NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. HADAMARD

Récents progrès de la géométrie anallagmatique

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 289-313

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__289_0>

RÉCENTS PROGRÈS DE LA GÉOMÉTRIE ANALLAGMATIQUE;

PAR J. HADAMARD.

(*Suite et fin.*)

III. — LES SYMÉTRIES DU SYSTÈME DE DEUX CERCLES.

16. Les propriétés précédentes découlent immédiatement de la notion de parataxie. Mais, comme nous l'avons dit, d'autres plus cachées et plus importantes se rattachent naturellement à la considération des transpositions admises par les cercles donnés.

Il est clair, en effet, que *chaque cercle perpendiculaire commun à deux cercles* C_1, C_2 (quelconques jusqu'à nouvel ordre) *est l'axe d'une transposition qui conserve ces deux cercles*, tout en en renversant le sens.

Réciproquement, sauf si les cercles donnés sont cosphériques ou en involution, on obtient ainsi toutes les rotations qui les conservent tous deux.

Dans le cas général, on voit qu'on a ainsi soit une, soit deux symétries communes à C_1 et à C_2.

Ceci rend tout d'abord intuitives les conséquences relatives à la variation de l'angle v_1 sous lequel C_2 est coupé par une sphère arbitraire $\mathfrak{S}$ menée par C_1. Deux telles sphères symétriques l'une de l'autre par rapport à un cercle perpendiculaire commun Γ donnant évidemment la même valeur de v_1, une sphère passant par Γ donne nécessairement un maximum ou un minimum.

Inversement, d'après le n° 9, deux sphères passant par C_1 et coupant C_2 sous le même angle sont nécessairement symétriques l'une de l'autre par rapport à un cercle perpendiculaire commun.

17. Supposons maintenant C_1 et C_2 *paratactiques*.

Il y a alors une infinité de cercles perpendiculaires communs; d'une manière plus précise, on peut se donner arbitrairement l'un des points a, $\bar{a}$ où un tel cercle coupe C_1 (l'autre étant évidemment l'opposé du premier).

Donc il y a une infinité de transpositions qui conservent chacun des deux cercles C_1, C_2; et, plus précisément, on peut en trouver une qui échange entre eux deux points m, n arbitrairement donnés sur C_1, ou encore, qui échange entre elles deux sphères $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}'_1$ arbitrairement données passant par C_1.

Donc enfin *deux sphères quelconques passant par* C_1 *coupant* C_2 *sous le même angle* (comme on le voit immédiatement en échangeant ces sphères l'une avec l'autre par la transposition dont nous venons de parler).

C'est le premier résultat fondamental de MM. von Weber, Vessiot et André Bloch.

18. Inversement, on obtient, de la manière la plus générale, deux cercles paratactiques par la construction suivante : deux cercles cosphériques et sécants C_1, $\mathcal{C}$ étant coupés par un cercle orthogonal commun Γ, on fait tourner (n° 6) C autour de Γ d'un angle égal à celui sous lequel se coupent $\mathcal{C}$ et C_1. La nouvelle position C_2 occupée par $\mathcal{C}$ après cette rotation est un cercle paratactique avec C_1 : car on leur connaît déjà deux cercles perpendiculaires communs, Γ et le lieu ϖ engendré, dans sa rotation autour de Γ, par un point d'intersection de C et de $\mathcal{C}$; et, de plus, les sphères (C_1, $\mathcal{C}$) et (C_1, ϖ) coupent C_2 sous le même angle, d'où (n° 9) l'existence d'un troisième cercle perpendiculaire commun, assurément distinct des deux premiers.

19. C_1 et C_2 étant supposés paratactiques et non conjugués, soient Γ_1, Γ_2 deux de leurs cercles perpendiculaires communs, non conjugués entre eux. Γ_1 et Γ_2 sont paratactiques, puisqu'ils admettent les cercles perpendiculaires communs C_1, C_2 non conjugués. Ils admettent donc, eux aussi, une infinité de cercles perpendiculaires communs C, tous paratactiques les uns aux autres.

La nouvelle série de cercles ainsi obtenue est indépendante du choix de Γ_1 *et de* Γ_2 parmi les diverses positions qu'ils peuvent occuper. On peut, en effet (avec la précaution de prendre opposés l'un de l'autre les points où le cercle variable $\mathcal{C}$ coupe à angle droit Γ_1) construire C par la méthode du numéro précédent en partant de C_1 et de Γ_1, et l'on voit ainsi qu'elle est indépendante de Γ_2. Semblablement, elle est indépendante de Γ_1.

En particulier, le conjugué de C_1, dans la série en question, est bien déterminé.

On a ainsi deux séries de cercles en relations parfaitement réciproques l'une avec l'autre, tout cercle de l'une étant perpendiculaire à tout cercle de l'autre. Chacune d'elles sera ce que nous appellerons (pour une raison qui apparaîtra dans la suite) une *série de Villarceau droite.*

Les deux cercles donnés, ainsi que tous ceux de la série dont ils font partie, sont conservés, mais avec inversion du sens, par l'une quelconque des transpositions Γ. Si maintenant on combine deux ou un nombre pair quelconque de telles transpositions, l'opération-produit conservera chacun des *cycles* C_1, C_2, C. Sans aborder immédiatement l'étude du groupe continu ainsi engendré, contentons-nous pour le moment de noter qu'il est transitif : il existe manifestement une de ses transformations qui change un point quelconque donné de C_1 en un autre point donné quelconque du même cercle, et, par conséquent aussi, il existe deux transformations de ce groupe changeant un quelconque donné des cercles perpendiculaires communs en un autre quelconque donné de ces cercles.

20. Après avoir parlé des opérations qui conservent chacun des cercles donnés, occupons-nous de celles qui les changent l'un dans l'autre.

Il existe une infinité d'opérations simples qui changent C_1 en C_2. Il est facile d'en donner une construction générale : l'une quelconque d'entre elles est le produit de deux inversions dont la première changera C_1 en un cercle γ cosphérique tant avec C_1 qu'avec C_2. Inversement, dès lors, en se donnant le cercle cosphérique γ, on construira immédiatement les deux inversions en question; d'une manière plus précise, si l'on s'est donné les deux *cycles* C_1, C_2 et que l'on se donne aussi le *cycle* γ, la construction sera parfaitement déterminée. Toutefois, on ne doit pas oublier que chaque opération peut être obtenue par une infinité de choix de ces inversions.

Il résulte de là aisément qu'il existe une opération de l'espèce considérée et une seule, qui, changeant C_1 en C_2, change un point donné a_1 de C_1 en un point donné a_2 de C_2.

21. Mais parmi les opérations précédentes, nous avons encore à considérer spécialement les *transpositions*, qui, changeant C_1 en C_2, changent également C_2 en C_1.

