Agrégation des sciences mathématiques (session de 1927)

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 243-252
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__243_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (SESSION DE 1927).

Composition de Géométrie.

On considère deux droites Δ *et* Δ' *qui se coupent en* O *et font entre elles un angle* 2α. *Soient* A *un point de* Δ, A' *un point de* Δ'. *Le cercle qui a pour diamètre* AA' *recoupe* Δ *en* B, Δ' *en* B'. *Soient* ω *le centre de ce cercle,* ω' *le centre du cercle de diamètre* BB'.

1° *On suppose que* ω *décrive une droite* δ. *Démontrer que* ω'

décrit une droite δ' *et que* $\omega\omega'$ *enveloppe une conique* P *dont on construira les éléments géométriques usuels.*

2° *Cette conique* P *étant fixée, il lui correspond une droite* δ *et une droite* δ' *qui se coupent en* I. *Lieu du point* I *quand les droites* Δ *et* Δ' *varient en conservant des bissectrices fixes, la conique* P *ne variant pas.*

3° *Les droites* Δ *et* Δ' *étant de nouveau fixes, on suppose que la droite* AA' *varie de manière que le triangle* OAA' *conserve, soit une aire, soit un périmètre constant. Montrer que dans chacun de ces cas, les cercles* ω *sont orthogonaux à un cercle fixe dont on précisera la position.*

Même question pour les cercles ω'.

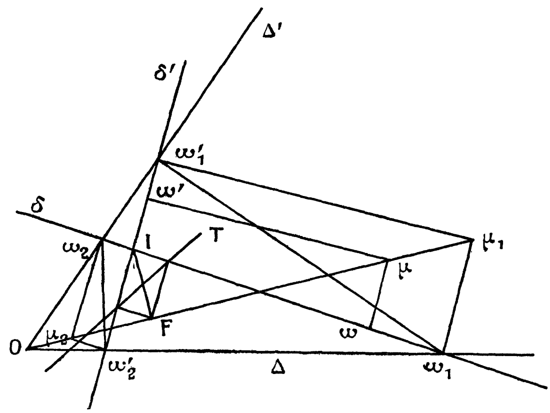
4° *On suppose enfin que l'axe radical des deux cercles* ω *et* ω' *passe par un point fixe* P'. *Montrer que les cercles* ω *restent orthogonaux à un cercle fixe de centre* Q *et que les cercles* ω' *restent orthogonaux à un cercle fixe de centre* Q'. *Étudier la disposition des quatre points* O, P', Q, Q'. *Quel est le lieu des* P' *quand* Q *ou* Q' *décrit un cercle de centre* O *et de rayon* a.

SOLUTION par M. BERTRAND GAMBIER.

1. Le point B' s'obtient en projetant A sur Δ'; on peut dire que, si l'on a choisi un sens sur Δ et sur Δ', B' se déduit de A par les deux opérations suivantes : d'abord symétrie autour de la bissectrice $\mathcal{B}$ des deux droites orientées Δ et Δ', puis homothétie par rapport à O, le rapport d'homothétie étant $\cos 2\alpha$, où 2α est l'angle des deux droites orientées Δ et Δ'; l'ordre des deux opérations est échangeable; changer le sens de Δ' par exemple revient à remplacer $\mathcal{B}$ par la bissectrice perpendiculaire $\mathcal{B}_1$ et à changer le signe du rapport d'homothétie, ce qui, au total, est indifférent. Le point B se déduit de A' par la même construction, donc ω' se déduit de ω par la même transformation; si donc ω décrit une certaine courbe γ, le point ω' décrit une courbe γ', inversement semblable à γ. Ici les courbes sont deux droites δ et δ'. Pour construire δ' quand δ est donnée, il est commode d'introduire les points ω_1, ω_2 où δ coupe Δ et Δ' respectivement, de façon à avoir aussitôt ω'_1 et ω'_2 par simple projection sur l'autre droite Δ' et Δ.

