Agrégation des sciences mathématiques (session de 1927)

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 272-287
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__272_0>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (SESSION DE 1927).

Mathématiques spéciales.

On donne deux droites (D), (D′) *non situées dans un même plan. L'axe* Oz *est placé sur la perpendiculaire commune à ces deux droites, l'origine* O *en son milieu, les axes* Ox, Oy *sont parallèles aux bissectrices de l'angle de ces deux droites.*

On propose d'étudier le complexe des droites (A), *telles que chacune d'elles soit l'axe central d'un complexe linéaire auquel appartiennent* (D) *et* (D′).

1° *On déterminera le cône* C *engendré par les droites* (A) *qui passent par un point quelconque* S *de l'espace et l'enveloppe* Γ *de celles de ces droites qui sont situées dans un plan quelconque* Π. *L'enveloppe* Γ *est une parabole dont on placera le foyer.*

2° *Existe-t-il un point* S *et un plan* Π, *à distance finie ou infinie, tels que toutes les droites passant par* S, *ou situées dans* Π, *appartiennent au complexe des droites* (A)?

Existe-t-il des quadriques, et des complexes linéaires, tels que toutes les droites conjuguées (ou polaires) de toutes les droites (A), *par rapport à l'une quelconque de ces quadriques, ou par rapport à l'un quelconque de ces complexes linéaires, appartiennent à ce même complexe des droites* (A)?

3° *Trouver le lieu des positions particulières du point* S, *à distance finie ou infinie, pour lesquelles le cône* C *se décompose en deux plans, et l'enveloppe des plans* Π *pour lesquels l'enveloppe* Γ *se décompose en deux points.*

Ce lieu et cette enveloppe ont une partie commune Σ. *Dans les cas de décomposition, on placera par rapport à* Σ *les deux plans ou les deux points de la décomposition.*

4° *Lorsque* S *est sur* Σ, *le cône* C *se décompose en deux plans* T_1, T_2, *lesquels se coupent suivant une droite* Δ; *trouver les plans tangents à* Σ *menés par cette droite* (Δ).

Lorsque Π *est tangent à* Σ, *l'enveloppe* Γ *se décompose en deux points* I_1, I_2 *qui définissent une droite* (Δ'); *trouver les points d'intersection de* Σ *et de cette droite* (Δ').

Démontrer que les droites (Δ) ou (Δ') *sont tangentes à deux surfaces conoïdes, dont on déterminera le degré et les sections par des plans contenant* Oz *ou perpendiculaires à* Oz.

On indiquera comment les points I_1, I_2 *se placent par rapport aux points de contact de* (Δ') *avec ces deux surfaces conoïdes, comment les plans* T_1, T_2 *se placent par rapport aux plans tangents à ces surfaces en leurs points de contact avec la droite* (Δ).

SOLUTION PAR M. BERTRAND GAMBIER.

1° La droite (D) est définie par le point $(0, 0, h)$ et ses paramètres directeurs $(1, \mu, 0)$, de sorte qu'elle a pour coordonnées plückeriennes

$$(1) \qquad 1, \quad \mu, \quad 0, \quad -h\mu, \quad h, \quad 0.$$

Un complexe linéaire d'axe central (A) peut être défini d'abord par un vecteur porté par (A), de coordonnées plückériennes,

$$(2) \qquad a, \quad b, \quad c, \quad l, \quad m, \quad n,$$

avec les notations consacrées [a, b, c, composantes du vecteur; l, m, n, moments par rapport aux axes Ox, Oy, Oz], puis par un couple d'axe (A), correspondant aux éléments de réduction habituels pour les systèmes de vecteurs

$$(3), \qquad 0, \quad 0, \quad 0, \quad ta, \quad tb, \quad tc,$$

où t est un paramètre numérique; le complexe linéaire correspondant est formé par les droites de moment nul relativement au système de vecteurs formé par la réunion du vecteur (2) et du couple (3), soit

$$(4) \qquad a, \quad b, \quad c, \quad l+ta, \quad m+tb, \quad n+tc.$$

En écrivant cette condition pour (D) on a

$$(5) \qquad l+ta+(m+tb)\mu-h\mu a+hb=0.$$

La droite (D') donne l'équation analogue à (5), obtenue en changeant h et μ simultanément de signe. On a ainsi les deux équations

$$(6) \qquad l - ah\mu + ta = 0, \qquad m\mu + hb + t\mu b = 0.$$

En éliminant le paramètre auxiliaire t, on obtient l'équation du complexe des droites (A)

$$(7) \qquad bl - am - kab = 0,$$

où l'on a, pour simplifier, écrit

$$(8) \qquad k = h\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right) = \frac{h}{\sin\varphi\cos\varphi},$$

φ étant l'angle de Ox avec D, ou le demi-angle (D′, D). Remarquons tout de suite que le couple (D, D′) peut être remplacé par ∞^1 autres couples, engendrant, d'après la définition même de k, le conoïde droit de Plücker Σ

$$(9) \qquad \frac{z(x^2+y^2)}{xy} = k$$

qui joue, d'après cette remarque, un rôle important relativement au complexe; nous retrouverons Σ plus loin.

