NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 219-224

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__219_1>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C. 123. — *Que devient l'équation différentielle*

$$x(x^3+3xy^2+2y^3)-y(2x^3+3x^2y+y^3)\frac{dy}{dx}=0$$

après le changement de variable $y=tx$? *Montrer que la solution de l'équation qui relie* x *et* t *peut se mettre sous la forme*

$$x=\frac{A(t)}{t^3-1},$$

$A(t)$ *étant un polynome que l'on déterminera.*

Construire celle des courbes intégrales de l'équation (E) *qui rencontre* Ox *au point d'abscisse* -1.

II. *On considère trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz. *Un segment* AB, *de longueur* 1, *se déplace en restant parallèle au plan* xOy, *de telle sorte que son extrémité* A *décrive l'axe* Oz *et son extrémité* B *l'arc d'hélice*

$$x=\cos\varphi,\qquad y=\sin\varphi,\qquad z=\varphi\qquad\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right).$$

Il engendre ainsi une surface (S).

Évaluer le volume compris entre cette surface, le plan xOy, *le plan* yOz *et le cylindre* $x^2+y^2=1$.

Calculer le moment d'inertie par rapport à Oz *de ce même volume supposé rempli de matière homogène de densité* 1.

III. *Étudier la fonction de* x

$$y = \int_0^x \frac{t\,dt}{\sqrt[3]{t^3 - 1}}$$

et en donner la représentation graphique.

On ne cherchera pas à évaluer la primitive; on se contentera d'examiner si la fonction a un sens pour toutes les valeurs de x, *si elle présente des maxima et des minima et d'en faire l'étude à l'infini en déterminant s'il y a lieu l'asymptote.*

MÉCANIQUE. — I. C. 124. — *Un fil élastique dont la longueur naturelle est* 1 *est attaché par une de ses extrémités en un point fixe* A, *il passe sur une petite poulie fixe* O *située sur la verticale du point* A *et à une distance* 1 *au-dessus de ce point, il supporte ensuite une petite poulie mobile* B *à laquelle est suspendue un poids* P; *enfin, l'autre extrémité* C *du fil est soumise à une force* F.

La position du point C *étant supposée donnée, déterminer la force* F *de telle façon que le système soit en équilibre.*

La force F *varie naturellement suivant la position du point* C. *Montrer que le champ de forces ainsi défini dérive d'une fonction de forces. En tracer les surfaces de niveau et les lignes de forces.*

N. B. — *On admettra que la tension du fil est proportionnelle à son allongement et l'on assimilera les poulies à des points.*

II. *Un pendule simple de longueur* $5a$ *oscille dans un plan vertical. Sur la verticale du point de suspension et à une distance* $4a$ *en dessous est fixé un clou perpendiculaire au plan d'oscillation. Le pendule oscille alors vers la gauche avec la longueur* $5a$ *et vers la droite avec la longueur* a *seulement.*

On écarte le pendule à partir de la position verticale et vers la gauche d'un angle α. *Entre quelles limites cet angle doit-il être compris pour que le fil reste tendu dans la suite de son mouvement?*

EPREUVE PRATIQUE. — *Étudier les variations de la fonction*

$$y = 2x^5 - 10x^4 - 5x^2 + 40x.$$

Combien l'équation $2x^5 - 10x^4 - 5x^2 + 40x = 0$ *a-t-elle de racines réelles? Calculer à* 0,001 *près la plus petite racine positive* α.

Évaluer l'aire comprise entre la courbe représentative de la fonction proposée et le segment de l'axe Ox *compris entre les points d'abscisses* O *et* α. *Avec quelle approximation le calcul précédemment fait permet-il de trouver l'aire demandée?*

(Strasbourg, novembre 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Les axes étant rectangulaires, on considère, dans la région où x et y sont positifs, une boucle de lemniscate, que l'on pourra définir à volonté par l'équation*

$$(x^2+y^2)^2 = xy,$$

ou par les équations paramétriques

$$x = \frac{t}{1+t^4}, \qquad y = \frac{t^3}{1+t^4},$$

ou enfin par l'équation polaire

$$\rho^2 = \cos\theta \sin\theta.$$

1° *Calculer l'intégrale double* $\mathrm{I} = \iint (x^2+y^2)\,dx\,dy$, *étendue à l'aire limitée par cette boucle.*

2° *Calculer l'intégrale curviligne* $\mathrm{J} = \int x^3\,dy - y^3\,dx$, *étendue au contour de cette boucle, parcouru dans le sens positif.*

3° *Expliquer la relation simple qui existe entre les intégrales* I *et* J, *que l'on vient de calculer* directement.