Soit G l'axe d'une telle transposition, que nous appellerons un *bisecteur* des deux cercles (ou, s'il y a lieu, des deux cycles) donnés. Tout cercle perpendiculaire commun à G et à C_1 sera également perpendiculaire à C_2 et, un tel cercle étant connu, on pourra trouver, de deux manières différentes (dont l'une au moins sera réelle), ses points d'intersection avec G, et, dès lors, obtenir G lui-même de deux ou de quatre manières différentes suivant que l'on se sera donné seulement les cercles ou, plus précisément, les cycles que l'on se propose d'échanger l'un avec l'autre.

Si les cercles donnés ne sont pas paratactiques, il n'y a que deux ou quatre solutions, déterminées comme nous venons de le dire. Mais dans le cas de parataxie des cercles donnés, nous ne savons pas *a priori* si C_1 et le cercle inconnu G auront ou non entre eux cette même relation. Dans le premier cas, tous les cercles perpendiculaires communs à C_1 et à C_2 seront aussi perpendiculaires à G, et ne fourniront qu'un seul et même système de deux ou de quatre solutions; il n'en sera rien dans le second, et le nombre des solutions sera infini.

Pour décider entre ces deux hypothèses, après avoir construit les deux points d'intersection p, p' d'un cercle perpendiculaire commun Γ avec G, remarquons que par l'un de ces points et, par conséquent, par les deux, puisqu'ils sont opposés, passe un cercle déterminé de la série de Villarceau droite (C_1, C_2); la transposition correspondante change nécessairement C_1 en un cercle de la même série coupant Γ aux mêmes points que C_2, c'est-à-dire (n° 18) en C_2 lui-même. Plus précisément, ce seront les deux *cycles* C_1, C_2 qui sont ainsi permutés puisqu'une telle transposition conserve tous les cercles de la série perpendiculaire.

Les deux solutions du problème sont ainsi obtenues pour deux cycles paratactiques : on voit qu'elles correspondent à la première des deux hypothèses précédemment envisagées.

Au contraire, c'est la seconde qui se présente evidemment pour deux cycles antitactiques. Dans ce cas, et dans ce cas seulement ([1]), on a une infinité de bissecteurs.

Dans ce cas aussi, et dans ce cas seulement, on a cette circonstance remarquable que *toutes les opérations simples qui transforment l'un des cycles dans l'autre sont des transpositions* d'après ce que nous avons vu au numéro précédent.

Nous appellerons encore *faux bissecteurs* de deux cycles paratactiques, les bissecteurs du premier cycle et du second renversé.

22. L'existence des transpositions (toutes deux réelles, d'ailleurs, dans ce cas), qui changent l'un dans l'autre deux cycles paratactiques, montre que les pieds d'un cercle perpendiculaire commun variable décrivent des divisions homographiques. La même conclusion appliquée à la série perpendiculaire exprime que le rapport anharmonique déterminé par les deux cercles donnés sur un cercle perpendiculaire commun est constant, comme l'ont noté les deux auteurs précités.

Le théorème énoncé par les mêmes auteurs, que *tout cercle cosphérique commun γ coupe C_1 et C_2 sous des angles égaux*, résulte de l'existence des faux bissecteurs, dont il existe toujours un perpendiculaire à γ.

IV. — Forme canonique des opérations sphériques. Opérations paratactiques.

23. C'est M. Goursat ([2]) qui, le premier, a remarqué que l'opération sphérique la plus générale pouvait être représentée par un produit de deux opérations simples (l'une au moins étant une rotation proprement dite) autour de deux cercles conjugués entre eux. Cette conclusion a été retrouvée également par MM. von Weber et André Bloch. Pour l'établir par voie purement géométrique, anallagmatique et réelle, nous allons avoir besoin d'autres formes intermédiaires données à l'opération la plus générale en question.

Il est bien connu que toute opération sphérique ω peut être,

([1]) Nous laissons de côté les cas spéciaux du n° 7.

([2]) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure,* 1889.

d'une infinité de manières, décomposée en quatre inversions. On peut aisément présenter la démonstration sous forme anallagmatique et même s'arranger pour que les deux premières sphères d'inversion soient sécantes entre elles, ainsi que les deux dernières, de manière à avoir affaire au produit de deux *rotations* proprement dites.

Notons tout de suite, en vue de notre résultat final, ce qui arrive dans le cas où l'on sait que l'opération sphérique donnée conserve un cycle donné C. On peut alors aisément diriger le raisonnement auquel il vient d'être fait allusion de manière à décomposer en une rotation autour de C et une opération simple conjuguée à C (produit de deux inversions par rapport à des sphères orthogonales à C); mais cette fois, la seconde opération simple pourra ne pas être une rotation proprement dite. Le fait que toute rotation anallagmatique conserve son axe et conserve aussi tout cycle conjugué trouve ainsi sa réciproque.

24. On a, en second lieu, le théorème suivant, tout analogue au résultat bien connu, relatif aux déplacements ordinaires :

Une transformation sphérique peut se représenter d'une infinité de manières par un produit de deux transpositions.

En partant de notre premier résultat, celui-ci se démontre sans difficulté par la même méthode qui a servi à Halphen dans le cas des déplacements ordinaires.

Remarque [1]. — Le résultat ainsi démontré n'a pas la même portée que dans cette dernière théorie, parce qu'il ne permet pas d'obtenir aisément le produit de deux opérations quelconques.

Il nous sera toutefois utile de noter qu'on peut très aisément combiner un nombre quelconque de rotations d'axes tous conjugués à un même cercle, grâce au fait que deux quelconques de ces axes sont toujours cosphériques entre eux.

---

[1] La décomposition en quatre inversions ou deux rotations pouvant se faire d'une infinité de manières, il en est de même de la construction du texte. Il n'en résulte pas en toute évidence qu'il en soit de même pour le résultat, c'est-à-dire pour la décomposition en deux transpositions; mais cela ressort au contraire immédiatement de notre résultat définitif (numéro suivant).

25. Du théorème qui vient d'être démontré, on déduit maintenant sans difficulté le théorème que nous avons en vue :

Théorème. — *Toute transformation sphérique est le produit* (évidemment permutable) *de deux opérations simples conjuguées entre elles.*

(L'une au moins de ces opérations est d'ailleurs une véritable rotation.)

En effet, l'opération étant, conformément à ce que nous venons de voir, décomposée en deux transpositions A_1, A_2, construisons les quatre sphères S_1, S'_1, S_2, S'_2 qui conduisent aux deux cercles Γ, Γ' perpendiculaires communs à A_1 et à A_2 : la première transposition est le produit des deux inversions S_1, S'_1 ; la seconde, celui des inversions S_2, S'_2. En vertu des relations d'orthogonalité qui existent entre les quatre sphères et des permutabilités qu'elles entraînent entre les inversions correspondantes, on arrive immédiatement à représenter l'opération par le produit de deux opérations simples d'axes respectifs Γ, Γ', une d'elles au moins étant une vraie rotation puisque l'un au moins des cercles Γ, Γ' est réel.