Quand ω décrit la droite indéfinie δ, $\omega_1\omega_2$ (orientée par exemple de ω_1 vers ω_2), ω' decrit la droite indéfinie δ', $\omega'_1\omega'_2$ (orientée dans le sens correspondant) et le rapport $\frac{\omega_1\omega}{\omega'_1\omega'}$ reste constant en grandeur et signe : c'est une propriété connue que la droite $\omega\omega'$ enveloppe une parabole P tangente à δ et δ'. Pour avoir les éléments usuels de P, il est commode de démontrer ainsi la propriété (*fig.* 1) : les perpendiculaires à δ en ω_1 et δ' en ω'_1 se coupent

Fig. 1.

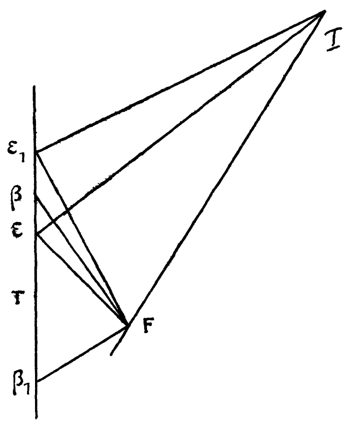


en μ_1 ; de même ω_2 et ω'_2 donnent μ_2 ; on joint $\mu_1\mu_2$ et l'on déplace un point μ sur $\mu_1\mu_2$; les projections de μ sur δ et δ' sont évidemment deux points ω et ω' homologues. Projetons I, point commun à δ et δ', s ır $\mu_1\mu_2$ en F : le cercle décrit sur Iμ comme diamètre passe en ω, ω' et F, de sorte que la droite de Simson de F relativement au triangle formé par δ, δ' et $\omega\omega'$ est fixe : c'est la droite T joignant les projections de F sur δ et δ' ; $\omega\omega'$ enveloppe donc la parabole de foyer F admettant T pour tangente au sommet. D'autre part la bissectrice $\mathcal{B}$ coupe évidemment δ et δ' en deux points $\overline{\omega}$ et $\overline{\omega}'$ homologues, donc $\mathcal{B}$ est une tangente particulière de P. Pour la même raison, la seconde bissectrice $\mathcal{B}_1$ touche P de sorte que la directrice D de P passe en O.

2. Soit une parabole P, un point O de sa directrice, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ les tangentes rectangulaires entre elles, issues de O à P ; si l'on trace au hasard, un couple de deux droites Δ et Δ' issues de O et

admettant $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ pour bissectrices, on reconstitue aussitôt la figure précédente en menant à P la tangente perpendiculaire à Δ, qui coupe Δ en ω'_2 et Δ' en ω_2, de même la tangente à P perpendiculaire à Δ' coupe Δ en ω_1 et Δ' en ω'_1; δ est la droite $\omega_1\omega_2$ et δ', $\omega'_1\omega'_2$. Les droites $\omega_1\omega_2$ et $\omega'_1\omega'_2$, sont, en direction, symétriques par rapport à $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}_1$; les perpendiculaires $F\varepsilon$, $F\varepsilon'$ (*fig.* 2)

Fig. 2.



abaissées de F sur ces droites $\omega_1\omega_2$ et $\omega'_1\omega'_2$ ont leur pied ε ou ε' sur T et sont symétriques en direction relativement aux parallèles $F\beta$ et $F\beta_1$ à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ issues de F : comme β et β_1 pieds de ces parallèles sur la droite T sont conjugués harmoniques par rapport à ε et ε', le cercle $F\varepsilon\varepsilon'I$ de diamètre FI est orthogonal au cercle $F\beta\beta_1$ de diamètre $\beta\beta_1$ de sorte que FI est une droite fixe, tangente en F au cercle fixe $F\beta\beta_1$: c'est le lieu de I.

