Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 26-29

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__26_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFERENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C.80. *On considère l'enveloppe* E *de la famille de plans*

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi + z \cot\theta - p(\theta, \varphi) = 0$$

où φ *et* θ *sont les paramètres variables. A chaque système de valeurs de* φ *et* θ, *on fait correspondre le point de contact du plan défini par ces valeurs avec la surface.*

1° *Former la condition à laquelle doit satisfaire la fonction p pour que les courbes* $\theta =$ const., $\varphi =$ const. *soient conjuguées. Déterminer la forme générale des fonctions p satisfaisant à cette condition.*

2° *Cette condition étant remplie, montrer que les lignes* $\varphi =$ const., $\theta =$ const. *sont orthogonales. Montrer que les lignes de courbure de la surface sont planes, et que celles de l'une des familles sont égales entre elles.*

3° *On considère ces lignes de courbure comme les différentes positions d'une courbe mobile : quelle est la nature du déplacement de son plan ? Définir les deux nappes de la développée de* E ; *dans quelles conditions l'une ou l'autre de ces deux nappes dégénère-t-elle en une ligne ? Quelle est la nature de* E *lorsque les deux nappes sont ainsi dégénérées ?*

Nota. — *Les candidats devront faire usage, autant que possible, de considérations géométriques.*

II. C.81. *On donne l'équation différentielle*

$$xy'' + (3x - 1)y' - (4x + 5a + 4)y = 0,$$

où a est une constante

1° *Vérifier que, pour a entier supérieur à* -2, *on a une intégrale de la forme* $e^x P(x)$, $P(x)$ *étant un polynome; et que pour a entier inférieur à* 1, *on a une intégrale de la forme* $e^{-4x} Q(x)$, $Q(x)$ *étant un polynome. Dire comment on obtiendrait dans ces deux cas l'intégrale générale. Quelle est cette intégrale générale pour* $a = 1$ *et* $a = 0$?

2° *a étant quelconque, quels sont les points singuliers des intégrales de l'équation* (1)? *Quelle est la forme de ces intégrales? Pour quelles valeurs de a l'intégrale générale est-elle uniforme?*

3° *Appliquer la méthode de Laplace à l'équation* (1). *En particulier, retrouver par cette méthode les résultats du n°* I.

Epreuve pratique. — I. *Calculer l'intégrale*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x^2 - 4)\sqrt[4]{(1-x)(1+x)^3}}.$$

II. *Les axes* Ox, Oy, Oz *sont rectangulaires. Soit* S *la surface engendrée par une circonférence variable* C *tangente à* Oz *à l'origine et qui coupe le plan* Oxy *suivant la droite* $x - a = 0$. *Calculer l'aire de la portion de* S *comprise entre deux positions de la circonférence* C.

(Strasbourg, juin 1920.)

Épreuve théorique. — *Une surface est représentée par l'équation*

$$y = x \operatorname{tang} \frac{z}{a}.$$

1° *Déterminer les rayons de courbure principaux en un point quelconque de la surface.*

2° *Déterminer ses lignes de courbure.*

3° *Pour l'une quelconque de ces lignes de courbure, calculer la longueur de l'arc de courbe, le rayon de courbure et le rayon de torsion de la courbe.*

Épreuve pratique. — *Déterminer une fonction analytique* $P + Qi$ *de la variable* $z = x + yi$, *telle que sa partie réelle soit de la forme*

$$P = f(x)\varphi(y),$$

Montrer que l'on peut choisir cette fonction de façon qu'elle soit nulle pour $z = 0$.

Le problème a-t-il plusieurs solutions?

(Marseille, octobre 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C.82. *Une surface est représentée par les équations paramétriques*

$$x = 3uv^2 - u^3 - 3u,$$
$$y = 3vu^2 - v^3 - 3v,$$
$$z = 6v$$

1° *Déterminer les lignes asymptotiques et prouver qu'elles sont orthogonales.*

2° *Montrer que, pour chacune de ces courbes, la tangente forme un angle constant avec une direction fixe.*

3° *Déterminer les lignes de courbure de la surface et montrer qu'elles sont planes.*

4° *Vérifier qu'en chaque point d'une ligne de courbure le plan tangent à la surface forme un angle constant avec le plan de cette courbe.*

5° *Calculer les rayons de courbure principaux en un point quelconque de la surface.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer l'intégrale générale de l'équation*

$$(a^2 + xy)\left(x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}\right) + a(x^2 + y^2)z^2 = 0.$$

Déterminer une surface intégrale passant par la circonférence

$$z = a, \qquad x^2 + y^2 = R^2.$$

(Marseille, juin 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C.83. — *On donne l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = e^z \sin(x + y).$$

1° *Déterminer l'intégrale générale.*

2° *Déterminer une surface intégrale* S *qui passe par la courbe*

$$x + y = 0; \qquad e^z \cos^2 x = 1.$$

3° *Déterminer les lignes de courbure de cette surface.*

4° *Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques de cette surface* S, *et montrer qu'elles sont imaginaires.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer, en utilisant les intégrales imaginaires,*

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(px)}{(a^2 + x^2)^2}\,dx.$$

En déduire les intégrales :

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin(px)}{(a^2 + x^2)^2}\, dx,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos(px)}{(a^2 + x^2)^2}\, dx,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(px)}{a^2 + x^2}\, dx.$$

(Marseille, novembre 1926.)