Une droite du complexe (A) peut être définie par un point (x, y, z) et ses paramètres (a, b, c), de sorte qu'elle a pour coordonnées plückériennes $(a, b, c;\ cy - bz,\ az - cx,\ bx - ay)$. On a donc l'équation équivalente à (7)

$$(7') \qquad b(cy - bz) - a(az - cx) - kab = 0.$$

Si donc nous laissons le point à distance finie (x, y, z) fixe, ce que nous traduirons par l'indice o donné à (x, y, z), nous avons l'équation du cône C de sommet $S(x_0, y_0, z_0)$:

$$(10) \qquad z_0(a^2 + b^2) - y_0 bc - x_0 ca + kab = 0.$$

Si nous laissons au contraire (a, b, c) fixes, ce que nous traduirons par l'indice o donné à (a, b, c), nous avons l'équation du cylindre parallèle à la direction (a_0, b_0, c_0) :

$$(11) \qquad a_0 c_0 x + b_0 c_0 y - (a_0^2 + b_0^2) z - k a_0 b_0 = 0.$$

Ce cylindre se réduit à un plan; en réalité, comme ce cylindre est ce que devient le cône C quand son sommet s'éloigne à l'infini, nous devrons considérer le cylindre comme formé du plan (11) et du plan de l'infini.

Pour avoir l'enveloppe Γ des droites (A) situées dans le plan (u_0, v_0, w_0, s_0) on se rappellera les coordonnées pluckériennes d'une droite définie par les deux plans

$$(12)\quad \begin{cases} u_0, & v_0, & w_0, & s_0 \\ \mathrm{U}, & \mathrm{V}, & \mathrm{W}, & \mathrm{S}, \end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} v_0\mathrm{W} - w_0\mathrm{V} \quad w_0\mathrm{U} - u_0\mathrm{W}, \quad u_0\mathrm{V} - v_0\mathrm{U}, \quad s_0\mathrm{U} - u_0\mathrm{S}, \quad s_0\mathrm{V} - v_0\mathrm{S}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad s_0\mathrm{W} - w_0\mathrm{S}. \end{cases}$$

Nous avons ainsi l'équation tangentielle

$$(14)\quad \begin{aligned} &(w_0\mathrm{U} - u_0\mathrm{W})(s_0\mathrm{U} - u_0\mathrm{S}) - (v_0\mathrm{W} - w_0\mathrm{V})(s_0\mathrm{V} - v_0\mathrm{S}) \\ &\qquad - k(v_0\mathrm{W} - w_0\mathrm{V})(w_0\mathrm{U} - u_0\mathrm{W}) = 0. \end{aligned}$$

C'est une parabole parce que le coeficient de S^2 est nul; d'après la théorie des coniques dans l'espace à *deux* dimensions, transportée dans l'espace à *trois* dimensions, on mettra cette équation (14) sous la forme canonique

$$(14')\quad \begin{aligned} &\lambda[x_1\mathrm{U} + y_1\mathrm{V} + \mathrm{W}][x_2\mathrm{U} + y_2\mathrm{V} + \mathrm{W}] \\ &\quad + [v_0(v_0\mathrm{W} - w_0\mathrm{V}) - u_0(w_0\mathrm{U} - u_0\mathrm{W})][\xi\mathrm{U} + \eta\mathrm{V} + \zeta\mathrm{W} + \mathrm{S}] = 0. \end{aligned}$$

Les deux crochets, multiplicateurs de λ, sont les équations tangentielles des points cycliques $(x_1, y_1, 1, 0)$ et $(x_2, y_2, 1, 0)$ du plan (u_0, v_0, w_0, s_0); dans le second groupe de termes, le premier crochet est l'équation tangentielle du point à l'infini sur l'axe de la parabole (14), obtenue en prenant dans (14) les termes en S et enfin le dernier crochet est l'équation tangentielle du foyer $(\xi, \eta, \zeta, 1)$ cherché. En identifiant (14) et (14′), où les termes en S sont les mêmes, on a, en prenant les termes en U^2, V^2, W^2 les équations

$$(15)\quad \begin{cases} \lambda x_1 x_2 - u_0 w_0 \xi = w_0 s_0, \\ \lambda y_1 y_2 - v_0 w_0 \eta = w_0 s_0, \\ \lambda + (u_0^2 + v_0^2)\zeta = k u_0 v_0, \end{cases}$$

auxquelles on adjoint

$$(16)\qquad u_0\xi + v_0\eta + w_0\zeta + s_0 = 0.$$

On a ainsi quatre équations linéaires aux inconnues ξ, η, ζ, λ.