II. C. 125. — *Soit une courbe plane* (C), *rapportée à deux axes rectangulaires* Ox, Oy. *Soient* M *un point quelconque de cette courbe,* R *le rayon de courbure algébrique en ce point et* T *le point de rencontre de la tangante en* M *avec* Ox.

1° *Déterminer la courbe* (C) *de telle manière que l'on ait*

$$\mathrm{R} = \overline{\mathrm{MT}} + 2.$$

2° *Montrer que, parmi les courbes* (C), *il en existe une* Γ, *qui passe par le point de coordonnées* (1, 1) *et qui jouit en outre de la propriété suivante :*

On peut construire un carré de sommet M *et ayant un côté porté par* MT *et de longueur constante, tel que le sommet* P *opposé à* M *soit constamment sur* Ox.

3° *Construire la courbe* Γ.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un point pesant* M, *de poids* 3^{kg}, *est attiré par un point fixe* O *proportionnellement à la distance* OM. *Lorsque* OM $= 10^{\mathrm{m}}$, *cette attraction est égale à* $5^{\mathrm{kg}},24$.

On lance le point, à partir de O, *avec une vitesse de* 8^{m} *par seconde. Dans quelle direction faut-il le lancer pour qu'il rencontre le plan horizontal passant par* O *à* $3^{\mathrm{m}},50$ *de ce dernier point et dans le minimum de temps. Calculer ce temps.*

On donne $g = 981$ C. G. S. (Clermont, juin 1927.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *Calculer les racines complexes de l'équation binome*

$$z^4 = -1$$

et marquer les points représentatifs sur le plan $z = re^{i\theta}$.

2° *Déduire de ce calcul une décomposition du polynome* z^4+1 *en deux polynomes du deuxième degré à coefficients réels*

$$z^4+1=(z^2+pz+q)(z^2+p'z+q').$$

3° *Calculer l'intégrale* $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^4+1}dx$; *appliquer la formule trouvée au calcul de*

$$\int_0^{+\sqrt{2}} \frac{dx}{x^4+1} \qquad (a,\ b,\ c \text{ constantes}).$$

II. *Ayant choisi une origine* I *et un sens positif sur une courbe plane* (γ), *on désigne par* S *l'arc* IM *et par* σ *l'angle de* Ox *avec la tangente positive* $\vec{u}$.

1° *Démontrer que si le rayon de courbure est une fonction connue de* σ : $R=f(\sigma)$, *on peut, par deux quadratures, obtenir l'expression paramétrique des coordonnées* x *et* y *de* M *en fonction de* σ; *on peut, sans nouvelle quadrature, en déduire les coordonnées* x_c *et* y_c *du centre de courbure* c, *ce qui définit paramétriquement la développée* (δ) *de* (γ). *On désignera par* x_0, y_0 *les coordonnées du point arbitraire* I, *par* α *la valeur de* σ *en ce point.*

2° *Appliquer ces résultats généraux à* $R=k\sigma$; *construire en particulier les courbes* (δ_0) *et* (γ_0) *correspondant à* $x_0=y_0=0$, $\alpha=0$; *démontrer géométriquement sur cet exemple la propriété du rayon de courbure exprimée par l'équation* $R=k\sigma$; *déduire de ce cas particulier la construction générale de* (δ) *et* (γ) *quand* x_0, y_0, α *sont arbitraires.*

3° *On considère sur la courbe précédente* (γ_0) *le point* M_0, *où, en partant de* I_0, *la courbe coupe pour la première fois la droite* $x=-2k$; *calculer la longueur de l'arc* I_0M_0.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère l'équation différentielle*

$$y''-y'+\lambda y=10e^x-2e^{2x}.$$

1° *Déterminer son intégrale générale, en indiquant toutes les formes qu'elle prend lorsque la constante* λ *varie de* $-\infty$ *à* $+\infty$.

2° *En supposant* $\lambda=0$, *déterminer l'intégrale particulière qui passe par le point* $x_0=0$, $y_0=-1$, *sa tangente en ce point ayant pour pente* $m_0=8$; *construire la courbe représentative, déterminer les points remarquables (maxima, minima, racines, inflexions) avec* 3 *chiffres exacts.*

NOTA. — *Toute méthode correcte (construction graphique, formule d'interpolation) sera admise pour la résolution des équations qui déterminent les points demandés.* (Lille, juin 1927.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Étant donnée la série entière en* x

$$\frac{x^2}{1,2}-\frac{x^3}{2,3}+\frac{x^4}{3,4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{(n-1)^n}+\ldots$$

déterminer l'intervalle de convergence de cette serie : est-elle convergente aux extrémités?

