PIERRE SICARD

Esquisse d'une méthode d'intégration de l'équation aux dérivées partielles du second ordre $a(p,q)\times r+2b(p,q)\times s+c(p,q)\times t=o$

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 235-243

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__235_1>

ESQUISSE D'UNE MÉTHODE D'INTÉGRATION DE L'EQUATION [1] AUX DÉRIVEES PARTIELLES DU SECOND ORDRE

$$a(p,q)\times r+2b(p,q)\times s+c(p,q)\times t=0;$$

PAR PIERRE SICARD,
Chef d'escadron au 157e d'Artillerie (Nice).

Soit une équation aux dérivées partielles de second ordre

$$(1)\qquad F(x,y,z,p,q,r,s,t)=0,$$

où p, q, r, s, t désignent suivant les notations habituelles les dérivées partielles de la fonction inconnue $z(x, y)$.

Soit une intégrale de (1) (axes rectangulaires). Le plan tangent en un point peut être mis sous la forme

$$(2)\qquad X\cos\varphi+Y\sin\varphi+Z\cot\theta+h(\theta,\varphi)=0,$$

ou les deux variables φ et θ, et la fonction h ont des significations évidentes.

L'équation (1) donne alors une équation du second ordre pour la fonction inconnue h des deux variables φ et θ.

La transformation ainsi réalisée n'est pas nouvelle. Elle se rattache d'ailleurs, tout à fait simplement, à la transformation de contact bien connue de Legendre.

Elle intervenait indirectement dans quelques problèmes pro-

---

(1) Équation *linéaire* et *homogène* par rapport aux dérivées secondes r, s, t et dont les *coefficients* $a(p, q)$, $b(p, q)$, $c(p, q)$, sont des fonctions quelconques à deux variables des dérivées premières p et q.

posés aux examens [1], et ce sera notre justification pour en développer ici quelques applications.

1. Les formules fondamentales sont les suivantes :

D'abord les coordonnées x, y, z du point de contact du plan (2) sont

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{\partial h}{\partial\varphi}\sin\varphi - \frac{\partial h}{\partial\theta}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi - h\cos\varphi,\\ y &= -\frac{\partial h}{\partial\varphi}\cos\varphi - \frac{\partial h}{\partial\theta}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi - h\sin\varphi,\\ z &= \sin^2\theta\,\frac{\partial h}{\partial\theta}.\end{aligned}\right.$$

Les dérivées premières p et q sont

$$(4)\qquad p = -\cos\varphi\,\mathrm{tang}\,\theta,\qquad q = -\sin\varphi\,\mathrm{tang}\,\theta.$$

Quant aux dérivées secondes

$$r = \frac{\partial p}{\partial x},\qquad s = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x},\qquad t = \frac{\partial q}{\partial y},$$

elles découlent immédiatement du système (5) suivant d'équations linéaires

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} r\frac{\partial x}{\partial\varphi} + s\frac{\partial y}{\partial\varphi} &= \sin\varphi\,\mathrm{tang}\,\theta = \frac{\partial p}{\partial\varphi},\\ r\frac{\partial x}{\partial\theta} + s\frac{\partial y}{\partial\theta} &= -\frac{\cos\varphi}{\cos^2\theta} = \frac{\partial p}{\partial\theta},\\ s\frac{\partial x}{\partial\varphi} + t\frac{\partial y}{\partial\varphi} &= -\cos\varphi\,\mathrm{tang}\,\theta = \frac{\partial q}{\partial\varphi},\\ s\frac{\partial x}{\partial\theta} + t\frac{\partial y}{\partial\theta} &= -\frac{\sin\varphi}{\cos^2\theta} = \frac{\partial q}{\partial\theta}.\end{aligned}\right.$$

De ce système d'équations, il résulte, en désignant par J le jacobien,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial x}{\partial\theta} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix},$$

[1] *Voir*, au sujet de cette transformation, ma solution de la question d'analyse du concours d'agrégation de 1905. *Voir* aussi Solution et question, C.80, ce tome, p. 27.