D'ailleurs $(x_1, y_1, 1, 0)$ s'obtient par le système

$$u_0 x_1 + v_0 y_1 + w_0 = 0, \qquad x_1^2 + y_1^2 + 1 = 0,$$

d'où

$$(17)\qquad \begin{cases} (u_0 x_1 + w_0)^2 + (x_1^2 + 1) v_0^2 = 0, \\ x_1 x_2 = \dfrac{v_0^2 + w_0^2}{u_0^2 + v_0^2}, \qquad y_1 y_2 = \dfrac{u_0^2 + w_0^2}{u_0^2 + v_0^2}. \end{cases}$$

Ajoutant les deux premières équations (15) et tenant compte de (16) on a

$$(18)\qquad \frac{\lambda[u_0^2 + v_0^2 - 2w_0^2]}{u_0^2 + v_0^2} - w_0^2 \zeta = w_0 s_0,$$

de sorte que la dernière (15) et (18) donnent λ et ζ. Le calcul s'achève sans difficulté et donne

$$(19)\qquad \begin{cases} \lambda[u_0^2 + v_0^2 + w_0^2] = [s_0(u_0^2 + v_0^2) - k u_0 v_0 w_0] w_0, \\ \xi = \dfrac{-s_0 u_0}{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2} - \dfrac{k v_0 w_0 (v_0^2 + w_0^2)}{(u_0^2 + v_0^2)(u_0^2 + v_0^2 - w_0^2)}, \\ \eta = \dfrac{-s_0 v_0}{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2} - \dfrac{k u_0 w_0 (v_0^2 + w_0^2)}{(u_0^2 - v_0^2)(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)}, \\ \zeta = \dfrac{-s_0 w_0}{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2} - \dfrac{k u_0 v_0 (u_0^2 - v_0^2 + 2 w_0^2)}{(u_0^2 + v_0^2)(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)}. \end{cases}$$

Ce calcul suppose $w_0 \neq 0$, car on a eu à simplifier des fractions où w_0 est en facteur haut et bas; mais le résultat du calcul continue à être vrai pour $w_0 = 0$: d'ailleurs dans ce cas l'équation (14) se décompose en deux facteurs : $W = 0$, qui donne le point à l'infini sur Oz, et un autre facteur, équation tangentielle d'un point qui est le foyer à distance finie. Je n'indique pas ce qui arrive pour les plans isotropes $(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2 = 0)$ ni pour les solutions imaginaires de $u_0^2 + v_0^2 = 0$; je signale simplement que si $u_0 = v_0 = 0$, autrement dit s'il s'agit d'un plan horizontal, l'équation (14) se réduit à $s_0(U^2 + V^2) + k w_0 UV = 0$, de sorte que l'on obtient deux points à l'infini et qu'il n'y a plus à parler de foyer : les droites du complexe (A) situées dans un plan horizontal sont perpendiculaires aux génératrices de la surface Σ contenues dans ce plan.

2° Si le point S est à distance finie, l'équation du cône C n'est jamais indéterminée; si S est à distance infinie, il n'y a indétermination, pour le plan indiqué plus haut, que si le point S s'éloigne dans la direction Oz; toutes les droites parallèles à Oz sont des droites du complexe (A). L'équation de Γ n'est indéterminée que si $u_0 = v_0 = w_0 = 0$, comme on le voit aisément en regardant les termes en U^2, V^2, W^2 déjà utilisés et les termes contenant S en facteur. Autrement dit toute droite du plan de l'infini appartient au complexe et c'est d'ailleurs pourquoi chaque enveloppe Γ est une parabole.

Si la quadrique Q demandée existe, cela prouve que le complexe (A) coïncide avec sa figure polaire réciproque relativement à Q; mais alors, le cône C de sommet S se transforme en la parabole Γ située dans le plan Π polaire de S relativement à Q : cela entraîne que le centre ω (à distance finie ou infinie) de Q soit situé sur C, de façon que Γ soit tangente au plan de l'infini; donc, puisque le point S est arbitraire, toutes les droites partant de ω sont des droites du complexe et ω est le point à l'infini de Oz; Q est un paraboloïde d'axe parallèle à Oz.

D'autre part, d'après sa définition, le complexe (A) admet trois axes de symétrie, à savoir les axes coordonnés. Cela ne prouve pas, bien entendu, que Q doive admettre ces axes comme axes de symétrie, mais il est permis d'essayer d'abord un paraboloïde les admettant : or un paraboloïde ne peut avoir trois axes de symétrie que s'il est équilatère et nous avons ainsi à essayer les paraboloïdes (λ constante numérique)

$$xy + \lambda z = 0. \tag{1}$$

Si donc on part d'une droite A joignant deux points,

$$\begin{Vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & t_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{lll} a = x_1 t_0 - x_0 t_1, & b = y_1 t_0 - y_0 t_1, & c = z_1 t_0 - z_0 t_1, \\ l = y_0 z_1 - y_1 z_0, & m = z_0 x_1 - z_1 x_0, & n = x_0 y_1 - x_1 y_0, \end{array}\right. \tag{3}$$

la droite polaire réciproque $\overline{A}$ est l'intersection des plans

$$\begin{Vmatrix} y_0 & x_0 & \lambda t_0 & \lambda z_0 \\ y_1 & x_1 & \lambda t_1 & \lambda z_1 \end{Vmatrix}, \tag{4}$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{lll} \overline{a} = \lambda(x_1 t_0 - x_0 t_1), & \overline{b} = \lambda(y_0 t_1 - y_1 t_0), & \overline{c} = y_1 x_0 - x_1 y_0, \\ \overline{l} = \lambda(y_0 z_1 - y_1 z_0), & \overline{m} = \lambda(x_0 z_1 - x_1 z_0), & \overline{n} = \lambda^2(t_0 z_1 - t_1 z_0) \end{array}\right. \tag{5}$$