25 *bis*. Mais on voit aussi apparaître immédiatement le résultat remarquable de MM. von Weber et André Bloch : *il se peut que la décomposition precédente soit possible d'une infinité de manières.*

C'est ce qui arrivera en effet dès que les axes A_1, A_2 des deux transpositions seront paratactiques entre eux : il suffira de prendre pour Γ l'un des cercles perpendiculaires communs, à condition de prendre pour Γ' son conjugué. C'est *la transformation paratactique* de M. A. Bloch. Dans ce cas, les angles des deux rotations sont égaux entre eux : ils sont doubles de l'angle de parataxie de A_1 et A_2. Ceci nous renseigne en particulier sur le groupe continu envisagé au n° 19 : il est évidemment à un paramètre et obtenu par la variation continue de l'angle commun des deux rotations que nous venons d'obtenir, les axes conjugués restant fixes.

Pour l'angle de rotation π, chacun des cercles perpendiculaires communs est conservé, avec changement de l'un quelconque de ses points en son opposé. En un mot, on retombe ainsi sur l'*inversion négative fondamentale.*

26. Inversement, le produit de deux rotations égales autour de deux cycles Γ, Γ' conjugués entre eux est une transformation paratactique, conformément à la définition précédente.

Chaque série de Villarceau droite contenant Γ et Γ' donne, pour cette transformation, une infinité de décompositions canoniques.

Mais il existe une infinité de séries de Villarceau de cette espèce. Tout cercle A perpendiculaire commun à Γ et à Γ' définit une telle série, formée de cercles C perpendiculaires à A.

Γ et Γ' étant donnés, il passe un cercle A par un point arbitraire m de l'espace (cercle unique si m n'appartient ni à Γ ni à Γ') et la série de Villarceau qui en résulte contient également un cercle C qui est issu de m.

Donc, *notre transformation, produit de deux rotations conjuguées et égales entre elles, admet une infinité* DOUBLE *de représentations sous la forme canonique de M. Goursat.*

Elle laisse invariant chaque cercle d'une congruence (C); *il passe un cercle de* (C) *par un point quelconque de l'espace.*

C'est la *congruence paratactique* de M. A. Bloch.

Deux cercles (C) *quelconques sont paratactiques entre eux.*

Les cercles de la congruence sont conjugués deux à deux. Le produit de deux rotations égales quelconques autour de Γ *et de* Γ' *peut se remplacer par le produit analogue* (avec rotations de même angle) *autour de deux cercles conjugués pris arbitrairement dans la congruence.*

Tel est le beau théorème découvert par MM. von Weber et André Bloch, à l'aide de la considération des foyers et des génératrices imaginaires de la sphère imaginaire fondamentale (celle qui est orthogonale commune à Γ et à Γ').

27. Il est assez curieux de rattacher ce même résultat à un principe classique de la théorie des substitutions. On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que deux opérations R et T soient permutables entre elles est que R coïncide avec sa transformée par T, de sorte que, s'il en est ainsi, T coïncidera également avec sa transformée par R.

Prenons pour R notre produit Ω de deux rotations du même angle α autour de Γ et de Γ', et soit G un de leurs bissecteurs. Il est clair que la transposition G laisse invariante notre opération Ω. Donc d'après le principe qui vient d'être rappelé, celle-ci conserve la transposition G et, par conséquent, G lui même [1]. On a ainsi déjà une simple infinité de cercles invariants par l'opération Ω; mais si maintenant on remarque que, d'après ce qui vient d'être établi, cette dernière laisse invariante toute rotation d'axe G, on en déduira encore, par une nouvelle application du même principe, que Ω est invariante par une telle rotation et, par exemple, que, pour l'engendrer, on peut remplacer Γ et Γ' par leurs nouvelles positions après la rotation en question.

Les cercles de notre congruence sont les seuls qui soient invariants par l'opération lorsque son angle reste arbitraire : si, en effet, on fait varier cet angle, le transformé d'un point déterminé m de l'espace décrit un lieu parfaitement déterminé, lequel ne peut être autre que le cercle C de la congruence issu de ce point.

Les cercles de la congruence sont même les seuls qui soient invariants par l'opération Ω pour une valeur déterminée quelconque de l'angle α autre que π. Il ne peut passer par un même point de l'espace deux cercles différents invariants par l'opération Ω pour une valeur déterminée de son angle, pourvu que cette valeur ne soit pas un multiple de π : car on aperçoit immédiatement à ces deux cercles trois points communs.

Il en résulte que les décompositions, en nombre doublement infini, de notre opération en deux rotations conjuguées sont les seules qui existent.

28. Il y a lieu également d'établir que la décomposition en deux rotations conjuguées est unique toutes les fois que les angles de ces deux rotations ne sont pas égaux, c'est-à-dire que le produit de deux rotations conjuguées à angles inégaux et non multiples de π ne laisse invariant aucun cercle de l'espace autre que les axes. C'est à quoi on arrive sans difficulté en distinguant les cas d'un cercle perpendiculaire à l'un des axes, d'un cercle paratactique à l'un des axes, et d'un cercle ne présentant aucune de ces deux propriétés.

---

(1) L'hypothèse dans laquelle le sens sur G serait inversé par Ω est écartée du moment que le fait a lieu pour toute valeur de l'angle α.

Dans le même ordre d'idées, deux cercles distincts de la congruence ne sont jamais cosphériques et, par conséquent, un cercle de la congruence n'a dans celle-ci qu'un seul conjugué ([1]).

Une congruence paratactique est définie par deux quelconques de ses cycles conjugués (ou même par deux quelconques de ces cycles) : il en résulte qu'elle est transformée en elle-même par une rotation arbitraire autour d'un des cercles qui la composent.

Toutes les congruences de cette espèce sont d'ailleurs transformables les unes dans les autres par opérations sphériques. La figure que nous venons de définir est anallagmatiquement unique.

29. Il est encore intéressant de définir chaque cercle de la congruence précédente, non plus comme lieu d'un point variable, mais au contraire, par l'ensemble des sphères qui le contiennent.

L'opération paratactique, lorsque son angle n'est pas multiple de π, *ne laisse invariante aucune sphère, réelle ou imaginaire pure, autre que la sphère imaginaire fondamentale*, comme on le voit immédiatement en considérant les points limites d'une telle sphère et de la sphère fondamentale, et notant que l'opération en question, lorsqu'elle ne se réduit pas à l'opération identique, ne laisse aucun point réel ([2]) invariant.