les relations suivantes (5′),

$$(5') \quad \begin{cases} J \times r = J \quad \dfrac{\partial p}{\partial x} = \left[\dfrac{\partial p}{\partial \varphi}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} - \dfrac{\partial p}{\partial \theta}\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\right] \\ J \times s = J \times \dfrac{\partial p}{\partial y} = \left[\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\dfrac{\partial p}{\partial \theta} - \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\dfrac{\partial p}{\partial \varphi}\right], \\ J \times s = J \quad \dfrac{\partial q}{\partial x} = \left[\dfrac{\partial q}{\partial \varphi}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} - \dfrac{\partial q}{\partial \theta}\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\right] \\ J \times t = J \times \dfrac{\partial q}{\partial y} = \left[\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\dfrac{\partial q}{\partial \theta} - \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\dfrac{\partial q}{\partial \varphi}\right]. \end{cases}$$

Appliquée à une équation quelconque aux dérivées partielles de second ordre, il ne semble pas que la présente transformation conduise à une simplification du problème, loin de là. Elle est fâcheusement dissymétrique, et se prête mal aux calculs algébriques.

Mais elle conduit à un essai d'intégration intéressant, apppliquée à une équation aux derivées partielles de la forme précitée

$$(6) \qquad a(p, q)r + 2b(p, q)s + c(p, q)t = 0.$$

2. Proposons-nous de transformer l'équation (6)

$$(6) \qquad a(p, q)r + 2b(p, q)s + c(p, q)t = 0.$$

Il est facile de remarquer en remplaçant dans cette équation les dérivées secondes r, s, t, par leurs expressions tirées du système (5′), [s a deux expressions], que cette équation (6) peut s'écrire

$$(7) \qquad \begin{aligned} 0 = &\left(b\frac{\partial p}{\partial \theta} + c\frac{\partial q}{\partial \theta}\right)\frac{\partial x}{\partial \varphi} - \left(b\frac{\partial p}{\partial \varphi} + c\frac{\partial q}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial x}{\partial \theta} \\ &+ \left(a\frac{\partial p}{\partial \varphi} + b\frac{\partial q}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial y}{\partial \theta} - \left(a\frac{\partial p}{\partial \theta} + b\frac{\partial q}{\partial \theta}\right)\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

où les diverses dérivées $\dfrac{\partial p}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial q}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}$, $\cdots$ peuvent être calculées d'après (3) et (4).

L'équation transformée, obtenue, sera *linéaire* et *homogène* par rapport à la fonction h, et à ses dérivées premières et secondes, les coefficients étant des fonctions données de θ et de φ [1]. Une particularité d'une grande importance dans l'occurrence, c'est que le *coefficient* de $\frac{\partial h}{\partial \varphi}$ est *identiquement nul.*

Cherchons à quelles conditions, les termes en $\frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2}$ et $\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}$ manquent dans l'équation transformée (7), qui se réduirait à la forme classique de Laplace, et même d'une forme de Laplace tronquée, puisque B est *identiquement nul.*

Ces conditions sont visiblement les deux conditions suivantes (7′) :

$$(7')\quad \begin{cases} \left[b\left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)+c\left(\frac{\partial q}{\partial \theta}\right)\right]\sin\varphi+\left[a\left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)+b\left(\frac{\partial q}{\partial \theta}\right)\right]\cos\varphi=0, \\ \left(a\frac{\partial p}{\partial \varphi}+b\frac{\partial q}{\partial \varphi}\right)\sin\varphi-\left(b\frac{\partial p}{\partial \varphi}+c\frac{\partial q}{\partial \varphi}\right)\cos\varphi=0. \end{cases}$$