ou plus simplement

$$(6) \qquad \begin{cases} \overline{a} = \lambda a, & \overline{b} = -\lambda b, & \overline{c} = n, \\ \overline{l} = \lambda l, & \overline{m} = -\lambda m, & \overline{n} = \lambda^2 c, \end{cases}$$

et l'on constate aussitôt que la substitution $(a, b, l, m; \overline{a}, \overline{b}, \overline{l}, \overline{m})$ n'altère pas l'équation du complexe A. On a donc obtenu ∞^1 quadriques Q de l'espèce demandée. Pour découvrir les autres quadriques Q′ raisonnons ainsi : deux transformations successives par polaires réciproques relativement à Q puis Q′ équivalent, comme on sait, à une transformation homographique dans laquelle la surface Σ définie plus haut doit se conserver (si, en ne se servant que de la notion d'axe central, cette propriété n'est pas immédiate, elle le devient si l'on songe aux propriétés énoncées dans la partie 3° pour Σ); or Σ a quatre droites *remarquables :* l'axe Oz ligne double de la surface; la droite à l'infini du plan xOy, droite *accidentelle* de Σ; les deux droites $z = \pm \frac{k}{2}$ qui sont des génératrices G et G′ *stationnaires*. Donc, dans l'homographie, en jeu, qui conserve d'ailleurs le plan de l'infini et le point à l'infini sur Oz, l'axe des z doit se conserver (au moins dans son ensemble); la droite à l'infini du plan xOy se conserve dans les mêmes conditions; quant à G et G′ ou bien chacune se conserve (dans son ensemble) ou bien elles s'échangent l'une avec l'autre. Dans le premier cas, les points de l'axe des z sont soumis à une homographie sur Oz laissant trois points invariants, de sorte que Oz s'échange avec lui-même *point pour point :* chaque plan horizontal s'échange donc (dans son ensemble) avec lui-même, de sorte qne l'origine O s'échange avec elle-même, le plan xOy avec lui-même, et les deux génératrices Ox, Oy de Σ ne peuvent que s'échanger chacune avec elle-même ou chacune avec l'autre; dans la seconde hypothèse, chaque point de Oz est remplacé par son symétrique relativement à O, ainsi que chaque plan horizontal, de sorte que finalement O, xOy, Ox, Oy se trouvent échangés dans les mêmes conditions que précédemment; bien que nous n'ayons pas achevé la discussion, cette conclusion suffit. En effet la quadrique particulière $Q \equiv xy + z = 0$ change O en xOy, xOy en O; donc Q′ doit changer xOy en O et O en xOy, autrement dit Q′ est aussi tangente au plan xOy en O; d'autre part Q change Ox en Ox

et Oy en Oy donc Q' doit changer, soit Ox, avec Ox et Oy en Oy, soit Ox avec Oy; dans le premier cas Q' admet Ox et Oy comme génératrices, et nous retrouvons les quadriques $xy + \lambda z = 0$ déjà trouvées et l'homographie annoncée est $(x; y; z; t \mid \lambda x; \lambda y; z; t)$; dans le second cas, Ox et Oy, tangentes à Q', sont conjuguées par rapport à Q' (au sens à la fois de la théorie des quadriques et de l'indicatrice de Dupin), de sorte que les plans directeurs de Q' sont donnés par une équation $x^2 + \lambda y^2 = 0$, où λ est une certaine constante. On essaie donc la quadrique

$$Q' \equiv x^2 + \lambda y^2 + 2\mu z = 0, \tag{7}$$

on remplace ainsi les tableaux (4), (5), (6) par

$$\left\| \begin{matrix} x_0 & \lambda y_0 & \mu t_0 & \mu z_0 \\ x_1 & \lambda y_1 & \mu t_1 & \mu z_1 \end{matrix} \right\|, \tag{8}$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \overline{a} = \lambda\mu b & \overline{b} = -\mu a, & \overline{c} = -\lambda n, \\ \overline{l} = -\mu m, & \overline{m} = \lambda\mu l, & \overline{n} = \mu^2 c. \end{array} \right. \tag{9}$$

L'équation

$$\overline{b}\,\overline{l} - \overline{a}\,\overline{m} - k\overline{a}\,\overline{b} = 0$$

équivaut à

$$am - \lambda^2 bl + k\lambda ab = 0;$$

pour que le complexe réciproque de $(\overline{A})$ coïncide avec (A), il faut donc que $\lambda = 1$; Q' est un paraboloïde quelconque de révolution de sommet O et axe Oz; on constate bien que les deux points (x, y, z, t) et $(\mu y, \mu x, z, t)$ ont même plan polaire, le premier par rapport à Q, le second par rapport à Q'.

