NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. BALLY

Solution de question proposée

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 252-253

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__252_1>

SOLUTION DE QUESTION PROPOSÉE.

2497.

(1927 p 110).

Soit ABCD *un quadrilatère inscriptible, démontrer que le centre* O *du cercle circonscrit, le point de concours* I *des diagonales et le foyer* F *de la parabole inscrite sont sur une droite. Cette droite est symétrique, par rapport aux bissectrices des angles des diagonales du quadrilatère, de la droite joignant* I *au centre de l'hyperbole équilatère circonscrite.* G. Roy.

SOLUTION.

Par E. Bally.

1° Si un quadragone est inscrit à un cercle et circonscrit à une parabole : le pôle O′ de l'un de ses côtés relatif au cercle, le point de concours F′ de ses deux côtés opposés qui sont adjacents au côté envisagé et le point de concours I de ses diagonales sont alignés (sur la polaire, relative au cercle, du point de concours du côté envisagé avec son opposé).

Quand le quadragone varie en restant inscrit au cercle et circonscrit à la parabole, on sait que le point de concours I de ses diagonales reste fixe. Dans la position où l'un des côtés devient la droite de l'infini, les points O′ et F′ correspondant à ce côté deviennent respectivement le centre O du cercle et le foyet F de la parabole, qui sont donc alignés avec le point de concours I des diagonales du premier quadragone.

2° On sait que les centres des coniques circonscrites à un quadrangle sont sur une conique (G) (conique des neuf points), circonscrite au triangle conjugué et aux milieux des six segments du quadrangle, et qui a pour centre le centre de gravité G des sommets du quadrangle (point commun aux trois droites de jonction des milieux des segments opposés, et relativement auquel ces milieux sont deux à deux symétriques).

Si le quadrangle est inscriptible, la conique (G) lieu des centres est une hyperbole équilatère, qui a pour directions asymptotiques les directions rectangulaires fixes d'axes communes aux coniques circonscrites au quadrangle (directions des bissectrices des paires de côtés opposés du quadrangle inscriptible).

Admettons que les centres O et H du cercle (O) et de l'hyperbole équilatère (H) circonscrits au quadrangle, points situés sur l'hyperbole équilatère (G) lieu des centres, soient symétriques relativement au centre G de cette dernière.

Alors, les droites IO et IH qui joignent ces centres à un sommet I du triangle conjugué du quadrangle, point situé sur (G), sont parallèles à deux diamètres conjugués de l'hyperbole (G), et leurs bissectrices sont parallèles aux asymptotes de (G), ce qui résout la fin du problème.

Reste à établir que si un quadrangle ABCD est inscrit à un cercle de centre O, le symétrique de O relatif au centre de gravité du quadrangle est le centre de l'hyperbole équilatère circonscrite.

Soient K l'orthocentre du triangle ABC; M et N les milieux de AB et de CD; G, le milieu de MN (centre de gravité des sommets du quadrangle); H, le symétrique de O relatif à G.

Le segment OM étant égal et parallèle à la moitié du segment CK, il en est de même du segment NH, symétrique de OM relatif à G. Donc H est le milieu de DK.

Tout sommet D du quadrangle et l'orthocentre K du triangle ABC de ses trois autres sommets étant donc symétriques relativement à ce point H, ce dernier est bien le centre de l'hyperbole équilatère circonscrite à ABCD, puisque celle-ci contient les orthocentres des quatre triangles du quadrangle.

Nota. — Cette dernière démonstration résout aussi la première partie de la question n° 2487, proposée par E. Bally (*N. A.*, 1925, p. 24).

Autre solution de R. BOUVAIST.