Toute sphère orthogonale à l'inversion négative fondamentale contient un cercle de la congruence (et évidemment un seul), cercle que l'on déterminera comme intersection de la sphère donnée avec une de ses transformées.

V. — Propriétés de la cyclide de Dupin. Puissance réduite. Opérations permutables avec l'opération paratactique.

30. La *cyclide de Dupin*, anallagmatiquement équivalente au tore, peut être, comme lui, définie par la révolution d'un cercle autour d'un autre cosphérique avec lui. Si — seul cas qui interviendra dans ce qui va suivre, et qui correspond au tore véritable — les deux cercles sont sans point commun, la surface peut

([1]) Ceci ressort d'ailleurs immédiatement de ce qu'un cercle conjugué au cercle donné et orthogonal à la sphère imaginaire fondamentale est parfaitement défini par cet ensemble de conditions (Note ajoutée lors de la trad.).

([2]) On sait, au contraire, qu'elle conserve les foyers des différents cercles (C).

encore être définie en disant que tous ses points dérivent de l'un déterminé quelconque d'entre eux par deux rotations arbitraires (permutables entre elles) respectivement autour de deux cercles fixes Γ, Γ' conjugués entre eux (cercles principaux ou axes de la surface).

Lorsque les deux angles de rotation varient en restant égaux entre eux ou égaux et de signes contraires, ou, plus généralement, en gardant une différence ou une somme constante, le point mobile décrit sur la surface, d'après ce qui précède, un cercle. *C'est le théorème d'Yvon Villarceau*, dont la démonstration ainsi obtenue dégage ainsi la cause véritable et profonde.

31. Rappelons maintenant une notion remarquable qui appartient en propre à M. André Bloch : celle de la *puissance réduite* d'un point m par rapport à un cercle quelconque C de l'espace : on appelle ainsi le produit des deux distances maxima et minima du point m au cercle C, divisé par le diamètre du cercle. Le théorème démontré à cet égard par M. A. Bloch est que, dans une inversion quelconque, *la puissance réduite se retrouve, à un facteur près qui ne dépend que de l'inversion donnée et de la position du point m*, à l'exclusion de celle du cercle.

En conséquence, *le rapport des puissances réduites d'un même point m par rapport à deux cercles* C_1, C_2 *est un invariant anallagmatique*.

Je dois à une communication personnelle de M. A. Bloch une forme parfaitement anallagmatique de la définition et du théorème précédent : il suffit de remplacer le point m par une très petite sphère quelconque $\mathcal{M}$ tracée autour de ce point et de considérer le rapport anharmonique (constant) déterminé par $\mathcal{M}$ et le cercle donné C sur un cercle quelconque Γ orthogonal à l'une et perpendiculaire à l'autre. La *puissance réduite* est le quotient de ce rapport anharmonique par le diamètre de la petite sphère, lorsque le rayon de celle-ci devient infiniment petit, et, comme on le voit, le facteur par lequel elle est multipliée du fait d'une inversion n'est autre que l'inverse de la dilatation linéaire correspondant au point m (1).

---

(1) Il y aurait lieu de démontrer également sous forme anallagmatique, la relation que nous avons donnée, à la suite d'une communication de M. A. Bloch

Du théorème ainsi établi, il ressort que le rapport des puissances réduites d'un point cyclide de Dupin par rapport aux deux cercles principaux est constant. Pour affirmer que *le lieu des points tels que le rapport de leurs puissances réduites par rapport à deux cercle fixes* Γ, Γ' *conjugués entre eux soit constant, est une cyclide de Dupin* (au lieu de se composer de plusieurs cyclides), il n'y qu'à partir de la formule

$$k = \cot V, \tag{2}$$

qui exprime le rapport k des puissances réduites en fonction de l'angle de parataxie entre le cercle Γ et le cercle de la congruence (Γ, Γ') qui passe en m, et que l'on établit aisément (quoique je n'en aie pas obtenu de démonstration sous forme anallagmatique). k devant rester constant, il doit en être de même de V, d'où la conclusion demandée.

L'extension, donnée également par M. Bloch, du même théorème au cas où les cercles fixes, au lieu d'être conjugués, sont seulement paratactiques, dépend de principes auxquels nous arriverons un peu plus loin.

32. Nous avons précédemment noté que deux sphères orthogonales passant respectivement par deux cercles paratactiques donnés C_1, C_2 restent orthogonales lorsqu'on les fait tourner d'un même angle quelconque autour des deux cycles C_1, C_2. Plus généralement, deux sphères quelconques passant respectivement par C_1 et C_2 se coupent sous un angle qui reste constant lorsqu'on les fait tourner respectivement, autour des deux cycles en question, d'un même angle arbitraire α. Cette proposition (qui se déduit d'ailleurs aisément de la première par l'étude du trièdre formé en un point quelconque de C_1 par les tangentes à C_1, à un cercle perpendiculaire commun et au cercle d'intersection γ des sphères qu'il s'agit d'étudier) apparaît immédiatement d'après les principes posés dans la section précédente, les diverses positions de la

(*C. R. Ac. Sc., loc. cit*) entre la puissance réduite de m par rapport à C et la puissance réduite du même point par rapport à une sphère contenant ce cercle et qui, lorsque C se réduit à une droite, devient la relation habituelle entre les distances d'un point à une droite et à un plan mené par cette droite.

figure considérée dérivant les unes des autres par l'opération paratactique qui conserve à la fois C_1 et C_2.

M. André Bloch (*loc. cit.*, p. 57) l'énonce en la rattachant à une cyclide de Dupin dont C_1 et C_2 sont deux cercles de Villarceau du même système, γ étant un cercle variable du système opposé. On ne peut s'empêcher de relever avec lui ce qu'il y a de remarquable dans l'analogie qui existe entre ce théorème et la propriété classique de l'angle inscrit, surtout lorsqu'on y adjoint le fait que l'angle constant entre les sphères (γ, C_1) et (γ, C_2) est, comme il l'établit sans difficulté, la moitié de l'angle dont il faut faire tourner C_1 autour d'un des axes de la surface pour l'amener sur C_2.

33. Mais le problème posé au numéro précédent et celui de M. A. Bloch sont-ils équivalents? Le lieu du cercle γ est-il une cyclide de Dupin; et, en conséquence, est-il légitime de nommer *série de Villarceau* l'ensemble des positions de ce cercle, comme nous l'avons fait au n° 9 pour l'ensemble des cercles perpendiculaires communs? Nous allons pouvoir répondre par l'affirmative [1].

Nous partons de deux cercles paratactiques C_1, C_2 qui définissent une congruence paratactique, et d'un cercle p cosphérique commun γ, auquel nous faisons subir l'opération paratactique correspondante. Notons d'abord que, dans cette opération, tout point de γ décrit un cercle C de la congruence, de sorte que la surface engendrée est au moins doublement cerclée.