Des considérations de même nature font découvrir les complexes $\mathcal{C}$ demandés; comme le cône C doit être remplacé par une parabole Γ, l'axe du complexe $\mathcal{C}$ doit être génératrice du cône. *quel que soit* S; donc l'axe du complexe est parallèle à Oz; d'autre part, la transformation de (A) par rapport à l'une des quadriques Q précédemment obtenues, suivie de la transformation relativement au complexe $\mathcal{C}$, doit reconstituer comme précédemment (A) et Σ; or l'axe Oz est devenu la droite de l'infini du plan xOy dans la première transformation; donc Oz est précisément l'axe central de $\mathcal{C}$. On constate aussitôt que, *réciproquement*, le complexe $n + \lambda c = 0$ où λ est une constante arbitraire, jouit bien de la propriété; le plan polaire du point (x, y, z) est, en effet $\lambda(Z-z)+Yx-Xy=0$; la droite polaire de celle qui joint (x_0, y_0, z_0, t_0) et (x_1, y_1, z_1, t_1) est l'intersection des plans

$$(10)\qquad \begin{Vmatrix} -y_0 & x_0 & \lambda t_0 & -\lambda z_0 \\ -y_1 & x_1 & \lambda t_1 & -\lambda z_1 \end{Vmatrix},$$

d'où, par calcul analogue à celui du tableau (4),

$$(10)\quad \bar{a}=\lambda a, \quad \bar{b}=\lambda b, \quad \bar{c}=-n, \quad \bar{l}=\lambda l, \quad \bar{m}=\lambda m, \quad \bar{n}=-\lambda c,$$

et même vérification. On a ainsi vérifié que les points (x, y, z, t), (y, x, z, t), $(x, -y, -z, t)$ ont même plan polaire relativement aux quadriques $xy+\lambda z=0$ pour le premier, $x^2+y^2+2\lambda z=0$ pour le second, ou au complexe $n+\lambda c=0$ pour le dernier. On n'obtient qu'une série ∞^1 de complexes $\mathcal{C}$, tandis que l'on avait obtenu deux séries ∞^1 de quadriques; le procédé employé permet d'affirmer que $\bar{n}+\bar{c}=0$ étant un complexe particulier, les complexes polaires de ce premier par rapport aux quadriques

$$xy+\lambda z=0 \qquad \text{ou} \qquad x^2+y^2+2\mu z=0$$

sont *toutes* les solutions; or les transformés de $\bar{n}+\bar{c}=0$ sont respectivement $\lambda^2 c+n=0$ et $\mu^2 c-n=0$, de sorte que nous pouvons néanmoins dire que nous avons *deux* séries ∞^1 de complexes et non une seule, suivant le signe de la quantité constante $\frac{c}{n}$; du reste, on sait que dans la théorie de la réduction d'un système de vecteurs, il y a deux cas bien distincts au point de vue de l'orientation, suivant que, sur l'axe central, la résultante générale et l'axe du couple sont ou non du même sens.

3° Le cône C de sommet $S(x_0, y_0, z_0)$ se décompose si le sommet est sur la surface Σ déjà rencontrée

$$(1)\qquad z(x^2+y^2)-kxy=0.$$

La parabole Γ ne se décompose que, si dans le calcul fait plus haut, on trouve $\lambda=0$, d'où une équation tangentielle décomposée

$$(2)\qquad w[s(u^2+v^2)-kuvw]=0.$$

On voit aisément que l'équation tangentielle de Σ est précisément donnée par le crochet multiplicateur de w dans (2). Sans calcul, cela résulte de ce que la conjuguée d'une droite horizontale rencontrant Oz est, relativement au paraboloïde $xy + z = 0$, la droite horizontale obtenue en changeant z et $\frac{y}{x}$ simultanément de signe, de sorte que Σ est à elle-même sa surface réciproque; cette transformation revient à prendre

$$(3) \qquad u : v : w : s :: y : x : t : z.$$

Je rappelle que $w = 0$ est l'équation tangentielle du point à l'infini sur Oz; d'autre part, S à distance infinie décompose le cône C en le plan de l'infini et un plan à distance finie.

Pour la clarté, je prends sur Σ un point M

$$(\mathrm{M}) \qquad \rho\cos\varphi, \qquad \rho\sin\varphi, \qquad k\sin\varphi\cos\varphi,$$

où ρ et φ sont deux coordonnées curvilignes de signification évidente; un calcul aisé donne pour coordonnées du plan tangent T à Σ en M (j'adopte la notation $\mathrm{T} \equiv \mathrm{M}\Sigma$ pour rappeler la définition du plan T),

$$(\mathrm{M}\Sigma) \equiv (\mathrm{T}) \quad k\rho\sin\varphi\cos 2\varphi, \quad -k\rho\cos\varphi\cos 2\varphi, \quad \rho^2, \quad -k\rho^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Le foyer F du plan T a pour coordonnées (fin de partie 1°), avec notation semblable $\mathrm{F} \equiv \mathrm{T}\Sigma$ pour rappeler la définition du point F,

$$(\mathrm{F}) \equiv (\mathrm{T}\Sigma) \qquad \rho\frac{\cos\varphi}{\cos 2\varphi}, \quad \frac{-\rho\sin\varphi}{\cos 2\varphi}, \quad -k\sin\varphi\cos\varphi.$$

