Certificat de mécanique appliquée

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 184-186

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__184_1>

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

ÉPREUVE THEORIQUE. — *Un anneau* AB *semi-circulaire, de section constante, est articulé à ses deux extrémités* A, B *sur deux axes horizontaux, fixes, de même niveau, et perpendiculaires au plan de l'anneau. Un système de serrage permet au besoin d'empêcher toute rotation aux articulations.*

1° *Les articulations étant serrées au repos, on applique une charge* P *verticale au sommet* C *de l'anneau. Déterminer les réactions des appuis et le fléchissement de l'anneau à son sommet.*

2° *Les articulations sont libérées, de sorte que tout frottement devienne négligeable, mais l'on ne touche pas la charge* P. *Déterminer les nouvelles réactions des appuis, ce que devient le fléchissement au sommet, l'angle dont tournent les axes, ainsi que les courbures de l'anneau à ses extrémités et à son sommet.*

3° *On serre de nouveau les articulations dans ce nouvel état de déformation, puis on supprime la charge* P. *De combien se déplace le sommet de l'anneau?*

N. B. — L'anneau est supposé de poids négligeable par rapport à P, *et sa section normale est assez faible pour qu'on puisse négliger, devant son aire, son moment d'inertie par rapport à la normale au plan de l'anneau passant par son centre de gravité.*

Indications sur la solution. — 1° Les réactions d'encastrement en A et B ont même composante horizontale H, même composante verticale $\frac{P}{2}$, les couples d'encastrement ont la même valeur Γ, et l'on a

$$H = P\frac{4-\pi}{\pi^2-8}, \qquad \Gamma = aP\frac{\pi^2-2\pi-4}{2(\pi^2-8)}.$$

Le fléchissement au sommet a la valeur

$$\zeta = \frac{Pa^3}{EI}\,\frac{\pi^3-20\pi+32}{8(\pi^2-8)}.$$

2° Dans ce cas Γ est nul, et l'on a pour la composante H, pour le fléchissement ζ, et pour l'angle φ dont tournent les extrémités de l'arc les valeurs

$$H = \frac{P}{\pi}, \qquad \zeta = \frac{Pa^3}{EI}\,\frac{3\pi^2-8\pi-4}{8\pi}, \qquad \varphi = \frac{Pa^3}{EI}\,\frac{4+2\pi-\pi^2}{4\pi}.$$

En B, M étant nul, le rayon de courbure conserve sa valeur a; au sommet C, la formule d'Euler donne

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{a} - \frac{aP}{EI}\,\frac{\pi-2}{2\pi}$$

3° Dans le premier problème le sommet C descend en C′; dans le second, il descend en C″.

Dans le troisième, il rencontre en C‴, et, en raison de la nature linéaire de la loi de Hooke, on a

$$C''C''' = C'C = \frac{Pa^3}{EI}\,\frac{\pi^3-20\pi+32}{8(\pi^2-8)}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trois poutres rectangulaires identiques sont liées entre elles par une articulation sans frottement* O (*cette articulation consiste par exemple en un triangle de côtés négligeables, autour de chacun desquels peut tourner librement l'une des poutres*).

Les poutres OA, OB *sont encastrées horizontalement à leurs extrémités* A, B, *et* OC *repose en* C *sur un appui fixe, les deux encastrements et l'appui sont au même niveau.*

Dans ces conditions, une charge P *est répartie uniformément sur l'une de ces trois poutres; une charge égale est concentrée dans la section médiane de chacune des deux autres poutres.*

Pour quelle répartition des trois charges P *l'articulation* O *subit-elle un fléchissement minimum? Calculer le minimum.*

Données : *Longueur* l *des trois poutres*, 1^{m}; *largeur*, 10^{cm}; *épaisseur*, 1^{cm}; *coefficient* E *d'élasticité*, 15000 kg/mm².

$$P = 15^{\mathrm{kg}}.$$

N. B. *On néglige le poids propre des poutres et l'influence des efforts tranchants.*

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Supposons que la poutre AO supporte la charge répartie. Les poutres AO et BO supportent en O de la part de CO des réactions

$$Q = u\frac{P}{2}, \qquad Q' = (1-u)\frac{P}{2}.$$

Le fléchissement ζ en O de la poutre OA est donné par

$$EI\zeta = \frac{Pl^3}{24}(4u+3).$$

Le fléchissement ζ de la poutre OB, égal au précédent, est donné par

$$EI\zeta = \frac{Pl^3}{48}(13-8u)$$

Il en résulte

$$u = \frac{7}{16}.$$

Supposons maintenant que la poutre OC supporte la charge répartie. Le fléchissement ζ est alors donné par

$$EI\zeta = \frac{3Pl^3}{16}.$$

Ce fléchissement est moindre qu'avec la première répartition.

Calcul numérique : $\zeta = 2^{\mathrm{cm}},2$.

(Lille, novembre 1926.)