3. La puissance de O relativement au cercle de diamètre AA′ est OA.OB (remarquons, ce qui sera commode pour la suite, que cette puissance est la mesure du produit vectoriel intérieur $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'}$); cette puissance p est égale à $OA.OA'.\cos 2\alpha$; or l'aire du triangle OAA′ qui est $\frac{1}{2}OA.OA'\sin 2\alpha$ reste constante par hypothèse : donc OA.OB reste constant aussi et le cercle AA′ reste orthogonal au cercle de centre O et rayon $\sqrt{p}$; il est bon de

remarquer que p n'est positif que si le segment AA' est contenu dans l'un ou l'autre des angles aigus de Δ et Δ'.

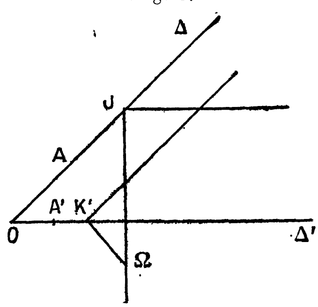
Je vais maintenant démontrer, d'une façon générale mais élémentaire, la proposition suivante :

Si la droite AA' enveloppe une conique Γ tangente à Δ et Δ', le cercle ω, de diamètre AA', reste orthogonal à un cercle fixe.

Cette proposition comprend comme cas particulier celui où le triangle OAA' garde une aire constante (AA' enveloppe une hyperbole d'asymptotes Δ et Δ'), celui où le triangle OAA' garde un périmètre constant [AA' enveloppe un cercle tangent à Δ et Δ' (1)], celui où AA' passe par un point fixe P (quatrième partie), la conique se réduisant dans ce cas aux deux points P et O. La propriété est basée sur ce fait que Δ et Δ' étant orientées, les abscisses a et a' de A et A' sur Δ et Δ' sont liées homographiquement, propriété qui se démontre en remarquant que, F étant foyer de Γ, l'angle (FA, FA') de droites illimitées est constant.

La seconde tangente à Γ supposée non parabolique parallèle à Δ' donne sur Δ le point J à distance finie dont le correspondant J' est rejeté à l'infini; on définit de même sur Δ' le point K' homologue

Fig. 3.



du point à l'infini de Δ; la perpendiculaire abaissée de K' sur Δ est un cercle dégénéré de la famille; de même la perpendiculaire abaissée de J sur Δ' : ces deux perpendiculaires se coupent en un

(1) AA' n'enveloppe qu'une partie du cercle; mais en généralisant et affectant OA et OA' de signes convenables on peut avoir tout le cercle; à la rigueur on peut même faire intervenir quatre cercles, deux à deux symétriques relativement à O; mais ce n'est qu'un détail.

point Ω et tout revient à démontrer que le produit scalaire $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega A'}$ est constant (*fig.* 3).

Or la figure 3 donne aussitôt

$$\overrightarrow{\Omega A} = \overrightarrow{\Omega J} + \overrightarrow{JA},$$
$$\overrightarrow{\Omega A'} = \overrightarrow{\Omega K'} + \overrightarrow{K'A'},$$

d'où par multiplication scalaire et se rappelant que $\overrightarrow{\Omega K'}$ et $\overrightarrow{JA}$ d'une part, puis $\overrightarrow{\Omega J}$ et $\overrightarrow{K'A'}$ ont des supports perpendiculaires

$$\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega A'} = \overrightarrow{\Omega J}.\overrightarrow{\Omega K'} + \overrightarrow{JA}.\overrightarrow{K'A'},$$

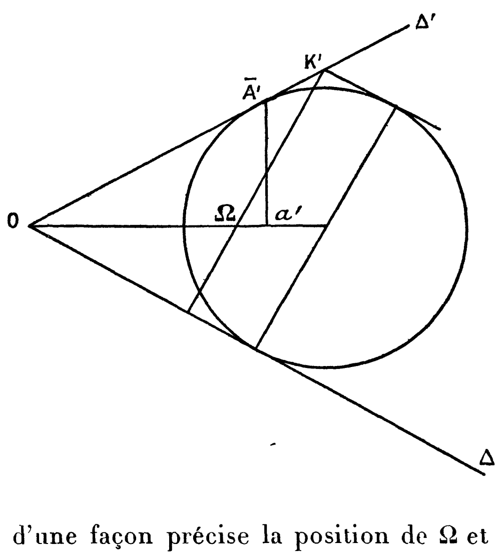
ce qui démontre la propriété, car $\overrightarrow{\Omega J}$ et $\overrightarrow{\Omega K'}$ sont fixes et d'autre part la relation d'homographie est

$$\text{mesure } \overrightarrow{JA} \times \text{mesure } \overrightarrow{K'A'} = \text{const.}$$