Relations *linéaires* et *homogènes* en a, b, c. Ces coefficients sont faciles à calculer, mais d'ailleurs *inutiles* pour la suite. Il est en effet visible que, eu égard aux relations (7″), dans l'équation de Laplace (L) tronquée, les coefficients A et C sont nuls. En effet, les expressions de (A) et de (C) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \sin\theta\cos\theta\left[\left(b\frac{\partial p}{\partial \theta}+c\frac{\partial q}{\partial \theta}\right)\sin\varphi+\left(a\frac{\partial p}{\partial \theta}+b\frac{\partial q}{\partial \theta}\right)\cos\varphi\right] \\ &\quad+2\cos^2\theta\left[\left(b\frac{\partial p}{\partial \varphi}+c\frac{\partial q}{\partial \varphi}\right)\cos\varphi-\left(a\frac{\partial p}{\partial \varphi}+b\frac{\partial q}{\partial \varphi}\right)\sin\varphi\right], \\ \mathrm{C} &= \left[\left(b\frac{\partial p}{\partial \theta}+c\frac{\partial q}{\partial \theta}\right)\sin\varphi+\left(a\frac{\partial p}{\partial \theta}+b\frac{\partial q}{\partial \theta}\right)\cos\varphi\right]. \end{aligned}$$

L'équation de Laplace se réduit à

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \theta\, \partial \varphi}=0,$$

d'où

$$h=\alpha(\varphi)+\beta(\theta).$$

Les surfaces obtenues sont celles qu'envisageait le problème

---

[1] Cette équation aux dérivées partielles de second ordre linéaire et homogène a fait l'objet de quantité de recherches de géomètres éminents. *Voir* l'immortel Ouvrage de Gaston Darboux, sur la théorie générale des surfaces, qui cherche à la ramener (méthode dite des caractéristiques) à l'équation de Laplace

$$(\mathrm{L})\qquad \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi\, \partial \theta}+\mathrm{A}\frac{\partial h}{\partial \theta}+\mathrm{B}\frac{\partial h}{\partial \varphi}+\mathrm{C}h=0.$$

d'agrégation de 1905, précédemment cité. *Surfaces dont les lignes de courbure sont planes*

$$\varphi = \text{const.}, \qquad \theta = \text{const.},$$

et qui, lorsqu'elles sont de *révolution*, sont à *courbure moyenne constante*.

3. *Surfaces réglées à plan directeur.* — Un autre cas particulier de l'équation (6) est celui des surfaces réglées qui dépendent de l'équation aux dérivées partielles

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0. \tag{8}$$

La transformation conduit très aisément à l'équation réduite

$$\sin\theta \frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2} + 2\frac{\partial h}{\partial\theta}\cos\theta = 0, \tag{λ_1}$$

dont l'intégration est presque immédiate comme suit :

L'équation (λ_1) peut s'écrire visiblement

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial h}{\partial\theta}\sin\theta\right) + \cos\theta\left(\frac{\partial h}{\partial\theta}\right). \tag{λ_2}$$

Posons

$$\zeta = \frac{\partial h}{\partial\theta}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\theta} + \zeta\cot\theta = 0,$$

$$\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \qquad \frac{\partial h}{\partial\theta}\sin^2\theta = \gamma(\varphi),$$

γ étant une fonction de φ seule (fonction *arbitraire*),

$$h = -\gamma(\varphi)\cot\theta + g(\varphi),$$

g fonction *arbitraire* de φ seule.

Nota. — Parmi les surfaces réglées à plan directeur, le fameux conoïde de Plucker

$$z = k\frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)}$$

joue un rôle très important dans la théorie cinématique des surfaces. *Voir* dans la dernière édition du Livre de M. G. Darboux, les études de M. P. Appell et celles de M. Raoul Bricard.

4. La transformation indiquée présente de l'intérêt dans le cas de l'*équation générale des surfaces minima*

$$(9)\qquad (1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r = 0.$$

Eu égard à la relation évidente

$$p\sin\varphi - q\cos\varphi = 0$$

et à la relation non moins évidente

$$q\frac{\partial p}{\partial\theta} - p\frac{\partial q}{\partial\theta} = 0,$$

la transformation de l'équation (9) en équation (7) peut être très rapide et présente une certaine élégance.

