Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions de licence

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 253-256

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__253_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS DE LICENCE.

Question C.90.

[*Mécanique rationnelle; épreuve théorique; énoncé publié en février* 1927, *p.* 64.]

SOLUTION

Par J. LEDURE.

Une plaque a la forme d'un triangle équilateral de côté a. Un côté est astreint à demeurer dans le plan fixe $x_1 O y_1$, le sommet opposé sur la verticale $O_1 z_1$ (axes rectangulaires). On demande d'étudier le mouvement.

Les axes liés à la plaque sont Ox parallèle au côté horizontal, Oy passant par le sommet de la plaque qui est sur O_1z_1, Oz perpendiculaire; O est le centre de la plaque. Les angles d'Euler sont

$$\varphi = 0, \qquad \psi = (\widehat{O_1x_1, Ox}), \qquad \theta = (\widehat{O_1z_1, Oz}),$$

les moments d'inertie de la plaque par rapport aux axes qui lui sont liés sont

$$A = B = \frac{Ma^2}{24}, \qquad C = \frac{Ma^2}{12}.$$

La force vive de la plaque est, tous calculs faits,

$$2T = \frac{Ma^2}{8}(1 + 2\sin^2\theta)\theta'^2 + \frac{Ma^2}{24}(1 + 9\cos^2\theta)\psi'^2,$$

et la fonction des forces

$$U = -\frac{Mga\sqrt{3}}{6}\sin\theta.$$

Le théorème des forces vives donne

$$(1) \qquad 3(1 + 2\sin^2\theta)\theta'^2 + (1 + 9\cos^2\theta)\psi'^2 = h - \frac{8g\sqrt{3}}{a}\sin\theta,$$

et, d'autre part, l'équation de Lagrange appliquée au paramètre ψ donne

$$(2) \qquad (1 + 9\cos^2\theta)\psi' = c.$$

On voit donc que ψ' conserve toujours le même signe et que la rotation ψ se fait toujours dans le même sens.

Éliminons ψ' entre (1) et (2),

$$3(1 + 2\sin^2\theta)(1 + 9\cos^2\theta)\theta'^2 = \left(h - \frac{8g\sqrt{3}}{a}\sin\theta\right)(10 - 9\sin^2\theta) - c^2.$$

Pour discuter graphiquement, on posera $\sin\theta = x$ et l'on coupera la courbe

$$y = \frac{1}{10 - 9x^2}$$

par la droite

$$y = \frac{1}{c^2}\left(h - \frac{8g\sqrt{3}}{a}x\right);$$

on trouvera, suivant les cas, oscillation du paramètre θ entre deux valeurs θ_1 et θ_2, oscillations symétriques par rapport à $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ou mouvement révolutif.

Autre solution par J. LAUREAU.

Question C.91.

[*Mécanique rationnelle; épreuve pratique; énoncé publié en février* 1927, *p.* 64.]

Solution

Par Jacques Devisme.

On donnait le système suivant : En O et O′ (sur une même horizontale, $OO' = l$) pendent deux fils OAB et O′C reliés par un autre fil AC, la figure d'équilibre formant un carré OO′CA dont le côté OA a été prolongé d'une longueur égale AB = OA. En A, B, C sont trois masses ponctuelles pesantes de masse m, les fils sont inextensibles et sans masse.

O′C ayant été écarté d'un angle α dans le plan du tableau il s'agissait d'étudier l'état des vitesses au moment de la tension brusque de AC, quand O′C redevient vertical.

Considérons une position virtuelle du système donnée par les angles θ, φ, ψ de OA, AB, O′C avec la verticale. La force vive est

$$2T = ml^2[2\theta'^2 + \psi'^2 + \varphi'^2 + 2\varphi'\theta'\cos(\theta - \varphi)].$$

L'équation de liaison exprimant que $AC = l$ s'écrit

$$(\cos\theta - \cos\psi)^2 + (\sin\theta - \sin\psi - 1)^2 = 1.$$

Au moment du choc on a $\theta = \varphi = \psi = 0$, il faut donc écrire que l'on a

$$\Delta\psi'\delta\psi + \Delta(2\theta' + \varphi')\delta\theta + \Delta(\varphi' + \theta')\delta\varphi = 0,$$

pour toutes les valeurs $\delta\theta$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$ liées par

$$\delta\theta - \delta\psi = 0.$$

Donc

$$\Delta(\varphi' + \theta') = 0,$$
$$\Delta(\psi' + 2\theta' + \varphi') = 0$$

ou encore

$$\Delta(\varphi' + \theta') = 0,$$
$$\Delta(\psi' + \theta') = 0.$$

Les valeurs initiales des vitesses sont

$$\theta'_0 = \varphi'_0 = 0, \qquad \psi'_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Les valeurs finales seront donc

$$\theta'_1 = -\Delta\psi'_1; \qquad \varphi'_1 = +\Delta\psi'_1, \qquad \psi'_1 = \sqrt{\frac{2g}{l}}\sin\frac{\alpha}{2} + \Delta\psi'_1.$$

Ces valeurs doivent être compatibles avec la liaison, donc

$$\theta'_1 - \psi'_1 = 0,$$
$$\sqrt{\frac{2g}{l}}\sin\frac{\alpha}{2} + 2\Delta\psi'_1 = 0,$$

et l'on a

$$\theta'_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2g}{l}} \sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\varphi'_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2g}{l}} \sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\psi'_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2g}{l}} \sin\frac{\alpha}{2}.$$