La droite MF est tangente à Σ en M; le plan méridien $Oz\mathrm{F}$ correspond à l'angle $-\varphi$ tandis que $Oz\mathrm{M}$ correspond à φ, et la cote de F est égale à celle de M changée de signe; autrement dit, F est sur la génératrice G′ associée à celle G de M, le couple GG′ pouvant remplacer DD′ comme il a été dit plus haut; la droite MF a pour paramètres directeurs

$$(4) \qquad \rho\sin\varphi, \quad -\rho\cos\varphi, \quad -k\cos 2\varphi,$$

de sorte qu'en projection horizontale MF est orthogonale à G : cela donne une construction simple du plan tangent en M; car nous pouvons figurer Σ en *cotée :* les génératrices deviennent les rayons issus de O, G et G′ sont deux droites symétriques par rapport à Ox (ou Oy) et MF est perpendiculaire en M à OM; c'est la ligne de plus grande pente du plan tangent qui se trouve ainsi coté (le lecteur est prié de faire cette figure très simple nécessaire pour la suite).

Cela posé, au point M, le cône C se décompose manifestement; en remplaçant z_0 par $\frac{kx_0y_0}{x_0^2+y_0^2}$, on obtient

$$(5)\qquad (x_0a+y_0b)\left(\frac{a}{x_0}+\frac{b}{y_0}-\frac{c}{z_0}\right)=0.$$

Le premier facteur donne le plan T_1,

$$x_0(X-x_0)+y_0(Y-y_0)=0$$

ou, si l'on préfère,

$$X\cos\varphi+Y\sin\varphi-\rho=0,$$

perpendiculaire en M à la génératrice G; ce plan donne manifestement une parabole dégénérée en deux points, l'un à l'infini sur Oz, l'autre étant M lui-même ; réciproquement, un plan parallèle à Oz admet pour foyer le pied sur ce plan de l'unique génératrice de Σ perpendiculaire à ce plan. Le second facteur donne un plan T_2 pour lequel la parabole Γ se décompose pour la même raison en deux points dont l'un est M lui-même ; l'équation du plan T_2 peut s'écrire

$$(6)\quad (T_2)\qquad \frac{X}{x_0}+\frac{Y}{y_0}-\frac{Z}{z_0}-1=0,$$

de sorte que ce plan perce les axes aux points (x_0), (y_0), $(-z_0)$; une figure simple que le lecteur fera, montre donc que ce plan contient la génératrice G′; il est tangent à Σ, et pour ce plan le point M est foyer : d'après ce qui a été dit plus haut (il n'y a ici qu'à échanger les rôles de G et de G′) le point de contact de ce second plan avec Σ s'obtient sur le plan horizontal coté en abaissant de M la perpendiculaire $M\mu$ sur G′ et le point μ a pour coordonnées

$$(\mu)\qquad \rho\cos2\varphi\cos\varphi,\quad -\rho\cos2\varphi\sin\varphi,\quad -k\sin\varphi\cos\varphi.$$

On remarque sur cette figure simple que la droite MF est contenue : dans le plan tangent à Σ en M, dans le premier plan T_1 qui est perpendiculaire à G, puis dans le second plan T_2 qui est tangent à Σ en μ, et par suite, contient G′ et F. Or, dans le plan T_2, la parabole Γ se décompose en deux points dont l'un est M et l'autre rejeté à l'infini précisément dans la direction $M\mu$.

Cela devient évident si nous étudions le plan

$$(11) \qquad a_0 c_0 x + b_0 c_0 y - (a_0^2 + b_0^2) z - k a_0 b_0 = 0$$

correspondant à la direction a_0, b_0, c_0 : on voit immédiatement qu'il est tangent à Σ; si nous choisissons pour a_0, b_0, c_0 la direction MF, l'équation (11) devient celle du plan T tangent à Σ en M; donc en échangeant les rôles de G et G', le plan T_2 tangent à Σ en μ correspond à la direction $M\mu$.

La discussion a donc, pour le cas de décomposition de Γ, fourni les deux points : si $w = 0$, c'est le pied de la génératrice de Σ perpendiculaire au plan, réuni au point à l'infini de Oz; si le plan est tangent à Σ en un point M, on a comme points de décomposition F et le point à l'infini sur la direction MF (ce qui est d'ailleurs évident puisque MF est droite double du cône dégénéré C de sommet M).

4° Cette question se trouve déjà traitée au moins en partie; quand le point S vient coïncider avec le point M de Σ, la droite Δ est la droite MF de la figure déjà tracée; Δ coupe Σ en trois points : deux confondus avec M, un avec F, de sorte que les trois plans tangents issus de (Δ) à Σ sont : le plan tangent en M compté deux fois et le plan tangent en F (tout de suite coté d'après la remarque faite plus haut, grâce à la perpendiculaire menée à G' par F).