D'autre part, γ est perpendiculaire à un faux bissecteur déterminé H_0 de C_1 et de C_2 et invariant par la transposition correspondante. Toute autre position de γ dérivant de la première par deux transpositions autour de cercles perpendiculaires communs, il en résulte qu'elle peut aussi en être déduite par une transposition autour d'un faux bissecteur variable H, et inversement, toute transposition autour d'un faux bissecteur permute entre eux les cercles γ.

---

[1] On remarquera qu'on peut prendre pour C_1 et γ deux cercles quelconques se coupant en deux points m, $\overline{m}$, en prenant pour Ω l'une quelconque des transformations paratactiques qui conservent C_1 et ont m et $\overline{m}$ pour points opposés.

Prenons maintenant un sens sur γ. Soient Σ_1 la sphère par laquelle il faut inverser pour passer du cycle ainsi défini au cycle C_1; Σ_2, la sphère par rapport à laquelle il faut inverser pour passer du même cycle à C_2 *renversé*, c'est-à-dire au cycle $-C_2$ antitactique à C_1. L'ensemble de ces deux inversions étant une rotation qui change l'un dans l'autre les deux cycles C_1 et $-C_2$, il en résulte (n° 11) que les deux sphères Σ_1, Σ_2 se coupent à angle droit et suivant un faux bissecteur des cercles donnés. Dès lors, *l'inversion* Σ_1 *change* C_2 *en une des positions du cercle* γ.

Mais ce même raisonnement peut être recommencé en conservant, par exemple, le cercle C_1 et remplaçant C_2 par un quelconque des cercles C, trajectoires des divers points de γ, on voit que la série des γ est symétrique de la série des C par rapport à Σ_1 et, de même, par rapport à toute sphère Σ'_1 transformée de Σ_1 par notre opération Ω.

Dès lors le produit des deux inversions Σ_1, Σ'_1 conserve la congruence primitive, autrement dit, est permutable avec elle, ce qui exige que *le cercle d'intersection de* Σ_1 *et de* Σ'_1 *appartienne à cette congruence.*

De même, *toutes les positions successives de la sphère* Σ_2 *passent par un même cercle appartenant à la congruence* (C), *qui est d'ailleurs le conjugué du premier*, car il ressort de l'ensemble de ce qui précède que toute position de Σ_1 est orthogonale à toute position de Σ_2.

Les deux cercles conjugués ainsi obtenus sont les deux axes de la cyclide cherchée, et la démonstration du théorème est ainsi obtenue. Chacune des congruences C et γ peut être considérée comme définie par les cercles conjugués en question, mais avec des sens opposés sur l'un deux.

34. Le problème qui vient d'être résolu conduit naturellement à se poser le suivant :

Problème. — *Trouver tous les cas dans lesquels deux opérations sphériques sont permutables.*

Soient ω, ω' ces deux opérations. Supposons d'abord que l'une au moins d'entre elles, soit ω', ne soit pas paratactique. Alors elle aura, soit un axe (cas d'une opération simple), soit deux axes conjugués, les angles de rotation autour de ces axes étant inégaux. Dès lors, chacun de ces axes devra être invariant par ω : les conditions pour qu'il en soit ainsi découlent évidemment, soit des résultats que nous venons d'obtenir, soit de ceux du n° 8.

Venons maintenant au cas où les deux opérations considérées sont paratactiques. C'est le cas des deux opérations correspondant aux congruences (C), (γ) des numéros précédents, lesquelles sont bien permutables entre elles. Nous allons voir que la réciproque est vraie, c'est-à-dire que deux opérations paratactiques permutables entre elles correspondent à la même congruence [de sorte qu'elles diffèrent tout au plus par l'angle (¹)] ou ont entre elles les relations considérées au numéro précédent, c'est-à-dire peuvent se déduire d'un couple commun de cercles conjugués.

Tout d'abord, en effet, l'opération ω' doit laisser invariante l'inversion négative fondamentale de ω et, dès lors (n° 29), cette inversion négative fondamentale doit être la même pour les deux opérations. Soient alors C, γ deux cercles respectivement invariants par les deux opérations et ayant un point commun a. Il y a nécessairement un second point commun, l'opposé $\bar{a}$ de a. Si donc les deux opérations sont essentiellement différentes, et si, par conséquent, les deux cercles C et γ le sont (sauf peut-être pour des positions particulières de a), la congruence correspondant à ω' contiendra le cercle γ cosphérique à C et tous ses transformés par ω lorsqu'on fait varier l'angle de celle-ci. C'est bien la conclusion demandée.

Une opération sphérique quelconque ω', en général non paratactique, permutable avec ω, a nécessairement son axe ou ses axes dans la congruence C. On voit que cette conclusion subsiste lorsque ω' est paratactique, moyennant un choix convenable des axes en question.

L'opération ω', supposée permutable à ω, ne perd pas ce caractère si on la multiplie par une opération ω d'angle arbitraire. Moyennant cette modification, on voit qu'elle peut être réduite :

De deux manières, à une rotation unique autour d'un de ses axes;

(¹) Le cas de l'opération d'angle π, qui n'est autre que l'inversion négative fondamentale, doit être mis à part, et d'ailleurs est évidemment d'un examen facile.

D'une manière unique, à une opération Ω autour de ces deux axes à la fois.

Les opérations sphériques ω' permutables à une opération paratique donnée ω forment un groupe ponctuel continu à quatre paramètres. Chacune d'elles donne une certaine permutation entre les cercles C et le *groupe formé par ces permutations*, *isomorphe mériédrique du groupe des* ω', *est*, d'après ce que nous constatons, *à trois paramètres* (¹).

Ainsi lorsque l'on considère chacun des cercles C comme un élément unique, la figure qu'ils forment admet un groupe à trois paramètres de transformations en elle-même. Les éléments en question formant une infinité double, on reconnaît là la propriété fondamentale commune à la géométrie du plan et à celle de la sphère.

Le dernier anneau de la chaîne des déductions précédentes sera en effet l'identification de la géométrie des congruences C avec la géométrie sphérique.

