que soient* R_0 *et* R'_0, que si l'on a

$$\begin{array}{lll} u_0 = 1, & v_0 = 0, & w_0 = 0, \\ u'_0 = 0, & v'_0 = 2, & w'_0 = 0, \\ u_0 = -2A_0, & v''_0 = 0, & w''_0 = 2. \end{array}$$

et ces valeurs initiales fixent, *d'une façon unique*, les trois intégrales u, v, w de l'équation (12), *indépendantes de* R_0 *et* R'_0, qui doivent figurer dans la formule (f).