Si le plan Π devient tangent à Σ en M, les points I_1 et I_2 sont F et le point à l'infini de MF, de sorte que la droite (Δ') est la même que précédemment, pourvu que S et Π soient un point de Σ et son plan tangent.

Le fait que chaque droite Δ peut être définie comme droite (Δ) ou (Δ') tient à ce fait bien connu de la théorie des congruences et complexes que chaque droite peut être définie à deux points de vue corrélatifs, comme lieu de points ou comme enveloppe de plans; ceci s'applique aux surfaces focales des congruences, aux surfaces des singularités des complexes.

Ici la surface des singularités du complexe (A) est : *au point de* *vue ponctuel*, constituée par Σ et le plan de l'infini; *au point de vue tangentiel*, par Σ et le point à l'infini de Oz; la surface Σ d'une part (considérée avec ses éléments de contact) se correspond à elle-même et, d'autre part, l'élément de contact isolé (point à l'infini sur Oz et plan de l'infini) se correspond à lui-même.

Sur chaque droite du complexe (A), il y a une relation homographique entre le point S de la droite et le plan Π tangent au cône du complexe de sommet S, suivant la droite considérée; ici, si l'on prend la droite MF, au point M le cône du complexe de sommet M se compose du plan tangent en μ et du plan perpendiculaire sur la génératrice G; MF est leur droite d'intersection, de sorte que tout plan passant par MF doit être considéré comme tangent au cône dégénéré; l'homographie annoncée est singulière, le plan correspondant à M étant indéterminé; à un plan *quelconque* passant par MF correspond toujours le point M; pour le plan tangent en M à Σ le point correspondant (point de contact de Γ avec MF) est indéterminé, puisque Γ se réduit alors à deux points situés sur MF (F et le point à l'infini sur MF).

Les droites Δ dépendent de deux paramètres (ceux qui fixent M sur Σ); donc elles engendrent une congruence; l'une des surfaces focales est évidemment Σ.

J'applique maintenant la méthode classique relative aux congruences : une droite de la congruence étant définie par des équations paramétriques

$$(1)\qquad X = x + \lambda f, \qquad Y = y + \lambda g, \qquad Z = z + \lambda h,$$

où x, y, z, f, g, h sont des fonctions connues de deux paramètres u, v, on cherche à déterminer une relation entre u, v pour que la droite (1) engendre une développable; cela se traduit par

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ df & dg & dh \\ f & g & h \end{vmatrix} = 0$$

et le paramètre λ est alors déterminé par les deux équations compatibles

$$(3)\qquad \frac{dx + \lambda\, df}{f} = \frac{dy + \lambda\, dg}{g} = \frac{dz + \lambda\, dh}{h}.$$

Ici on prend, avec les paramètres ρ, φ pour la droite MF,

$$(4)\quad \begin{cases} x = \rho\cos\varphi, & y = \rho\sin\varphi, \quad z = k\sin\varphi\cos\varphi, \\ f = \rho\sin\varphi, & g = -\rho\cos\varphi, \quad h = -k\cos 2\varphi. \end{cases}$$

Le déterminant (2) se simplifie aussitôt en ajoutant à la première ligne le produit de la dernière par $d\varphi$; $d\rho$ est mis en facteur (ce facteur donne sur le conoïde Σ les trajectoires orthogonales des génératrices, $\rho = C$ où C est une constante arbitraire); dans le déterminant *ainsi réduit*, on retranche de la deuxième ligne le produit de la nouvelle première ligne par $\rho\, d\varphi$, et il reste l'équation très simple

$$(5)\qquad d\rho\cos 2\varphi + 2\rho\sin 2\varphi\, d\varphi = 0$$

qui s'intègre en divisant par $\rho\cos 2\varphi$ et donne

$$(6)\qquad \rho = C_1\cos 2\varphi,$$

où C_1 est une constante arbitraire : cela détermine ainsi sur Σ les courbes conjuguées des courbes $\rho = C$. En remplaçant dans (3) x, y, z, f, g, h par les valeurs (4) avec $\rho = C_1\cos 2\varphi$, on trouve aussitôt

$$(7)\qquad \lambda = \frac{2\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi};$$

de la sorte les droites Δ restent tangentes à une nouvelle surface Σ' définie par les équations paramétriques (C_1 et φ étant regardés comme paramètres curvilignes) :

$$(8)\quad \begin{cases} X = C_1(\cos\varphi\cos 2\varphi + 2\sin\varphi\sin 2\varphi) = C_1\cos\varphi(3 - 2\cos^2\varphi), \\ Y = C_1(\sin\varphi\cos 2\varphi - 2\cos\varphi\sin 2\varphi) = C_1\sin\varphi(2\sin^2\varphi - 3), \\ Z = k(\sin\varphi\cos\varphi - 2\sin 2\varphi) = -3k\sin\varphi\cos\varphi. \end{cases}$$

Sur cette surface les courbes $C_1 =$ const. sont les enveloppes des droites MF ; les courbes conjuguées s'obtiennent en écrivant

$$C_1\cos 2\varphi = C,$$

où C est une constante arbitraire (celle qui a été employée plus haut).