VI. — La représentation sphérique de la congruence paratactique.

35. *Le lieu des symétriques d'un point donné a de l'espace par rapport aux cercles d'une même série droite de Villarceau est un cercle.*

Soient, en effet, C_0, C deux cercles de la série, l'un pris une fois pour toutes, l'autre variable; a'_0, a' les symétriques de a par rapport à ces deux cercles. a' dérive de a'_0 par deux transpositions successives autour de C_0 et de C, c'est-à-dire par une transformation paratactique autour de deux cercles conjugués γ, γ' de la série perpendiculaire, avec un angle 2α égal au double de l'angle de parataxie de C_0 et de C. Donc, lorsque α varie, le lieu de a' est bien un cercle γ_1 appartenant à la même congruence paratactique que γ et γ'. Sur ce cercle γ_1, d'ailleurs, a' peut encore être considéré comme déduit de a'_0 par une rotation unique d'angle 2α

(¹) Le groupe des opérations sphériques ω'' permutables avec le groupe ω' se réduit à l'ensemble du groupe ω' et d'une famille complémentaire formée des opérations ω'' qui inversent ω, les opérations ω'' étant d'ailleurs des transpositions.

autour du conjugué γ'_1 de γ_1, ou par une inversion par rapport à une sphère menée par γ_1 et faisant avec la sphère (γ_1, a'_0) l'angle α.

En conséquence, *le rapport anharmonique de quatre positions successives du point a' est le même que celui que forment, dans un plan, quatre directions définies par les valeurs correspondantes de α.*

Enfin, *les symétriques de a par rapport à deux cercles conjugués sont deux points opposés*, en vertu du n° 11.

36. *Le lieu des symétriques d'un même point a par rapport aux cercles d'une même congruence paratactique est une sphère.*

On peut tout d'abord déduire ceci de ce fait qu'une transposition par rapport à un cercle C de la congruence peut se représenter par le produit de deux inversions l'une par rapport à une sphère Σ qui passe par a et, par conséquent, aussi par son opposé, l'autre par rapport à une sphère Σ' orthogonale à Σ. Celle-ci, dérivant de la première par l'opération d'angle $\frac{\pi}{2}$, passe par les deux points b, $\overline{b}$ que l'on déduit de a par les deux opérations d'angle $+\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ respectivement.

Le lieu cherché est donc le lieu des inverses du point a par rapport à toutes les sphères qui passent par b et $\overline{b}$, à savoir la sphère S qui passe par a et qui appartient au faisceau déterminé par les sphères-points b, $\overline{b}$.

Mais on peut aussi rattacher le même résultat à celui qui vient d'être obtenu au numéro précédent. Soient C_1 le cercle de la congruence qui passe en a; C'_1, son conjugué; C, un troisième cercle arbitraire de la congruence déterminant avec les premiers une série droite de Villarceau. A cette série correspond (numéro précédent) un premier cercle appartenant au lieu, et qui passe par a ainsi que par son opposé $\overline{a}$. Ce cercle est invariant par la transposition C_1, car une telle transposition conserve la série de Villarceau : il est donc perpendiculaire à C_1 en a et en $\overline{a}$, d'où résulte en particulier qu'il est cosphérique avec C_1.

Il suffira de faire tourner autour de C_1 la série droite et, avec elle, le cercle qui vient d'être construit, pour obtenir toute la congruence et, par conséquent, tout le lieu cherché. On voit donc non seulement que ce lieu est une sphère, mais que cette sphère est celle qui passe par a et par C'_1, résultat que l'on aurait pu aussi obtenir en partant de notre première démonstration.

En particulier, pour a pris à l'infini, on voit que *le lieu des centres des cercles* C *est un plan*, le plan du cercle C_0 conjugué à la droite (unique) que contient la congruence, c'est-à-dire ayant cette droite pour axe.

Le point construit par M. A. Bloch (*loc. cit.*, p. 60) comme représentatif plan du cercle C n'est autre que le centre de ce cercle.

37. Les points opposés dérivant l'un de l'autre par une inversion négative déterminée, on peut soumettre la sphère S, lieu des symétriques du point a, à une inversion ou à une opération sphérique σ telle que ces points opposés deviennent des points diamétralement opposés ([1]). Sur la sphère S_0 ainsi obtenue :

1° *Toutes les séries droites de Villarceau appartenant à la congruence seront représentées par des grands cercles*, puisque les cercles d'une telle série sont conjugués deux à deux.

2° *La distance sphérique de deux points représentatifs est double de l'angle de parataxie des deux cercles* C *auxquels ils correspondent.*

Cette distance sphérique δ est, en effet, liée au rapport anharmonique h des deux points en question et de leurs opposés par la relation

$$h = -\operatorname{tang}^2 \frac{\delta}{2}, \tag{3}$$

et nous savons, d'autre part, que h n'est autre que le rapport anharmonique des quatre directions définies par les azimuts o, $\frac{\pi}{2}$, V, $\frac{\pi}{2} + V$, c'est-à-dire à ([2]) $-\operatorname{tang}^2 V$.

([1]) Cette condition sera remplie d'elle-même et, par conséquent, l'opération complémentaire inutile, si l'on a pris pour a l'un des pôles du cercle C_0 sur la sphère qui a ce cercle pour grand cercle.

([2]) La considération des points opposés permet, comme on le voit, de transporter dans le domaine réel l'expression de l'angle de parataxie par le rapport anharmonique des quatre génératrices sphériques (André Bloch, *loc. cit.* p. 59).

38. Une conséquence du résultat ainsi obtenu est tout d'abord que *la figure sphérique ainsi obtenue finalement est la même, quel que soit le point a dont on a pris les symétriques successifs.* Si, en effet, on s'est arrangé pour donner à la sphère finale le rayon 1, les deux figures correspondant à deux positions différentes du point a ne peuvent être qu'égales ou symétriques, puisque les distances des points homologues sont égales chacune à chacune; et c'est évidemment le premier cas qui est réalisé par raison de continuité [1]. Une *représentation sphérique* de notre congruence est ainsi parfaitement définie, représentation dans laquelle nous savons déjà que les séries droites de Villarceau donnent des grands cercles et que la distance sphérique de deux points représentatifs est double de l'angle de parataxie correspondant.

Une *série oblique* de Villarceau, engendrée par la révolution d'un cercle C de la congruence autour d'un autre cercle C appartenant également a celle-ci, donne un petit cercle de la sphère : c'est ce qu'on voit immédiatement, moyennant la possibilité que nous venons de constater de prendre à notre convenance le point a, en choisissant celui-ci sur l'axe de révolution; et réciproquement, tout petit cercle de la sphère est représentatif d'une série oblique.

39. La même remarque va nous permettre de compléter notre résultat du n° 37 en trouvant ce qui, dans notre congruence, correspond à l'angle de deux grands cercles de la sphère. Les deux grands cercles en question correspondent à deux séries droites ayant deux cercles conjugués communs C, C′. Il est clair que l'une des deux séries peut être amenée sur l'autre par une rotation d'un angle convenable autour de C et que cet angle peut être considéré comme celui que forment, suivant C, les deux séries en question. (L'angle suivant C′ serait, d'après ce qui précède, égal au précédent et d'ailleurs de sens contraire, en tenant compte des sens pris sur C et C′.) Or, en choisissant

[1] Il serait intéressant de définir, étant donnés deux points a et b, l'opération sphérique qui permet de transformer l'un dans l'autre les symétriques de ces deux points par rapport à un même cercle arbitraire de la congruence.

encore le point a sur C, nous voyons immédiatement que c'est cet angle, ou *angle dièdre des deux séries*, qui est égal à l'angle des deux grands cercles sur la sphère.