On déduit aussitôt de là que le cercle ω de diamètre AA' enveloppe une courbe bicirculaire anallagmatique de degré 4 : le lieu de ω est en effet une conique; Γ étant supposée non parabolique, on peut regarder la figure comme projection cylindrique d'un hyperboloïde à une nappe, Γ étant le contour apparent en projection, Δ et Δ' les projections de deux génératrices fixes G, G' d'un même système et AA' la projection d'une génératrice variable de l'autre système : le plan parallèle à G, G' et équidistant de G et G' coupe l'hyperboloïde suivant une conique contenant le milieu du segment de génératrice projeté en AA'; le milieu de AA' décrit donc une conique d'asymptotes parallèles à Δ et Δ'; le reste s'en déduit. Si la corde AA' passe par un point fixe P il n'y a rien de changé sauf que l'hyperboloïde admet deux génératrices verticales projetées en P et O (la démonstration élémentaire donnée plus haut subsiste puisque l'on sait aussitôt que A et A' se correspondent homographiquement; la notion de conique dégénérée en les deux points *distincts* P et O n'est utile que pour ce complément; les secondes tangentes parallèles à Δ et Δ' sont bien les parallèles à Δ et Δ' menées par P). Dans ce cas où la corde AA' passe par le point fixe P, on peut remarquer, de plus, que si A et A' viennent simultanément en O, le cercle AA' se réduit au cercle-point O; donc tous les cercles ω sont orthogonaux à un cercle fixe, dont le centre Ω se trouve comme plus haut, et qui de plus passe en O.

Il est intéressant à ce propos de revenir sur la première partie où ω décrit une droite δ; si de ω l'on mène la parallèle à Δ' on obtient sur Δ le milieu α de OA, donc ω et α ou ω et A décrivent sur δ et Δ des divisions proportionnelles; de même ω et A′ sur δ et Δ' : donc, comme cela a été explique plus haut, la droite AA′ enveloppe une parabole P_1 tangente à Δ, Δ' et δ; ce raisonnement démontre d'ailleurs que, réciproquement, le milieu du segment découpé sur une tangente mobile de la parabole P_1 par deux tangentes fixes est une droite δ tangente elle aussi à P_1 (le raisonnement déduit de la géométrie dans l'espace le démontre aussi, mais d'une façon moins élémentaire); dans ce cas le cercle ω reste manifestement orthogonal à la droite δ lieu de son centre et le principe de continuité permet d'affirmer que l'enveloppe du cercle ω est une quartique bicirculaire ayant δ pour axe.

Fig. 4.



Calculons d'une façon précise la position de Ω et la puissance constante dans le cas où le triangle OAA′ a un périmètre constant $2p$; AA′ reste tangente à un cercle fixe de rayon $p \tan g\alpha$, le point K′ (*fig.* 4) s'obtient par la tangente parallèle à Δ; la perpendiculaire à Δ issue de ce point est à la distance $\frac{2p \tang \alpha}{\tang 2\alpha}$ ou $p(1 - \tang^2 \alpha)$ ou $\frac{p \cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}$ de O de sorte que

$$O\Omega = \frac{p \cos 2\alpha}{\cos^3 \alpha},$$

Ω étant par raison de symétrie sur la bissectrice de l'angle Δ, Δ'; prenons comme sécante AA' particulière celle pour laquelle A est confondu avec O et A' avec le point de contact $\overline{A'}$ de Δ' et du cercle; $\overline{A'}$ se projette en a' sur la bissectrice $O\Omega$; la puissance constante est

$$\Omega O \times \Omega a' = \frac{-p \cos 2\alpha}{\cos^3 \alpha}\left[p \cos \alpha - \frac{p \cos 2\alpha}{\cos^3 \alpha}\right].$$