Si l'on appelle f le point où MF touche Σ', on a une relation simple entre M, F, f ; il suffit de considérer leurs cotes :

$$k\sin\varphi\cos\varphi, \qquad -k\sin\varphi\cos\varphi, \qquad -3k\sin\varphi\cos\varphi;$$

le point F *est le milieu de* Mf; le plan tangent en M à Σ a été déterminé par G et MF; le plan tangent en f à Σ' est le plan osculateur en M à la trajectoire orthogonale de G qui passe en M : or pour Δ, considérée comme droite (Δ'), les points I_1 et I_2 sont F et le point à l'infini, de sorte que M *et* f *sont conjugués harmoniques relativement à* I_1 *et* I_2; d'après les propriétés corrélatives [d'ailleurs (A) se transforme en lui-même par les transformations dualistiques indiquées dans la seconde partie], *les deux plans* T_1, T_2 (T_1 perpendiculaire à G en M, contenant MF, puis T_2 tangent à Σ en μ, contenant MF aussi) *sont conjugués harmoniques relativement aux plans tangents à* Σ *et* Σ' *en* M *et* f.

Il reste à indiquer le degré de Σ'. Les équations paramétriques (8) donnent

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{X}{Y} &= \operatorname{tang}\varphi\,\frac{-3-\operatorname{tang}^2\varphi}{3\operatorname{tang}^2\varphi+1},\\ Z &= -3k\,\frac{\operatorname{tang}\varphi}{1+\operatorname{tang}^2\varphi}.\end{aligned}\right.$$

On voit bien que Σ' est un conoïde; un plan horizontal donne deux valeurs de $\operatorname{tang}\varphi$ donnant deux génératrices symétriques par rapport aux bissecteurs du dièdre $x(Oz)y$ (comme sur Σ); un plan contenant Oz donne trois valeurs de $\operatorname{tang}\varphi$; il résulte de là que Oz est ligne double de la surface et que Σ' est un conoïde de degré 5; la ligne à l'infini du plan xOy est ligne triple de Σ'.

Remarques géométriques. — *A priori* il est évident que si M est un point de la droite D, toute droite issue de M et s'appuyant sur D′ est l'axe central d'un complexe spécial dont D et D′ font partie : le lieu de ces droites est le plan M(D′); de même si par M on mène une droite δ perpendiculaire à D, cette droite répond évidemment a la question pour D, car un vecteur quelconque porté par δ et un couple quelconque d'axe δ ont séparément un moment nul relativement à D; or on peut disposer du rapport numérique des longueurs représentant le vecteur et l'axe du couple de façon que le système ainsi obtenu ait un moment nul relativement à D′ : donc pour chaque point de D, il y a un lieu de droites (A) réduit à deux plans. Comme le problème reste le même si nous remplaçons le couple D, D′ par un couple G, G′ de deux génératrices de Σ symétriques relativement à Ox (ou Oy), nous voyons aussitôt que Σ est lieu des points pour lesquels le cône C se décompose.

D'autre part M étant un point quelconque de l'espace, la droite issue de M et s'appuyant sur D et D' est l'axe d'un complexe spécial répondant à la question. Cette propriété donne le moyen d'obtenir successivement les ∞^1 génératrices du cône C, en utilisant successivement tous les systèmes G, G' : les points ainsi obtenus sur G et G' décrivent, comme on le verra plus bas, une biquadratique gauche.

Il faut remarquer à ce propos que si l'on remplace un couple D, D' par un autre G, G' on ne change pas le résultat du problème, mais sur chaque droite du complexe (A) le paramètre t introduit dans la première partie varie. Ce paramètre correspond à l'invariant $\frac{AL + BM + CN}{A^2 + B^2 + C^2}$ du complexe linéaire introduit : il ne faut pas oublier cette remarque, si l'on veut éviter des fautes.

D'autre part la surface Σ est le lieu des axes centraux des complexes linéaires du faisceau $C + \lambda C' = 0$, où C et C' sont les complexes spéciaux définis par D et D'.

Nous allons indiquer une seconde construction géométrique du cône C relatif au point M; puisque toute droite qui *coupe* à angle droit une génératrice G de Σ appartient au complexe (A), on obtient C en abaissant de M la perpendiculaire sur chaque génératrice de Σ; la figure précédemment faite en cotée montre que les pieds de ces perpendiculaires sont sur le cylindre de révolution d'axe vertical ayant pour section droite le cercle décrit, dans le plan de projection sur Om comme diamètre, m étant la projection horizontale de M. Or un cylindre de révolution vertical *quelconque* coupe Σ suivant une biquadratique gauche (complétée par les droites à l'infini des plans $x \pm iy = 0$); si le cylindre contient Oz, cette biquadratique comprend Oz comptant pour *deux* unités, et il reste une ellipse E; cette ellipse E est la base du cône C. [Je rappelle la propriété classique que l'intersection de Σ avec un cylindre de révolution vertical contenant Oz reste invariable en grandeur quand le cylindre tourne autour de Oz.] L'intersection de C et de Σ se compose donc de l'ellipse trouvée par cette seconde construction et d'une biquadratique gauche donnée au contraire par la première construction.