Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 29-32

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__29_1>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Soit l'équation différentielle totale*

$$(1) \qquad dU = P\,dx + Q\,dy,$$

$$P = \frac{(3x^2 - y^2)(x^2+y^2)}{2x^2y}, \qquad Q = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2+y^2)}{2xy^2}.$$

1° *Démontrer que* P *et* Q *vérifient la condition d'intégrabilité.*

2° *Intégrer l'équation* (1), *en choisissant la constante d'intégration de manière que* $U(1, 1) = 2$.

Considérons P *et* Q *comme les projections d'un vecteur* $\vec{P}$, *définissant un champ de vecteurs dans le plan* Oxy.

3° *Déterminer la forme des courbes de niveau du champ*

$$U(x, y) = C;$$

en supposant C *positif, on pourra passer en coordonnées polaires, en prenant comme pôle le point* O, *comme axe polaire la demi-droite bissectrice de* $\left(\widehat{Ox, Oy}\right)$; *comment la courbe de niveau*

$$U(x, y) = -C \qquad (C > 0]$$

se déduit-elle de la précédente ?

4° *Écrire l'équation différentielle des lignes de force du champ (trajectoires orthogonales des courbes du niveau). Intégrer cette équation. Indiquer un procédé géométrique simple permettant de déduire le réseau des lignes de force de celui des courbes de niveau.*

II. *On considère la surface définie paramétriquement par les équations*

$$x = u \cos v, \qquad y = u \sin v, \qquad z = uv.$$

1° *Déterminer la forme des courbes coordonnées*

$$u = \text{const.} \qquad \text{et} \qquad v = \text{const.};$$

en déduire à quel type connu appartient la surface.

2° *Déterminer l'intersection de la surface par un plan parallèle à* Oxy; *on pourra prendre, dans le plan, des coordonnées polaires : pôle, intersection* O' *du plan et de l'axe* Oz, *axe polaire, l'axe* $O'x'$, *parallèle à* Ox.

Calculer le rayon de courbure de la courbe et l'exprimer en fonction de la distance r *du point* M *à* O'.

Indications sur la solution. — I. La fonction U demandée est $\dfrac{(x^2+y^2)^2}{2xy}$, les courbes de niveau et les lignes de force sont les lemniscates

$$\rho^2 = C \sin 2\theta \qquad \text{et} \qquad \rho^2 = C \cos 2\theta,$$

qui sont symétriques les unes des autres par rapport à la bissectrice des axes.

II. 1° La surface est un cône dont les génératrices (v = const.) s'appuient sur des hélices circulaires (u = const.) tracées sur des cylindres d'axe Oz.

2° La courbe est la spirale $\rho\theta = h$.

Épreuve pratique. — I. *Soit la chaînette*

$$y = \operatorname{Ch} x;$$

soient P *un point de cette chaînette,* M *sa projection sur* Ox, A *le sommet de la chaînette.*

On considère le quadrilatère OAPM, *dont trois côtés sont rectilignes, le quatrième étant l'arc* AP *de chaînette.*

Déterminer l'abscisse x *du point* P *de telle manière que l'on ait la condition*

$$\overline{OM} + \widehat{AP} = \overline{OA} + \overline{MP}.$$

On donnera x *avec trois chiffres significatifs exacts.*

II. *Calculer les deux sommes*

$$S_n(x) = 1 + C_n^1 \cos x + C_n^2 \cos 2x + \ldots C_n^n \cos nx$$
$$T_n(x) = \quad C_n^1 \sin x + C_n^2 \sin 2x + \ldots C_n^n \sin nx$$

sous une forme calculable par logarithmes.

Se servir des expressions obtenues pour calculer leurs valeurs pour

$$n = 20, \qquad x = 30^\circ.$$

Nota. — *C_n^p désigne selon l'habitude le coefficient du binome*

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}.$$

Indications sur la solution. — I. L'équation à résoudre est

$$x - 1 = e^{-x}.$$

On la résoudra par la méthode de Newton, ou par approximations successives, au moyen des équations

$$x_1 - 1 = \frac{1}{e}, \qquad x_2 - 1 = \frac{1}{e^{x_1}}, \qquad \ldots, \qquad x_n - 1 = \frac{1}{e^{x_{n-1}}}.$$

II. On a

$$S_n + iT_n = (1 + e^{ix})^n = 2^n \cos^n \frac{x}{2}\left(\cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2}\right).$$

(Lille, juillet 1926.)

Epreuve théorique. — I. *Enveloppe d'une famille de courbes planes*

$$f(x, y, \alpha) = 0.$$

Application : $y^4 - 2\alpha y^2 + (x - \alpha)^2 = 0.$

C.84. — II. *Un point* M, *non pesant, de masse* m, *se meut sur un cercle de rayon* a. *Il est attiré en raison inverse du carré de la distance par deux points* A *et* B *situés dans le plan du cercle symétriquement par rapport au centre du cercle, à la distance* $2a$ *de ce centre.* A *exerce l'attraction* $-\frac{mk}{MA^2}$, B *l'attraction* $-\frac{mk\lambda}{MB^2}$.

1° *Positions d'équilibre et stabilité.*

2° *Pour* $\lambda = 8$, *calculer les périodes des petits mouvements.*

3° λ *étant égal à* 8, *on lance le mobile du point du cercle le plus voisin de* A *avec la vitesse* v_0. *Discuter le mouvement.*

4° *On remplace les attractions par des répulsions égales en valeurs absolues. Que devient la discussion de* 1° ? *Si* $\lambda = 8$, *et si on lance le mobile de l'une des positions d'équilibre stable avec la vitesse* v_0, *quelle est l'allure du mouvement ?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Pour chacune des équations suivantes on demande :* 1° *de trouver la solution générale;* 2° *de trouver la solution particulière qui s'annule ainsi que le plus grand nombre possible de ses dérivées successives pour* $x = 0$; 3° *le premier terme du développement de cette solution :*

(1) $$y'' - 3y' + 2y = e^{3x},$$

(2) $$y'' - 3y' + 2y = x,$$

(3) $$y'' - 2y' + 2y = 3\cos x - 2\sin x,$$

(4) $$y'' + 2y' + y = xe^{x},$$

(5) $$y'' + y = \cos^3 x,$$

(6) $$y'' - 2y' + y = xe^{x},$$

(7) $$y''' - 3y' + 2y = e^{2x},$$

(8) $$y''' - 3y' + 2y = e^{x},$$

(Bordeaux, juin 1926.)