L'équation (9) peut s'écrire successivement

$$\left\{\frac{\partial q}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial\varphi} + \left[p\left(q\frac{\partial p}{\partial\varphi} - p\frac{\partial q}{\partial\varphi}\right) - \frac{\partial q}{\partial\varphi}\right]\frac{\partial x}{\partial\theta}\right\}$$

$$= \left\{\frac{\partial p}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial\varphi} + \left[q\left(p\frac{\partial q}{\partial\varphi} - q\frac{\partial p}{\partial\varphi}\right) - \frac{\partial p}{\partial\varphi}\right]\frac{\partial y}{\partial\theta}\right\},$$

$$\frac{\partial q}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial\varphi} - \left[p\,\mathrm{tang}^2\theta + \frac{\partial q}{\partial\varphi}\right]\frac{\partial x}{\partial\theta} = \frac{\partial p}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial\varphi} + \left[q\,\mathrm{tang}^2\theta - \frac{\partial p}{\partial\varphi}\right]\frac{\partial y}{\partial\theta},$$

$$\left[\frac{\partial q}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial\varphi} + \frac{\partial x}{\partial\theta}\mathrm{tang}\,\theta(1+\mathrm{tang}^2\theta)\cos\varphi\right] = \frac{\partial p}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial\varphi} - \frac{\partial y}{\partial\theta}\mathrm{tang}\,\theta(1+\mathrm{tang}^2\theta)\sin\varphi,$$

pour se muer finalement en l'équation

$$(10)\qquad \frac{\partial^2 h}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2}\sin^2\theta + 3\frac{\partial h}{\partial\theta}\sin\theta\cos\theta + h = 0.$$

5. Bien des solutions simples de cette équation aux dérivées partielles (10) sont en évidence (il n'y a pas lieu d'insister sur son intégration générale).

Cherchons d'abord des solutions de la forme

$$h = h_1(\varphi) + h_2(\theta).$$

On doit avoir

$$(h_1)\qquad \frac{\partial^2 h_1}{\partial\varphi^2} + h_1 = 0,$$

$$(h_2)\qquad \frac{\partial^2 h_2}{d\theta^2}\sin^2\theta + 3\frac{dh_2}{d\theta}\sin\theta\cos\theta + h_2 = 0,$$

d'où l'on tire immédiatement, en introduisant les constantes arbitraires c_1, c_2, d_1, d_2,

$$h_1 = c_1 \cos\varphi + c_2 \sin\varphi,$$

$$h_2 = \cot\theta \left[d_1 + \frac{d_2}{\cos\theta} + d_2 \, \mathrm{L} \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} \right].$$

L'intégration de l'équation (h_1) est évidente. Celle de l'équation (h_2), assez facile, soit à la faveur de la remarque, qu'elle a une solution particulière évidente $\cot\theta$, soit après transformation en posant $h = e^{\int \mathrm{H}\, d\theta}$ en une équation de Riccati

$$\sin^2\theta \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \theta} + \mathrm{H}^2 \right] + 3\mathrm{H} + 1 = 0,$$

équation dont il est assez aisé d'obtenir une solution particulière (équation intégrable par conséquent).

Nous laissons aux lecteurs le soin de vérifier que l'on retrouve ainsi la caténoïde de révolution de Lindelöf.

6. On peut encore chercher une solution de la forme

$$h = h_1(\varphi)\, h_2(\theta).$$

L'équation (10) donne alors

$$\frac{\dfrac{d^2 h_1}{d\varphi^2} + h_1}{h_1} = -\frac{\dfrac{d^2 h_2}{d\theta^2}\sin^2\theta + 3\dfrac{dh_2}{d\theta}\sin\theta\cos\theta}{h_2}.$$

ou en posant α, la valeur commune (évidemment constante) des deux rapports

$$\frac{d^2 h_1}{d\varphi^2} + h_1(1 - \alpha) = 0, \tag{11}$$

$$\frac{d^2 h_2}{d\theta^2}\sin^2\theta + 3\frac{dh_2}{d\theta}\sin\theta\cos\theta + \alpha\, h_2 = 0. \tag{12}$$

L'intégrale générale de (11) est évidente. Celle de (12) est élémentaire dans le cas $\alpha = 1$ (cas où elle se trouve écrite précédemment), et dans le cas $\alpha = 0$.