A chacune de nos deux séries correspond une série perpendiculaire. Soient, dans chacune de ces deux dernières, Γ_1, Γ_2 les deux cercles qui partent d'un point a de C : l'angle (Γ_1, Γ_2) sera l'angle plan du dièdre qui vient d'être defini, et mesurera, par conséquent, l'angle des deux grands cercles.

Avec les notations fondamentales précédentes, nous avons le moyen de traduire en propriétés de la congruence paratactique toutes les propriétés de géométrie sphérique, aussi bien que l'on peut faire éventuellement l'inverse.

Par exemple, à un couple quelconque de cercles A, B de la congruence correspondent deux bissecteurs conjugués G, G'. Considérons la série droite qui passe par ces deux bissecteurs et par un troisième cercle C de la congruence; et, de même, les séries droites qui passent par B et les bissecteurs de A, C, par A et les bissecteurs de B, C. Ces trois séries droites ont deux cercles conjugués communs. Si l'on modifie l'un des couples de bissecteurs, le premier par exemple, en remplaçant l'un des deux cercles A ou B, et un seul, par son conjugué, on a six bissecteurs qui appartiennent à une même série droite; etc.

D'autre part, et surtout, *on peut maintenant transporter à la géométrie de la congruence paratactique les diverses formules de la trigonométrie sphérique.*

Le lieu, également découvert par M. A. Bloch, des points dont le rapport des puissances réduites par rapport à deux cercles paratactiques (et non plus conjugués) donnés soit égal à un nombre donné k, se déduit immédiatement des mêmes considérations. En effet, tout d'abord, le rapport en question est constant le long de tout cercle de la congruence. Il résulte d'autre part, de nos données actuelles, qu'il est égal à celui des distances rectilignes entre le point représentatif du cercle en question et ceux des cercles donnés. Donc, le lieu cherché est représenté sur la sphère par un cercle, c'est-à-dire qu'il est une cyclide de Dupin.

Il nous intéressera de constater qu'une démonstration directe, sans intervention de la représentation sphérique, peut être fournie pour $k = 1$. On peut, en effet, immédiatement indiquer comme appartenant au lieu, c'est-à-dire ayant des puissances réduites égales par rapport aux deux cercles A et B :

1° Tous les points des bissecteurs G, G';

2° Tous les points de l'un quelconque H des faux bissecteurs.

Or ces derniers décrivent une cyclide de Dupin équilatère, qui est le lieu cherché (la démonstration qu'elle est le seul lieu restant toutefois à fournir) . On peut démontrer que la série droite tracée sur cette cyclide, et dont font partie G et $\overline{G}'$, est formée des axes des rotations qui changent A en B. Car si, par un point quelconque du lieu, on mène le cercle qui fait partie de la même congruence paratactique que A et B, ce cercle fera, avec A et B, des angles de parataxie égaux, d'où résulte aisément toujours en vertu de la construction du n° 18 qu'il sera l'axe d'une rotation permettant d'amener un point de A sur un point de B et, par conséquent, A sur B.

On voit immédiatement, à l'aide de la représentation sphérique, que deux séries droites quelconques appartenant à la congruence ont toujours en commun deux cercles conjugués l'un de l'autre. Si l'on démontrait ce résultat directement, on aurait, en le combinant avec celui que nous venons d'obtenir, une construction directe de la cyclide de Dupin passant par trois cercles donnés quelconques de la congruence.

40. Une telle construction permettrait, comme nous allons le voir, de retrouver sous une autre forme les résultats précédents, par une voie exactement inverse de celle que nous avons suivie précédemment et en commençant par démontrer les relations trigonométriques.

Considérons la figure — sorte de prisme — formée par trois cercles de la cougruence et les séries droites qui les joignent deux à deux (ou, exactement, des portions de ces séries droites, chacune des séries étant divisée en quatre parties par les cercles considérés et une seule de ces parties étant retenue chaque fois). Sur une telle figure, nous pourrons nous proposer d'établir directement les relations classiques de la trigonométrie sphérique.

La démonstration est plus simple en supposant le prisme isoscèle, c'est-à-dire deux des angles de parataxie égaux entre eux : l'intérêt de la remarque du numéro précédent est précisément que le cas général peut se ramener à celui-là par décomposition (additive ou soustractive) du prisme quelconque en prismes isoscèles. Soient donc A, B, B' trois cercles paratactiques les uns aux autres, B' se déduisant de B par une rotation d'angle 2α autour de A (de sorte que 2α est un des angles du prisme). B et B' étant ainsi deux cercles de Villarceau d'une même cyclide ayant A pour un de ses axes, soit C un cercle de Villarceau de la série opposée, lequel coupe B en un point b ainsi qu'en son opposé $\bar{b}$, et B' en b'. Ces cercles et ces sphères étant tous orthogonaux à la sphère imaginaire fondamentale, on peut d'ailleurs, sans diminuer la généralité, les réduire, si l'on veut ([1]), à des droites et à des plans : il suffira de soumettre toute la figure à une inversion de pôle $\bar{b}$. Droites et plans pourront être représentés par leurs traces sur une sphère de centre b. Il suffira d'appliquer les formules classiques de la trigonométrie sphérique aux diverses directions ainsi issues de b.

Une première relation donnant l'angle V de parataxie de B, B', savoir

$$\sin V = \sin\alpha \sin\omega,$$

dans laquelle l'angle $\omega = (B, C)$ est double de l'angle de parataxie de A, B, a déjà été écrite par M. A. Bloch (*loc. cit.*, p. 58). Elle doit être, à notre point de vue, complétée par une autre donnant le « dièdre » $\hat{B}$ suivant B, c'est-à-dire l'angle d'un cercle $b\beta$ perpendiculaire commun à B, B' avec un cercle $b\nu$ perpendiculaire commun à B, A. On trouve aisément

$$\sin\hat{B} = \frac{\cos\alpha}{\cos V} = \frac{\sin\omega \sin 2\alpha}{\sin 2V}.$$

Les deux relations précédentes (dont la seconde a également lieu pour le dièdre en B') donnent l'ensemble des relations entre les six éléments, « faces » et « dièdres », du prisme. Or ce sont les mêmes relations qui subsistent entre les éléments d'un triangle isoscèle ayant pour angle au sommet 2α, pour angles à la base $\hat{B}$ pendant que les côtés sont ω, ω, $2V$, c'est-à-dire les doubles des dièdres.

