NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL APPELL

Sur des expressions de C et de C^2 par des séries

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 193-196
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__193_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR DES EXPRESSIONS DE C ET DE C^2 PAR DES SÉRIES;

PAR PAUL APPELL.

1° La constante C d'Euler, avec la fonction $S(h)$, a été définie dans l'article que j'ai publié en juillet 1926 dans les *Nouvelles Annales*. On peut y joindre $S(1)$ à $S(2)$, $S(3)$, ..., la conclusion reste la même.

2° On trouve, dans le calcul intégral de J. Bertrand, pour C, la formule

$$C = \int_0^1 \left(\frac{1}{\log(1-z)} + \frac{1}{z} \right) dz = \int_0^1 \varphi(z)\, dz. \tag{1}$$

Supposons un développement quelconque, limité ou non de $\varphi(z)$,

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z) + \ldots + \varphi_n(z) + \ldots. \tag{2}$$

On aura évidemment, en posant

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(z)\, dz,$$

$$C = I_0 + I_1 + \ldots + I_n + \ldots. \tag{3}$$

Si le développement (2) est illimité les séries (2) et (3) sont supposées convergentes.

En prenant le développement en série entière de M. Ser (*Intermédiaire des mathématiciens*, 1925),

$$\frac{1}{\log(1-z)} + \frac{1}{z} = p_2 + p_3 z + \ldots + p_{n+2} z^n + \ldots, \tag{4}$$

où

$$p_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x(1-x)\ldots(\nu-1-x)}{1\,2\ldots\nu} dx,$$

on obtient par (3) la formule de Fontana-Bessel. Puis en faisant comme lui

$$\log(1-z) = x, \qquad z = 1 - e^x,$$

on a

$$\frac{1}{\log(1-z)}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-e^x}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n B_n}{2n!}x^{2n-1},$$

où les B_n sont les nombres de Bernoulli. En identifiant avec (4) on a les relations données par M. Ser (*loc. cit.*) entre les B_n et les $p_{\nu+1}$. Mais on a, d'après $x=\log(1-z)$,

$$\varphi(z)=\frac{1}{\log(1-z)}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{B_n}{2n!}\log^{2n-1}(1-z).$$

Alors

$$I_0=\frac{1}{2},\qquad I_n=(-1)^n\frac{B_n}{2n!}\int_1^1\log^{2n-1}(1-z)\,dz,$$

$$I_n=(-1)^n\frac{B_n}{2n!}\int_0^1\log^{2n-1}u\,du,$$

en faisant $u=e^t$,

$$I_n=(-1)^{n+1}\frac{B_n}{2n!}\int_0^\infty e^{-t}t^{2n-1}\,dt=(-1)^{n+1}\frac{B_n\Gamma(2n)}{2n!},$$

$$I_n=(-1)^{n+1}\frac{B_n}{2n}.$$

Alors

$$C-\frac{1}{2}=\frac{B_1}{2}-\frac{B_2}{4}+\frac{B_3}{6}-\ldots;$$

c'est l'une des série divergentes d'Euler que l'on peut remplacer par un développement en série limité. On a, en effet,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{1-e^x}=\frac{1}{2}+\sum_{1}^{n}{}_h(-1)^h\frac{B_h}{2h!}x^{2h-1}+(-1)^{n+1}\frac{B_{n+1}}{(2n+2)!}x^{2n+1}\theta,$$

où θ est compris entre o et 1.

En intégrant comme plus haut, on obtient

$$C-\frac{1}{2}=\frac{B_1}{2}-\frac{B_2}{4}+\frac{B_3}{6}-\ldots+(-1)^{m-1}\frac{B_m}{2m}+(-1)^m\theta_1\frac{B_{m+1}}{2m+2},$$

où θ_1 est compris entre o et 1. Je pense revenir sur ces formules dans un autre article.

3° A chacune des séries (2) on peut faire correspondre une série donnant C^2 pourvu qu'on sache calculer les intégrales

$$J_n(y) = \int_y^1 \varphi_n(x)\,dx, \qquad K_n = \int_0^1 J_n(y)\varphi(y)\,dy.$$

On a, en effet,

$$C^2 = \int\int \varphi(x)\varphi(y)\,dx\,dy,$$

l'intégrale étant étendue à l'aire du carré OABA′ dont les sommets ont pour coordonnées

$$(0, 0), \quad (1, 0), \quad (1, 1), \quad (0, 1).$$

On a alors, à cause de la symétrie,

$$\frac{C^2}{2} = \int\int_T \varphi(x)\varphi(y)\,dx\,dy,$$

l'intégrale étant étendue au triangle $T = OAB$. En intégrant d'abord par rapport à x, on doit calculer l'intégrale

$$\psi(y) = \int_y^1 \varphi(x)\,dx,$$

$$\psi(y) = \int_y^1 \sum_{n=0}^{n=\infty} \varphi_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{n=\infty} J_n(y).$$

Donc

$$\frac{C^2}{2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} K_n,$$

où

$$K_n = \int_0^1 J_n(y)\varphi(y)\,dy.$$

Par exemple, en prenant le développement (4), on a

$$J_n(y) = \int_y^1 p_{n+2}\,x^n\,dx = \frac{p_{n+2}}{n+1}[1 - y^{n+1}],$$

$$K_n = \frac{p_{n+2}}{n+1}\int_0^1 (1 - y^{n+1})\left[\frac{1}{\log(1-y)} + \frac{1}{y}\right]dy$$

$$= \frac{p_{n+2}}{n+1}\left[\int_0^1 \left(\frac{1}{\log 1 - y} + \frac{1}{y}\right)dy - \int_0^1 \left(\frac{y^{n+1}}{\log(1-y)} + \frac{y^{n+1}}{y}\right)dy.\right.$$

La première intégrale est C. Si l'on pose

$$L_n = \int_0^1 \left(\frac{y^{n+1}}{\log(1-y)} + y^n \right) dy = \frac{1}{n+1} + \int_0^1 \frac{y^{n+1}}{\log(1-y)} dy,$$

on a

$$\frac{C^2}{2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{p_{n+2}}{n+1} (C - L_n).$$

Comme, d'après la formule de Fontana-Bessel, le coefficient de C est la série donnant C, on a

$$\frac{C^2}{2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{p_{n+2}}{n+1} L_n.$$

L'intégrale L_n est connue, on a

$$L_n = \frac{1}{n+1} + \int_0^1 \frac{(1-u)^{n+1}}{\log u} du,$$

en retranchant au numérateur $(1-1)^{n+1}$ qui est nul

$$L_n = \frac{1}{n+1} + \int_0^1 \frac{-\frac{(n+1)}{1}(u-1) + \frac{(n+1)n}{1.2}(u^2-1) - \ldots}{\log u}$$

et en remarquant

$$\log(\rho+1) = \int_0^1 \frac{u^\rho - 1}{\log u} du,$$

il vient

$$L_n = \frac{1}{n+1} - \frac{n+1}{1} \log 2 + \frac{(n+1)n}{1.2} \log 3 - \ldots,$$

la série est convergente parce que

$$\left| L_n - \frac{1}{n+1} \right| < \int_0^1 \frac{u-1}{\log u} du = \log 2,$$

on a alors $\frac{C^2}{2}$.

On obtient de même C^2 par une série dont les termes contiennent les nombres de Bernoulli.