Pour $\alpha = 1$, on retrouvera en particulier l'*hélicoïde réglé à plan directeur* qui correspond à $h_1 = d_1 \cot\theta$.

Pour $\alpha = 0$, on a

$$h = (c_1 \cos\varphi + c_2 \sin\varphi)\left(d_1 + d_2 \operatorname{L} \operatorname{tang}\frac{\theta}{2} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right).$$

Intégration de l'équation différentielle

$$(\mathrm{H}) \qquad \sin^2\theta \frac{d^2 h_2}{d\theta^2} + 3\frac{dh_2}{d\theta}\sin\theta\cos\theta + \alpha h_2 = 0 \qquad (\alpha \text{ quelconque}).$$

Posons

$$x = \cot\theta,$$

l'équation se transforme en l'équation

$$(\mathrm{X}) \qquad (1 + x^2)\frac{d^2 h_2}{dx^2} - x\frac{dh_2}{dx} + \alpha h_2 = 0.$$

Cette équation est une forme réduite de l'équation classique d'Euler, généralisée par Gauss

$$(a_0 x^2 + b_0 x + c_0)\frac{d^2 h_2}{dx^2} + (d_0 x + c_0)\frac{dh_2}{dx} + f_0 h_2 = 0,$$

équation étudiée dans les traités complets d'analyse (*voir* incidemment sur la construction de l'intégration générale des équations différentielles où le nombre de points critiques est limité, le cours d'analyse de Jordan à l'École Polytechnique en 1901).

L'équation (X) prend une forme élégante en y posant $x = \operatorname{sh} t$, il vient alors

$$(\mathrm{T}) \qquad \frac{d^2 h_2}{dt^2} - 2\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\frac{dh_2}{dt} + a h_2 = 0.$$

Posons encore

$$h_2 = \omega(t)\operatorname{ch} t.$$

L'équation (t) transformée est

$$(\Omega) \qquad \frac{d^2\omega}{dt^2} + \left[(a - 1)\operatorname{ch} t + \frac{2}{\operatorname{ch} t}\right]\omega = 0.$$

Cette dernière équation différentielle est de la forme

$$(\omega) \qquad \omega'' + \omega A_0(t) = 0,$$

où $A_0(t)$ désigne une fonction *analytique* de la variable indépendante t *réelle* et *régulière* pour toutes les valeurs *réelles* et *finies* de t.

Elle rentre donc dans la catégorie d'équations différentielles du second ordre, étudiée tout dernièrement (*Nouvelles annales de mathématiques*, janvier 1927. Concours d'agrégation de mathématiques 1926. Question d'analyse. Solution de M. Bertrand Gambier) en utilisant des remarques de mécanique rationnelle.

Remarques. — 1° Il est est bon de remarquer à propos de l'équation (X) qu'elle peut être intégrée par série (solution particulière par la série *entière*)

$$\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots + \gamma_p x^p + \gamma_{p+1} x^{p+1} + \gamma_{p+2} x^{p+2} + \ldots.$$

Les différents γ pouvant être calculés par la formule de récurrence

$$(\mathrm{F}_r)\quad (p+1))(p+2)\gamma_{p+2} + [a + p(p-2)]\gamma p = 0.$$

2° A propos de l'équation (ω) Jacobi a démontré (*voir* recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal de Frenet (1891) que si l'on a une intégrale *première* de l'équation $\frac{d^2\omega}{dt^2} = \mathrm{F}(\omega, t)$ on peut obtenir une intégrale générale au moyen de quadratures. Dans l'occurrence l'intégrale première est loin d'être évidente.

Le lecteur pourra mettre en évidence les propriétés géométriques des surfaces qui correspondent à la forme

$$h = h_1(\varphi)\, h_2(\theta),$$