([1]) Ceci n'a d'ailleurs d'autre avantage que de simplifier la figure. Il n'y a rien là qui empêche les raisonnements de rester anallagmatiques.

L'identité entre les deux Trigonométries s'étend, comme nous l'avons dit, du prisme et du triangle isoscèles au prisme et au triangle quelconques. Ceci fait, on pourra en déduire la représentation sphérique de la congruence en définissant un cercle quelconque de celle-ci par ses coordonnées polaires rapportées à un premier cercle fixe, et lui faisant correspondre le point de la sphère qui a mêmes coordonnées, compte tenu de la relation entre distances sphériques et angles de parataxie.

41. Cette seconde méthode est donc équivalente à la première, à ceci près qu'elle ne donne pas une construction aussi claire et aussi géométriquement définie de la représentation sphérique. Mais, par contre, elle conduit, en outre, à un élément nouveau qui mérite peut-être d'être remarqué, à savoir celui qui correspond à l'*aire* du triangle sphérique.

M. Cartan (¹) a attiré l'attention sur l'intégrale curviligne

$$\int_C \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz$$

que l'on peut attacher à un pinceau quelconque pris dans une congruence donnée, et dans laquelle α, β, γ sont, en un point quelconque, les cosinus directeurs de la direction que la congruence fait correspondre à ce point, et sur le fait que cette intégrale, — en relation connue, dans le cas des congruences rectilignes, avec l'existence de surfaces normales à la congruence, — peut, lorsqu'elle est prise le long d'un contour fermé, se remplacer par une intégrale double étendue au pinceau des lignes de la congruence intérieures au contour. Comme il l'a remarqué également, la propriété fondamentale de cette intégrale peut s'exprimer de la façon suivante : « Partons d'un point d'une des droites qui limitent le pinceau et considérons la trajectoire orthogonale issue de a des droites limites : en général elle ne reviendra pas au point a, mais coupera de nouveau la première droite en un certain point différent de a. » Le contraire aura évidemment lieu si l'on a affaire à une congruence de normales. Ce caractère géométrique, ainsi énoncé par M. Cartan pour les congruences de droites, s'étend de

(¹) *Bull. Soc. math. Fr.*, t. XXIV, 1896, p. 160.

lui-même aux congruences de courbes : il traduit, comme on le voit, le fait que la congruence n'est pas normale à une famille de surfaces, par un certain « décalage » entre les points de départ et d'arrivée d'une trajectoire orthogonale faisant le tour d'une petite surface tubulaire formée de lignes de la congruence, et c'est ce décalage qui peut s'exprimer par une intégrale double.

C'est précisément ainsi que nous allons procéder pour notre congruence actuelle, en partant du prisme triangulaire curviligne considéré dans ce qui précède. Par un point arbitraire a pris sur le premier de nos trois cercles, traçons le cercle perpendiculaire commun à ce premier cercle et au second, de manière à couper celui-ci en un point b (1); par celui-ci, traçons de même l'arc de bc perpendiculaire commun au second et au troisième cercle donnés, puis par c, l'arc de cercle ca_1 perpendiculaire commun au troisième cercle donné et au premier. Si — ce qui ne sera pas le cas — notre congruence était normale à une famille de surfaces, le point a_1 coïnciderait avec a. Sinon, il y a lieu de considérer le décalage entre ces deux points : nous porterons notre attention sur le décalage *angulaire*, c'est-à-dire sur l'angle de l'opération Ω qui permet de passer de a à a_1, autrement dit sur l'angle dont il faut faire tourner l'un de ces points pour l'amener sur l'autre, autour du conjugué du cercle qui les porte.

Un tel angle est indépendant de la position du point a sur le premier cercle, ainsi que du choix de celui-ci parmi les trois qui sont donnés; de plus, si un prisme de l'espèce que nous considérons est formé de deux autres adjacents entre eux, l'angle de décalage relatif au prisme somme est la somme des angles correspondant aux prismes partiels, conformément à la remarque générale de M. Cartan.

Un tel angle, étant, d'autre part, invariant par toute transformation qui, sur notre représentation sphérique de la congruence, se traduit par une rotation, doit être proportionnel à l'aire du triangle sphérique dont les sommets sont les représentations des cercles donnés.

On constate en effet (en raisonnant toujours par projection

(1) Le point b, de même que chacun des points c, a_1, peut avoir deux positions opposées, de sorte que le décalage étudié n'est, jusqu'à nouvel ordre, défini qu'à π près. Le raisonnement du texte pourrait sans doute être utilement précisé sur ce point.

gnomonique sur la sphère de centre b) qu'*il est* (toujours à π près) *la moitié de cet aire.*

42. Par l'une quelconque des deux voies précédentes, nous établissons l'identité entre la Géométrie des figures empruntées à notre congruence et la Géométrie sphérique.

Une sorte de projection de l'espace sur la sphère est ainsi opérée par l'intermédiaire des cercles C. C'est un fait imprévu et remarquable que l'existence d'une pareille projection, si profondément différente des deux projections classiques, projection orthogonale sur le plan et projection gnomonique sur la sphère, qui partagent avec elle cette propriété que la congruence des projetantes admet ∞^3 transformations en elle-même.

A noter que, contrairement aux deux premières, la nouvelle méthode de projection donne un résultat unique et déterminé pour chaque point, à distance finie ou à l'infini, de l'espace.

Notre représentation sphérique est d'ailleurs celle même que l'on doit à M. André Bloch, lequel, dans le Mémoire cité, énonce, comme nous l'avons fait ci-dessus, des relations de correspondance entre les propriétés de la congruenc paratactique et les théorèmes de la Géométrie classique. Mais, fait non moins digne d'attention que les précédents, *les correspondances ainsi établies ne sont pas les mêmes de part et d'autre.*

M. A. Bloch n'envisage pas l'angle dièdre introduit ci-dessus entre les séries droites (AB) et (AC), mais bien, a étant un point quelconque de A, l'angle sous lequel se coupent les deux sphères (a, B) et (a, C), angle différent du premier, et qui partage seulement avec lui la propriété d'être indépendant de la position du point a sur A. Cet angle n'est donc pas égal à un angle du triangle sphérique representatif : mais (A. Bloch, *loc. cit.*, p. 59) il est égal à un angle *du triangle rectiligne de mêmes sommets.*

En particulier, comme nous l'avons noté précédemment, la considération de ce même angle entre deux sphères a fourni à l'auteur des résultats analogues aux propriétés de l'angle inscrit, c'est-à-dire à des théorèmes de Géométrie *plane.*

Cette double analogie avec deux chapitres différents de la Géométrie classique n'est pas, pour qui veut réfléchir, ce qu'il y a de moins remarquable dans la théorie ainsi découverte.