Si l'on remarque que

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha,$$

on trouve aussitôt que la puissance est

$$\frac{-p \cos 2\alpha \sin^4 \alpha}{\cos^6 \alpha}.$$

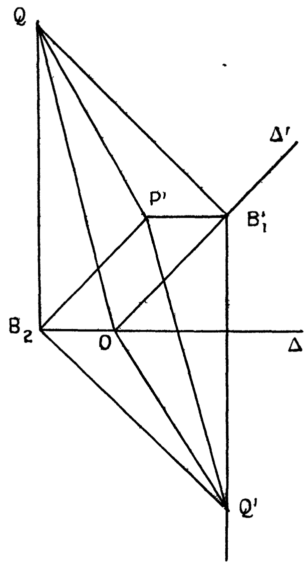
Elle est négative si l'angle 2α est aigu, positive si 2α est obtus. Le cas de 2α droit est un cas de dégénérescence étudié aussitôt.

D'autre part tout ce qui est relatif au cercle ω' se déduit par la similitude déjà employée des résultats relatifs au cercle ω.

4. Cette dernière question a été resolue en partie. L'axe radical de ω et ω' est en effet BB'; la droite BB' passe par le point fixe P' : on obtient le point Q' par la construction simple suivante : la parallèle à Δ issue de P' donne (*fig.* 5) B'_1 sur Δ' et par B'_1 on mène la perpendiculaire à Δ; de même la parallèle à Δ' issue de P' donne B_2 sur Δ, la perpendiculaire à Δ' issue de B_2 donne Q' par intersection avec la droite homologue issue de B'_1; le point Q s'obtient manifestement comme intersection de la perpendiculaire en B'_1 à Δ', et à Δ en B_2 de sorte que la figure $B_2QB'_1Q'$ est un parallelogramme; comme il en est de même de $P'B'_1OB_2$, il en résulte que le centre commun des deux parallélogrammes est le milieu de OP', $B_2B'_1$, QQ'; la figure OQP'Q' est donc un parallé-

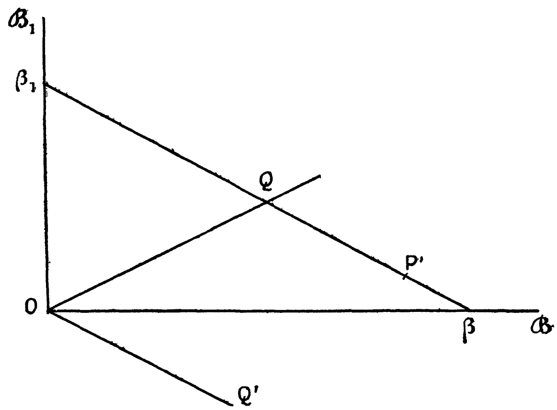
logramme. OQ et OQ′ sont, comme nous le savons, symétrique-

Fig. 5.



ment inclinées sur les bissectrices $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$. Figurons donc $\mathcal{B}$, OQ et OQ′; soit $(\mathcal{B}, \mathrm{OQ}) = \theta$. On suppose OQ constant égal à a :

Fig. 6.



donc par rapport aux axes $\mathrm{O}\mathcal{B}$, $\mathrm{O}\mathcal{B}_1$, les coordonnées de Q, Q′, P' sont respectivement ($b = a\cos 2\alpha$) (*fig.* 6) :

Q........................	$a\cos\theta$	$a\sin\theta$
Q'........................	$b\cos\theta$	$-b\sin\theta$
P'.....................	$(a+b)\cos\theta$	$(a-b)\sin\theta$

Le lieu de P' est donc une ellipse de demi-axes $a+b, a-b$ portés sur $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$; d'ailleurs la droite QP' perce $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ aux points β et β_1 et l'on a $P'\beta_1 = a+b$, $P'\beta = a-b$, ce qui redonne la génération connue de l'ellipse par la bande de papier.