Former dans cet intervalle une expression simple de la somme $S(x)$ *de la série, par comparaison avec une série entière connue.*

Représenter graphiquement la somme $S(x)$: *la courbe obtenue a-t-elle des points d'inflexion?*

II. *Déterminer le centre de gravité de l'arc de cycloïde supposé homogène représenté par les équations*

$$x = R(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = R(1 - \cos\varphi)$$

quand le paramètre φ *varie de* 0 *à* π. *On calculera successivement :*

1° *La longueur de cet arc;*

2° *L'ordonnée* y *du centre de gravité;*

3° *Son abscisse* X.

III. *Donner l'intégrale du système différentiel*

$$\frac{dy}{dx} = z + \cos x + \cos 2x,$$
$$\frac{dz}{dx} = -y + x^2 + e^x \cos x,$$

définie par les conditions initiales

$$x = 0, \; y = 0, \; z = 0$$

et deux intégrales premières qui soient des polynomes du premier degré en y *et* z, *dont les coefficients dépendent de* x.

Solution. — Dans la série des valeurs absolues le rapport d'un terme au précédent

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x| \frac{n}{n+2}$$

tend, quand n tend vers l'infini, vers $|x|$. Donc, d'après la règle de d'Alembert, l'intervalle de convergence est l'intervalle $-1, +1$. Pour $x = -1$, la série a pour terme général

$$\frac{1}{n|n+1|} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

et la somme des n premiers termes est égale à $1 - \frac{1}{n+1}$, et la série est convergente et a pour somme l'unité; d'ailleurs aussi le terme général a pour partie principale $\frac{1}{n^2}$ et le produit $n^2 u_n$ tend vers 1, d'où résulte encore la convergence de la série. Pour $x = 1$, la série est par suite absolument convergente, et d'ailleurs aussi c'est une série alternée dont le terme général tend vers zéro en décroissant constamment.

En dérivant terme à terme la série proposée, on obtient la série qui donne le développement classique de $\log(1 + x)$; donc pour $-1 < x < 1$, on a

$$S(x) = \int_0^x \log(1+x)\,dx = (x+1)\log(1+x) - x.$$

D'où résulte la courbe qui n'a pas de points d'inflexions, puisque

$$S''(x) = \frac{1}{1+x}.$$

On peut remarquer que, si l'on forme directement pour $x = -1$ et $x = 1$ la somme de la série, soit 1 et $2\log 2 - 1$, on obtient les valeurs limites de l'expression précédente quand x tend vers -1 ou $+1$.

II. Le carré de l'élément d'arc a pour expression

$$ds^2 = R^2[(1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi]\,d\varphi^2 = 2R^2(1-\cos\varphi)\,d\varphi^2 = 4R^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi^2,$$

d'où

$$L = \int_0^\pi 2R\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 4R\left(-\cos\frac{\varphi}{2}\right)_0^\pi = 4R$$

et

$$4Ry = \int_0^\pi 2R^2(1-\cos\varphi)\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi, \qquad 4Rx = \int_0^\pi 4R^2(\varphi-\sin\varphi)\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.$$

Les deux intégrales se calculent par les procédés classiques, et ont pour valeur commune $\frac{16R^2}{3}$. Donc les coordonnées x et y sont égales toutes deux à $\frac{4R}{3}$.

III. L'élimination de la fonction z donne l'équation linéaire du second ordre en y :

$$\frac{d^2y}{dx_2} + y = x^2 + e^x\cos x - \sin x - 2\sin 2x;$$

dont l'intégrale générale se forme par les procédés classiques :

$$y = A\cos x + B\sin x + x^2 - 2 + \frac{e^x}{5}(\cos x + 2\sin x) + \frac{x}{2}\cos x + \frac{2}{3}\sin 2x,$$

A et B désignant deux constantes arbitraires. On tire de la première équation la valeur correspondante de z :

$$z = -A\sin x + B\cos x + 2x + \frac{e^x}{5}(3\cos x + \sin x) - \frac{\cos x}{2} - \frac{2\sin x}{2} + \frac{\cos 2x}{3}.$$

Les conditions initiales $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ donnent les valeurs des constantes

$$A = \frac{9}{5}, \quad B = \frac{13}{30}.$$

On obtient les deux intégrales premières demandées en résolvant les deux formules donnant les expressions de y et z, par rapport aux deux constantes A et B. (Paris, juin 1927).